

অসমতা (Inequality)

অসমতা (Inequality) কী?

যদি দুটি বিষয় বা সংখ্যা সমান সমান না হয়ে অসমান হয় তাহলে তাকে অসমতা বলে।

সমীকরণ অধ্যায়ে আমরা দেখেছি দুপাশে দুটি সমান মান বসিয়ে সমাধান করতে হয়। কিন্তু অসমতার বামপক্ষ ও ডানপক্ষ সাধারণত অসমান।

নিচের উদাহরণটি মনোযোগ দিয়ে বুঝলে অসমতা দ্বারা আসলে কি বোঝায় তা বুঝতে পারবেন।

☞ Karim's school is 10 kms from his home, From there he travels 4 kms to get to his friend's house and then travels 3 kms to get to the cricket ground. If he is than x miles from home, what is the range of possible values of x ? (করিমের স্কুল তার বাড়ী থেকে ১০কিমি দূরে অবস্থিত। সেখান থেকে সে ৪কিমি দূরে তার বন্ধুর বাড়ী গেল, এরপর বন্ধুর বাড়ী থেকে ৩কিমি দূরে ক্রিকেট মাঠে গেল। বর্তমানে করিম যদি তার বাড়ী থেকে x কিমি দূরে অবস্থান করে তাহলে x এর সীমা কত হবে?) (FLI Off-08)

a. $3 \leq x \leq 12$

b. $3 \leq x \leq 17$

c. $3 \leq x \leq 10$

d. $3 \leq x \leq 14$ উত্তর: b

☞ Solution:

এক্ষেত্রে x এর সর্বোচ্চ মান = $10 + 4 + 3 = 17$ (কারণ বাসা থেকে তার স্কুল সোজা ১০কিমি দূরে হলে এবং সেখান থেকে তার বন্ধুর বাসার দূরত্ব সোজা ৪ কিমি ও বন্ধুর বাসা থেকে খেলার মাঠ সোজা ৩ কিমি দূরত্ব হলে সর্বোচ্চ দূরত্ব ১৭ হয়।)

আবার x এর সর্বনিম্ন মান = $10 - 4 - 3 = 3$ (যদি তার বাসা থেকে স্কুল ১০কিমি যাওয়ার পর তার বন্ধুর বাসা বিপরীত পাশে অর্থাৎ তার বাসার দিকেই হয় তাহলে দূরত্ব কমবে ৪ এবং বন্ধুর বাসা থেকে থেকে তার খেলার মাঠের দূরত্ব কমবে ৩)

∴ x অবশ্যই ৩ এর সমান বা এর বড় হবে এবং ১৭এর সমান বা এর ছোট হবে।

অর্থাৎ $3 \leq x \leq 17$

এখানে দূরত্ব দেয়া থাকলেও কোনদিকে অবস্থিত দেয়া না থাকায় একবার সোজা এবং আর একবার বিপরীত পাশে ধরে সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান বের করা হয়েছে।

সুতরাং আমরা বলতে পারি, অসমতা কোন নির্দিষ্ট মান কে নির্দেশ করে না। বরং একটা নির্দিষ্ট সীমাকে নির্দেশ করে।

☞ অসমতার বামপক্ষ ও ডানপক্ষের মাঝে $<$, $>$, \leq , বা \geq চিহ্নগুলো ব্যবহার করা হয়।

$x < y$ এর অর্থ x, y -এর চেয়ে ছোট আবার $x > y$ এর অর্থ x, y এর চেয়ে বড় (যে পাশে মুখ বড় করে থাকে তাই বড়) আবার,

$x \leq y$ এর অর্থ x, y এর চেয়ে ছোট অথবা সমান আবার, $x \geq y$ এর অর্থ x, y এর চেয়ে বড় অথবা সমান।

☞ অসমতার নিয়মাবলী:

অসমতার স্বতঃসিদ্ধ, সমীকরণের স্বতঃসিদ্ধের অনুরূপ। শুধুমাত্র নিচে বর্ণিত নিয়মগুলো অতিরিক্ত হিসেবে জানতে হবে।

(ক) অসমতার উভয় পাশে একই সংখ্যা যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ করলে অসমতার চিহ্নের পরিবর্তন হয় না।

যেমন:

ধরি একটি অসমতা $10 > 6$ তাহলে $10+8 > 6+8$ আবার $10 \div 2 > 6 \div 2$ (এভাবে বোঝা সহজ কারণ সংখ্যা দেখে ধরা

যাচ্ছে, কিন্তু প্রশ্নে x, y, z দেয়া থাকে বিধায় বুঝতে কষ্ট হয়, সহজভাবে বোঝার জন্য একটি মান ধরে করবেন)

- (খ) অসমতার বামপক্ষ ও ডানপক্ষের রাশিকে ঋণাত্মক সংখ্যা দ্বারা গুণ বা ভাগ করলে অসমতার দিক পাশ্টে যায়। যেমন:
 $10 > 6 = 10 \times (-2)$ এবং $6 \times (-2) = -20 < -6$ (এখানে চিহ্নটি উল্টে গেল কারণ - ২০ ছোট)
- (গ) ডানপক্ষকে বামপক্ষে এবং বামপক্ষকে ডানপক্ষে আনলে অসমতার দিক পাশ্টে যায়। যেমন:
 খুবই গুরুত্বপূর্ণ নিয়ম., $10 > 6$ দ্বারা বোঝায় ১০, ৬ এর থেকে বড়, তেমনি ঘুরিয়ে লিখলে $6 < 10$ অর্থ একই।
- (ঘ) আবার উভয়পক্ষকে বিপরীত করলে চিহ্ন পাশ্টে যায়। যেমন:
 $x < y$ অথবা, $y > x$ (দুটো একই)
- (ঙ) অসমতার দুপাশের সংখ্যাকে বিপরীতকরণ করলে অর্থাৎ লবকে হর এবং হরকে লব বানালে অসমতার চিহ্ন পরিবর্তন হয়ে যায়। যেমন: $3 > 2$ অর্থাৎ ৩ হল ২ এর থেকে বড় কিন্তু বিপরীতকরণ করার পর যা আসবে যেমন: $\frac{1}{3}$ এবং $\frac{1}{2}$ কে $\frac{1}{3}$
 $> \frac{1}{2}$ লিখলে ভুল হবে। কারণ $\frac{1}{3}$ এর থেকে $\frac{1}{2}$ বড় তাই লিখতে হবে $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ ।

পরমমান কি? এবং কেন?

একটি চিহ্ন এবং পরমমান যুক্ত সংখ্যা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক উভয়ে হতে পারে। তাই যদি কোন সংখ্যা বা ভগ্নাংশ পরমমান চিহ্ন এর ভেতরে থাকে তাহলে তাকে একবার ধনাত্মক এবং আরেকবার ঋণাত্মকধরে দুবার হিসেব করতে হয়।
 যেমন: $x+5 \leq 8$ বা, $x \leq 8-5 \therefore x \leq 3$ কিন্তু $|x+5| \leq 8$, অর্থাৎ হয় $x+5 \leq 8$ অথবা $-(x+5) \leq 8$
 বা, $x+5 \geq -8$ এটাকে আমরা সরাসরি লিখতে পারি, $|x+5| \leq 8 \Rightarrow -8 \leq x+5 \leq 8$

[পরমমানের ভেতরে ঋণাত্মক মান বসলে তা ধনাত্মক হয়ে যায় যেমন: $|-5| = 5$]

সংখ্যারেখার ধর্ম:

সংখ্যারেখায় অবস্থিত যে কোনো সংখ্যার ডানের সবগুলো সংখ্যা তার চেয়ে বড় এবং ধনাত্মক হয় এবং বামের সবগুলো সংখ্যা ছোট এবং ঋণাত্মক হয়।

V.V.I : এই অধ্যায়ের বুঝিয়ে দেয়া সমাধান গুলো ভালোভাবে করলে মানসিক দক্ষতা অংশের অনেক প্রশ্নের উত্তর দিতে সুবিধা হবে। বিসিএস এর লিখিত অংশেও লাভবান হবেন। তাই গুরুত্ব দিয়ে পড়ুন।

পদ্ধতি-০১: সাধারণ অসমতা

১. If $A > B$ and $C < 0$, which of the following is correct? (Uttara Bank Ltd. Ass. Offi (Cash) - 2011)

- a. $AC > BC$ b. $\frac{A}{C} = \frac{B}{C}$ c. $AC < BC$ d. none of these উত্তর: c

Solution:

দেয়া আছে, $A > B$. এবং $C < 0$ হলে; C - এর মান শূন্যের চেয়ে ছোট বলে এটি নেগেটিভ।
 $A > B$ -এর উভয় পাশে নেগেটিভ দ্বারা বদল করলে চিহ্ন ($>$) উল্টে যাবে। $AC < BC$ হবে।

২. $a + c > b$ হলে নিচের কোনটি সত্য? [সহকারী সাইফার কর্মকর্তা পররাষ্ট্র মন্ত্রণালয় : ২০১৭]

- ক. $a > b-c$ খ. $a < b-c$ গ. $b > a-c$ ঘ. $a < b-c$ উত্তর: ক
 [Help: $a + c > b$ বা, $a + c - c > b - c$ বা, $a > b - c$]

৩. যদি $-2 \leq x \leq 2$ and $3 \leq y \leq 8$ হয়, তবে কোনটি সঠিক? [কৃষি সম্প্রসারণ অধিদপ্তর- (অফি: সহ:+টাইপিস্ট)-২০১৮/ক. $1 \leq y - x \leq 10$ খ. $1 \leq y - x \leq 5$ গ. $5 \leq y - x \leq 6$ ঘ. কোনটিই নয় উত্তর: গ

সলিউশন:

দেয়া আছে, $3 \leq y \leq 8$
 $-2 \leq x \leq 2$

[বিয়োগ করে পাই] $5 \leq y - x \leq 6$ (অপশন গ এর সাথে মিলে গেছে।)

৪. x, y এবং z তিনটি পূর্ণ সংখ্যা। যদি $x < y < z$ এবং $y > 2$ হয় তবে নিচের কোনটি অবশ্যই ভুল? [কৃষি সম্প্রসারণ অধিদপ্তর- (অফি: সহ:+টাইপিস্ট)-২০১৮/ক. $xyz > 0$ খ. $xy - z > 0$ গ. $y - xz > 0$ ঘ. কোনটি নয় উত্তর: গ

সলিউশন:

দেওয়া আছে, $x < y < z$

ধরি, $x = 2, y = 3, z = 4$ [যেহেতু $x < y < z$]

এখন অপশনগুলোতে এই মান বসিয়ে দেখা যাক।

(ক) $xyz > 0 \Rightarrow 2 \times 3 \times 4 > 0 \Rightarrow 24 > 0$ এটা হতে পারে।

(খ) $xy - z > 0 \Rightarrow 2 \times 3 - 4 > 0 \Rightarrow 2 > 0$ এটাও হতে পারে।

(গ) $y - xz > 0 \Rightarrow 3 - 2 \times 4 > 0 \Rightarrow -5 > 0 =$ ইহা কখনোই সঠিক নয়। কারণ ঋণাত্মক সংখ্যা সবসময় ০ এর থেকে ছোট। সুতরাং এটাই উত্তর।

৫. যদি $2x + y = 2$ হয় এবং $x + 3y > 6$ হয়, তবে- [Bangladesh Shipping Cor: (Upper As)-2018] (ক) $y \geq 2$ (খ) $y < 2$ (গ) $y > 2$ (ঘ) $y \leq 2$ উত্তর: গ

সমাধান:

$2x + y = 2$

$\therefore 2x = 2 - y$

এখানে, $x + 3y > 6 \Rightarrow 2x + 6y > 12 \Rightarrow 2 - y + 6y > 12 \Rightarrow 5y > 10$

$\therefore y > 2$

৬. If $b < 2$ and $2x - 3b = 0$, which of the following must be true? [IFIC BANK (MTO) - 2017] (ক) $x > -3$ (খ) $x < 2$ (গ) $x = 3$ (ঘ) $x < 3$ উত্তর: d

সলিউশন:

দেয়া আছে, $b < 2$

বা, $3b < 6$ [3 দ্বারা গুণ করে]

বা, $-3b > -6$ [-1 দ্বারা গুণ করে]

বা, $2x - 3b > 2x - 6$ [$2x$ যোগ করে]

বা, $0 > 2x - 6$ [প্রশ্ন অনুযায়ী $2x - 3b = 0$]

বা, $2x < 6 \therefore x < 3$

কমনে রাখুন: উপরের দুটি প্রশ্ন থেকে শেখা গেল যে কিভাবে $(=)$ চিহ্ন থাকলে তা অসমতার প্রশ্নে কাজে লাগাতে হয়। এখানে, $(=)$ এর মানটি অসমতার রাশিতে বসানোর জন্য ঠিক সমীকরণের একপাশের রাশির সমান করে অন্যপাশের রাশি মেলানো হয়েছে তারপর অসমতাকে তা বসানো হয়েছে।

৭. $x^2 > 8, x^3 < 30$ হলে x এর সঠিক মান কোনটি? [৩২ তম বিসিএস] (ক) 2 (খ) 3 (গ) 4 ঘ. কোনটিই নয় উত্তর: খ

সমাধান:

এখানে ভেঙ্গে ভেঙ্গে এভাবে ভাবুন: $x^2 > 8$, যার অর্থ একটি সংখ্যার বর্গ ৮ এর থেকে বড়। আবার $x^3 < 30$ এর অর্থ ঐ একই সংখ্যাটির ঘন ৩০ এর থেকে ছোট এখন প্রশ্নের অপশনগুলো নিয়ে সমাধান করার চেষ্টা করুন:

$2^2 = 4 < 8$; যা প্রশ্নের $x^2 > 8$ মিলে না তাই এটা নেয়া যাবে না।

একইভাবে আবার, $4^2 = 16 > 8$; হলেও এবং $4^3 = 64 > 30$ যা প্রশ্নের $x^3 < 30$ সাথে মিলে না।

কিন্তু $3^2 = 9 > 8$ এবং $3^3 = 27 < 30$ হওয়ায় দুটি শর্তই পূর্ণ করে।

\therefore সঠিক উত্তর 3

৮. If $x + 1 > 1 - 2x$ then (Agrani Bank Ltd. Seni Offi-2011)

a. $x > 0$

b. $x < 0$

c. $x > 3$

d. $x < -3$

উত্তর: a

☞ Solution:

$x + 1 > 1 - 2x \Rightarrow x > -2x \Rightarrow 3x > 0 \Rightarrow x > 0$ So, answer is (a)

৯. If $x < 10$ and $2x - 3y = 8$, which of the following must be true? (First Security B(PO) 2013)

a. $y < 4$

b. $y < 6$

c. $y > 5$

d. none

উত্তর: a

☞ Solution:

যদি $x = 10$ হয়; তাহলে, $2x - 3y = 8 \Rightarrow 2 \cdot 10 - 3y = 8 \Rightarrow -3y = -12 \therefore y = 4$

কিন্তু বলা হয়েছে যে, $x < 10$; $\therefore y$ is also < 4

পদ্ধতি-০২: ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক মান

☐ মনে রাখুন:

- সব সময় $x > 0$ এভাবে একটি সংখ্যা 0 থেকে বড় হলে বুঝতে হবে সংখ্যাটি ধনাত্মক। আবার $x < 0$ এভাবে যে কোন একটি সংখ্যা 0 থেকে ছোট হলে বুঝতে হবে সংখ্যাটি ঋণাত্মক।
- $xy > 0$ এভাবে দুটি সংখ্যার গুণফল 0 থেকে বড় হলে বুঝতে হবে দুটি সংখ্যাই ধনাত্মক অথবা দুটি সংখ্যাই ঋণাত্মক। কেননা ঋণাত্মক দুটি সংখ্যা গুণ করলে তা আবার ধনাত্মক হয়ে যায়, যা 0 থেকে বড়।
- কিন্তু $xy < 0$ অর্থাৎ দুটি সংখ্যার গুণফল 0 থেকে ছোট হলে বুঝতে হবে একটি সংখ্যা ঋণাত্মক এবং অপর সংখ্যাটি ধনাত্মক। অথবা একটি ধনাত্মক হলে অন্যটি অবশ্যই ঋণাত্মক হবে।
- তিনটি সংখ্যা অর্থাৎ $xyz > 0$ থাকলে বুঝতে হবে যে সবগুলো গুণ করে ধনাত্মক হয়েছে আবার $xyz < 0$ থাকলে বুঝতে হবে তিনটি সংখ্যাই গুণ করে ঋণাত্মক মান বের হয়েছে।

(অনেক প্রশ্নেই এই বিষয়গুলো বার বার আসবে তাই গুরুত্ব দিয়ে পড়ুন।)

১০. $x > y$ এবং $z < 0$ হলে নিচের কোনটি সঠিক? [৩০তম বিসিএস]

ক. $xz > yz$

খ. $\frac{x}{z} > \frac{y}{z}$

গ. $\frac{z}{x} < \frac{z}{y}$

ঘ. $xz < yz$

উত্তর: ঘ

☞ সমাধান:

দেওয়া আছে, $z < 0$ অর্থাৎ z একটি ঋণাত্মক সংখ্যা। আমরা জানি, কোনো অসমতার উভয় পক্ষকে কোনো ঋণাত্মক সংখ্যা দ্বারা গুণ বা ভাগ করলে অসমতা চিহ্ন পাল্টে যায় (অর্থাৎ ' $>$ ' চিহ্ন পরিবর্তিত হয়ে ' $<$ ' চিহ্ন এবং ' $<$ ' চিহ্ন পরিবর্তিত হয়ে ' $>$ ' চিহ্ন হয়)। দেয়া আছে, $x > y \therefore xz < yz$ [উভয়পক্ষকে z দ্বারা গুণ করে]

১১. $x > y$ এবং $xy < 0$ হলে নিচের কোনটি ঋণাত্মক হবে? / এন আস আই এর ফিল্ড অফিসার : ২০১৭/

ক. x

খ. y

গ. $x-y$

ঘ. x^2+y^2

উত্তর: খ

১২. যদি $xy < 0$ এবং $y > 0$ হয়, তবে নিচের কোনটি অবশ্যই ভুল? / কৃষি সম্প্রসারণ অধিদপ্তর- (অফি: সহ:+টাইপিস্ট)-২০১৮/

ক. $\frac{2y+3}{2-x} > 6$

খ. $\frac{2y+3}{x-2} > 6$

গ. $\frac{2x+1}{2-x} < 6$

ঘ. সবগুলো সঠিক

উত্তর: খ

Solution:

দেওয়া আছে, $xy < 0$ এখানে দুটি সংখ্যার গুণফল 0 এর থেকে ছোট বা ঋণাত্মক তখনই হয় যখন তাদের মধ্যে যে কোন একটি সংখ্যা ঋণাত্মক হয়। আবার দেয়া আছে, $y > 0$ অর্থাৎ y এর মান 0 এর থেকে বড় সুতরাং y একটি ধনাত্মক সংখ্যা। এখন অপশনগুলো থেকে প্রমাণ করতে হবে কোনটা অবশ্যই ভুল।

$\frac{2y+3}{x-2} > 6$ অর্থাৎ x অপশনটি ভুল। কারণ x এর মান ঋণাত্মক এবং ঋণাত্মক সংখ্যা থেকে কোন কিছু বিয়োগ করলে তা আবার ঋণাত্মক ই থাকে। আবার ঋণাত্মক সংখ্যা দিয়ে উপরের $2y+3$ ধনাত্মক সংখ্যাকে ভাগ করলে ভাগফল ঋণাত্মক ই আসবে, এবং ঋণাত্মক সংখ্যা 6 এর থেকে বড় হতে পারে না। তাই এটাই ভুল।

20. If x is negative, all but which of the following must also be negative? (Dhaka Bank Ltd. MTO 2011)

- a. x^3 b. $\frac{1}{x^3}$ c. $\frac{1}{x}$ d. $\frac{1}{x^2}$ উত্তর: d

Solution:

বলা হয়েছে, x যদি negative হয় তাহলে নিচের কোনটি বাদে বাকী সবগুলো negative? (অর্থাৎ নিচের কোনটি positive হবে তা বের করতে হবে)

আমরা জানি, negative base-এর power যদি জোড় হয় তাহলে এর value positive হবে এবং power যদি বিজোড় হয় তাহলে এর value negative হবে।

সুতরাং option (d) $\frac{1}{x^2}$ সব সময় positive হবে কেননা এখানে x এর power জোড় আছে। ∴ উত্তর (d)

21. যদি $xyz < 0$ এবং $z < 0$ হয়, তবে নিচের কোনটি অবশ্যই সঠিক হবে? [খাদ্য অধিদপ্তরের সুপারভাইজার ২০০৯]

- ক. $xy > 0$ খ. $xy < 0$ গ. $xy < z$ ঘ. কোনটিই নয় উত্তর: ক

সমাধান: (বুঝে বুঝে না করলে শুধু নিয়ম জানলেই এ ধরনের অংক করতে গেলে সব এলোমেলো লেগে যেতে পারে।)

এখানে $xyz < 0$ বলতে বোঝায় যে, x , y ও z এর গুণফল হল xyz যা 0 এর থেকে ছোট তাই ইহা ঋণাত্মক। আবার যেহেতু $z < 0$ অর্থাৎ z এর মান 0 এর থেকে ছোট বা ঋণাত্মক তাহলে xy ও z এর গুণফল টি তখন ঋণাত্মক হবে যখন xy এর মান ধনাত্মক হবে। তা না হলে দুটি ঋণাত্মক সংখ্যা গুণ করলে xyz ধনাত্মক হয়ে যাবে যা 0 এর থেকে বড় হলে ভুল হবে। [যেহেতু $(+) \times (-) = (-)$ এবং $(-) \times (-) = (+)$ সুতরাং $xy > 0$ হবে।]

22. If $xy > 0$ and $x < 0$, which of the following must be negative? [BASIC Bank-02]

- a. $-x$ b. y c. $-y$ d. x উত্তর: b

[Help: দুটি ঋণাত্মক সংখ্যা গুণ করলে তা ধনাত্মক হয় এবং 0 এর থেকে বড় হয়। এখানে দেয়া আছে $x < 0$ অর্থাৎ x এর মান 0 এর থেকে কম অর্থাৎ x একটি ঋণাত্মক সংখ্যা। তাহলে x ও y গুণ করে 0 এর থেকে বড় হতে হলে y কে অবশ্যই ঋণাত্মক হতে হবে। তাই উত্তর: y]

23. If $x > y$, $z < y$ and $w < x$, which of the following statements is always true? [IBA Jul 93]

- a. $z > w$ b. $y > w$ c. $y = w$ d. $z < x$ উত্তর: d

সমাধান:

প্রথম থেকে দেখুন: $x > y$ অর্থ x বড় এবং y ছোট। আবার $z < y$ অর্থ y বড় এবং z ছোট, অর্থাৎ $x > y > z$ শেষে $w < x$ অর্থ হল w , x এর থেকে ছোট, কিন্তু কতটুকু ছোট তা বলা নেই। অর্থাৎ $x > y > z$ লিখার পর w , x এর পরে যে কোন জায়গায় হতে পারে, এখানে সবচেয়ে বড় হল x , এবং অন্যগুলো তার থেকে ছোট হলেও কে কার সমান তা বোঝা যায় না। এখন উত্তরের অপশনগুলো নিয়ে ভাবি

- (a) তে, $z > w$, অর্থাৎ z, w এর থেকে বড়, তা প্রদত্ত ক্রমলোতে কোথাও বলা নেই। তাই (a) উত্তর নয়।
 (b) তে, $y > w$ y, w এর থেকে বড়, তা প্রদত্ত ক্রমলোতে কোথাও বলা নেই। তাই (b) উত্তর নয়।
 (c) তে, $y = w$ এটাও সঠিক নয়।
 (d) তে, $z < x$ অর্থাৎ, z , এর থেকে x এর মান বড়। এটা সঠিক কারণ প্রশ্নানুযায়ী x ই সবথেকে বড়।
 (e) $x < z$ সঠিক নয় কারণ z , এর থেকে x এর মান বড়।

১৭. যদি $x > y$; $y > z$ এবং $w > x$ হয় তাহলে কোনটি সবথেকে বড়? (নিজে করুন)

১৮. If $6 - 4x \leq 14$, then [BRC Officers 08]

a. $x \leq 2$

b. $x \geq -2$

c. $x \leq -2$

d. $x \geq -2$

উত্তর: d

☞ Solution:

$$6 - 4x \leq 14 \quad \text{or, } 6 - 14 \leq 4x \quad \text{or, } -8 \leq 4x \quad \text{or, } -2 \leq x \quad \text{or, } x \geq -2$$

পদ্ধতি-০৩: ভগ্নাংশের অসমতা

☞ মনে রাখবেন:

- ☞ কোন ভগ্নাংশকে বিপরীতকরণ করলে অথবা সাধারণ সংখ্যাকে ভগ্নাংশ বানালে অসমতার চিহ্ন পরিবর্তন হয়।
- ☞ কোন পূর্ণ সংখ্যাকে বর্গ করলে তা বড় হয়। কিন্তু কোন প্রকৃত ভগ্নাংশের বর্গ করলে তা ছোট হয়ে যায়।
- ☞ কোন পূর্ণ সংখ্যার বর্গমূল করলে তা ছোট হয়, কিন্তু কোন প্রকৃত ভগ্নাংশের বর্গমূল করলে তা বড় হয়ে যায়।

১৯. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ হলে কোনটি সঠিক?

a. $a = b$

b. $a < b$

c. $a > b$

d. কোনটিই নয়

উত্তর: c

☞ ব্যাখ্যা:

যে কোন ভগ্নাংশকে বিপরীতকরণ করলে অসমতার চিহ্ন পরিবর্তন করতে হয়। যেমন: $2 < 3$ অর্থাৎ 2 এর থেকে 3 বড়। কিন্তু এই সংখ্যা দুটি কে ভগ্নাংশ আকারে লিখলে চিহ্ন পরিবর্তন করে এভাবে লিখতে হবে $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ কারণ $\frac{1}{2}$ এর মান $\frac{1}{3}$ থেকে বড়। তেমনি ভাবে প্রদত্ত প্রশ্নটিতে ভগ্নাংশ কে বিপরীত করায় চিহ্ন পরিবর্তিত হয়ে যাবে। তাই উত্তর: $a > b$

২০. If $x^3 < x^2 < x$, then the value of x could be? [BB.AD.RT-2010]

a. 0

b. 1

c. $\frac{1}{3}$

d. $\sqrt{3}$

উত্তর: c

☞ Solution:

$$x^3 < x^2 < x$$

এখানে শুধু x ই বড় কিন্তু যখন তার উপর বর্গ করা হচ্ছে তখন তা ছোট হয়ে যাচ্ছে আবার ঘন করা হলেও ছোট হচ্ছে। সুতরাং

x একটি ভগ্নাংশ। অপশনে শুধু মাত্র একটি ভগ্নাংশ আছে $\frac{1}{3}$ তাই ভগ্নাংশ ধরে এভাবে মিলিয়ে নেয়া যায়

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^3 < \left(\frac{1}{3}\right)^2 < \frac{1}{3} \quad (\text{c হতে মান বসিয়ে}) \Rightarrow \frac{1}{27} < \frac{1}{9} < \frac{1}{3}$$

$(x-3)$ ধনাত্মক হলে

$$x - 3 < 5 \quad (\text{প্রশ্নে যা আছে তাই লিখতে হবে})$$

বা, $x < 5 + 3$ [সমীকরণের মত এক পাশের রাশি আরেক পাশে গেলে চিহ্ন বদলে যায়]

$$x < 8 \quad \dots\dots\dots <<< \text{ এই মানটি সম্পূর্ণ উত্তরের অর্ধেক।}$$

আবার $(x-3)$ ঋনাত্মক হলে

$$-(x-3) < 5 \quad [\text{বাইরে } (-) \text{ লিখতে হয়।}]$$

$x - 3 > -5$ [উভয় পক্ষকে -1 দ্বারা গুণ করে। আর অসমতার উভয়পক্ষে ঋনাত্মকসংখ্যা গুণ করলে চিহ্ন উল্টে যায়]

$x > -5 + 3$ [সমীকরণের মতই -3 অসমতার অপর পাশে আসায় $+3$ হয়ে গেছে, কিন্তু চিহ্ন পরিবর্তন হয় নি।]

$$x > -2$$

□ নির্ণেয় সমাধান:

(এখানেই সবথেকে গুরুত্বপূর্ণ কাজটি করতে হয়। দুটি খন্ডিত উত্তরের সমন্বয় করে উত্তর বের করতে হবে)

এখানে প্রথম অংশে $x < 8$ এবং দ্বিতীয় অংশে $x > -2$ দুটি অংশের চিহ্ন ভিন্ন ভিন্ন। কিন্তু উত্তর লিখার সময় অবশ্যই দুটি চিহ্নই একই হতে হবে।

□ উত্তর লিখার নির্ভুল নিয়ম

সর্বপ্রথমে মাঝখানে x লিখুন। তারপর x এর দুপাশেই $<$ অথবা $>$ চিহ্ন লিখুন এভাবে $= < x <$ অথবা $> x >$

এখন উপরের মান দুটি থেকে একটি ছুঁবছ বসান এভাবে $= < x < 8$ or $-2 > x >$

এখন যে পাশে খালি আছে সে পাশে অন্য মানটি বসিয়ে উত্তর নিয়ে আসুন এভাবে $-2 < x < 8$ অথবা $8 > x > -2$

এ ধরনের অংকে সব সময় দুটি উত্তর আসবে। এখন অপশন অনুযায়ী উত্তর করবেন। অপশন গুলোতে খুব সুক্ষ্ম পার্থক্য দেয়া থাকে তাই ভালোভাবে না বুঝে করলে ভুল হতে পারে।

□ বিস্তারিত বোঝার পর দ্রুত করার জন্য এভাবে লিখুন: (পরীক্ষার হলে এভাবেই করবেন)

$$|x - 3| < 5$$

বা, $-5 < x - 3 < 5$ (পরমমান কে ভেঙ্গে একপাশে $+5$ আরেকপাশে -5 লেখা হল)

বা, $-5+3 < x - 3+3 < 5+3$ ($x - 3$ এর সাথে থাক -3 কে বাদ দেয়ার জন্য সবার সাথে $+3$ যোগ করা হল।)

$$\text{বা, } -2 < x < 8$$

২৫. বাস্তব সংখ্যায় $|2x - 3| \leq 1$ অসমতাটির সমাধান- [৩৮তম বিসিএস প্রিলি:]

(ক) $1 < x < 2$

(খ) $1 \leq x \leq 2$ অথবা $x \geq 2$

(গ) $1 \leq x \leq 2$

(ঘ) $-1 < x < 12$

উত্তর: গ

✗ সমাধানঃ সহজে করার জন্য এভাবে সব সময় চেষ্টা করুন।

$$|2x - 3| \leq 1$$

$\Rightarrow -1 \leq 2x - 3 \leq 1$ [অসমতার চিহ্ন ঠিক রেখে একপাশে ধনাত্মক এবং অন্যপাশে ঋনাত্মক সংখ্যা নিতে হয়।]

$\Rightarrow 1+3 \leq 2x-3+3 \leq 1+3$ [মাঝখানে শুধু x রাখার জন্য x এর সাথে অন্য যা কিছু আছে তা বাদ দিতে হবে]

$$\Rightarrow 2 \leq 2x \leq 4$$

$$\Rightarrow 1 \leq x \leq 2 \quad \text{Ans:}$$

◆ বিকল্প নিয়ম: $|2x - 3|$ ধনাত্মক হলে $2x - 3 \leq 1 \Rightarrow 2x \leq 1+3 \Rightarrow 2x \leq 4 \Rightarrow x \leq 2$

আবার, $|2x - 3|$ ঋনাত্মক হলে $-(2x-3) \leq 1 \Rightarrow 2x-3 \geq -1 \Rightarrow 2x \geq -1+3 \Rightarrow 2x \geq 2 \Rightarrow x \geq 1$

সুতরাং অসমতাটির সমাধান $= 1 \leq x \leq 2$

২৬. $|1 - 2x| < 1$ এর সমাধান? (৩৯ - তম বিসিএস- (বিশেষ))

ক. $-2 < x < 1$

খ. $-1 < x < 0$

গ. $0 < x < 1$

ঘ. $-1 < x < 1$

উত্তর: গ

সমাধান:

$|1 - 2x| < 1$ এখানে,

$|1 - 2x|$ ধনাত্মক হলে, $1 - 2x < 1$ বা, $-2x < 1 - 1$ বা, $-x < 0$

$\therefore x > 0$ (উভয় পক্ষকে -1 দ্বারা গুণ করে।) [ঋণাত্মক সংখ্যা দিয়ে গুণ করলে চিহ্ন পরিবর্তন হয়ে যায়।]

আবার, $|1 - 2x|$ ঋণাত্মক হলে, $-(1 - 2x) < 1$ বা, $-1 + 2x < 1$ বা, $2x < 2 \therefore x < 1$

সুতরাং নির্ণেয় সমাধান: $0 < x < 1$ (x এর দুটি মান থেকে একটি ছবছ লিখে অন্যটি বিপরীত পাশে লিখতে হবে।)

[শর্টকাটে করার নিয়মটি নিজে চেষ্টা করুন]

২৭. $|x + 1| < 3$ অসমতার সমাধান সেট হবে— [বিভিন্ন মন্ত্রণালয়ে (ব্যক্তিগত কর্মকর্তা) নিয়োগ-২০১৮]

ক. $-4 < x < 2$

খ. $-2 < x < 2$

গ. $-4 < x < 4$

ঘ. $-4 \leq x \leq 2$

উত্তর : ক

সমাধান:

$|x + 1| < 3 \Rightarrow -3 < x + 1 < 3 \Rightarrow -3 - 1 < x + 1 - 1 < 3 - 1 \Rightarrow -4 < x < 2$

২৮. The solution of the inequality $|7 - 3x| \leq 2$ is? [Combined 5 Bnaks (officer)-2018]

a. $-3 < x < \frac{5}{3}$

b. $3 > x > \frac{5}{3}$

c. $-3 < x < \frac{5}{3}$

d. $-3 < x < -\frac{5}{3}$ Ans: b

Shortcut: $|7 - 3x| \leq 2 \Rightarrow -2 < 7 - 3x < 2 \Rightarrow -2 - 7 < 7 - 3x - 7 < 2 - 7 \Rightarrow -9 < -3x < -5 \therefore 3 > x > \frac{5}{3}$

২৯. $|2x - 3| < 7$ এর সমাধান কত? [খানা সহকারী শিক্ষা অফিসার-২০১২]

ক. $-2 < x < 5$

খ. $2 < x < 5$

গ. $1 < x < 5$

ঘ. $3 < x < 5$

উত্তর ক

পরমমান চিহ্ন থেকে অসমতাগুলো প্রকাশ করুন

৩০. $|x| > 3$ Ans: $-3 > x > 3$

৩১. $|x - 3| < 8$

৩২. সমাধান: $-8 < x - 3 < 8$ বা, $-8 + 3 < x < 8 + 3$ বা, $-5 < x < 11$ (Ans.)

□ নিজে করুন।

৩৩. $|x| \leq 8$ -----

Ans. $-8 \leq x \leq 8$

৩৪. $|2x + 4| < 8$ -----

Ans. $-6 < x < 2$

৩৫. $|2x + 3| < 7$ -----

Ans. $-5 < x < 2$

৩৬. $2(x + 5) \leq 3(5 - x)$

Ans. $x \leq 1$

৩৭. $2(3 - x) + 4(x - 8) < 3x + 5$ Ans. $x > -31$

৩৮. $|x - 2| \leq 5$ হলে, x এর সর্বনিম্ন মান কত? (NBR-2015)

ক. -2

খ. -3

গ. 2

ঘ. 5

উত্তর: খ

সমাধান:

$x - 2$ ধনাত্মক হলে

$x - 2 \leq 5$ (এশে যা আছে তাই লিখতে হবে)

বা, $x \leq 5 + 2$ [সমীকরণের মত এক পাশের রাশি আরেক পাশে গেলে চিহ্ন বদলে যায়]

$x \leq 7$ ----- (অর্থাৎ x এর মান 7 এর সমান অথবা 7 এর থেকে কম।)

আবার $x - 2$ ঋনাত্মক হলে

$-|x - 2| \leq 5$ [পরম মানের বাইরে (-) লিখতে হয়।]

$x - 2 \geq -5$ [উভয় পক্ষকে -1 দ্বারা গুণ করে। আর অসমতার উভয়পক্ষে ঋনাত্মকসংখ্যা গুণ করলে চিহ্ন উল্টে যায়]

$x \geq -5 + 2$ [সমীকরণের মতই -2 অসমতার অপর পাশে আসায় +2 হয়ে গেছে, কিন্তু চিহ্ন পরিবর্তন হয় নি।]

$x \geq -3$ অর্থাৎ x এর মান -3 এর সমান অথবা বড়।

তাহলে নির্ণয় সমাধান: $7 \geq x \geq -3$ এখান থেকে বোঝাই যাচ্ছে x এর সর্বনিম্ন মান হতে পারে -3

□ নিজে করুন:

৩৯. $|x - 5| = 4$

Ans: $x = 9, 1$

৪০. $|x + 3| < 5$ [কারিগরি শিক্ষক পরীক্ষা ২০০৫] [Help: ধনাত্মক ও ঋনাত্মকধরে করুন, শেষে মিলিয়ে দিন]

ক. $(-8 < x < 2)$

খ. $(-3 < x < 3)$

গ. $(-2 < x < 3)$

ঘ. $(-5 < x < 5)$

উত্তর: ক

৪১. $|x - 5| > 4$

Ans: $x > 9$ অথবা $x < 1$. {এখানে দুটি উত্তর}

৪২. $|3x + 2| < 7$

Ans: $\{x \in \mathbb{R} : -3 < x < \frac{5}{3}\}$

৪৩. $|x - 5| < 4$

Ans: $1 < x < 9$

৪৪. $|x - 5| = 6$ সমীকরণটির সমাধান সেট হলো- [বেলাওয়া উপ-সহকারী-২০১৩]

ক. $(1, -11)$

খ. $(1, 11)$

গ. $(-1, 11)$

ঘ. $(-1, -11)$

উত্তর: গ

□(B): পরমমান তৈরী করা:

◆ পরমমান চিহ্ন ব্যবহার করে অসমতা গুলো প্রকাশ করুন।

৪৫. $-2 < x < 6$ -----

Ans. $|x - 2| < 4$

সমাধান:

এধরনের অংকে সাধারণ অসমতা থেকে পরমমান চিহ্ন আনার জন্য নিচের নিয়মটি প্রয়োগ করতে হবে।

$2 < x < 6$ (প্রথমেই দুপাশের -2 ও 6 যোগ করে 2 দিয়ে ভাগ করে গড় বের করতে হবে $-2+6 = 4+2 = 2$)

বা, $-2-2 < x-2 < 6-2$ (সব অংশের সাথে (-2) যোগ করতে হবে)

বা, $-4 < x-2 < 4$ (এভাবে দুপাশে একই মান আসলে আমরা সেখান থেকে পরমমান বানাতে পারি। এজন্যই উপরে এত নিয়ম)

$\therefore |x - 2| < 4$ (এখান থেকেই চাইলেই আবার 4 কে একবার ধনাত্মক আরেকবার ঋনাত্মকধরে সমাধান করা যায়)

□ আরেকটি দেখুন:

৪৬. পরমমান চিহ্ন ব্যবহার করে নিম্নের অসমতাটি প্রকাশ করুন : $-3 < x < 2$

a. $|x + 1| < 5$

b. $|x - 1| < 5$

c. $|2x - 1| < 5$

d. $|2x + 1| < 5$ উত্তর: d

সমাধান:

$$\begin{aligned}
 &= -3 + \frac{1}{2} < x + \frac{1}{2} < 2 + \frac{1}{2} \quad (-3+2 \text{ এর গড় } -\frac{1}{2} \text{ এখন দুপাশে } -\frac{1}{2} \text{ বিয়োগ অর্থাৎ } -(-\frac{1}{2}) = +\frac{1}{2} \text{ যোগ)} \\
 &= \frac{-6+1}{2} < \frac{2x+1}{2} < \frac{4+1}{2} \\
 &= \frac{-5}{2} < \frac{2x+1}{2} < \frac{5}{2} \quad (2 \text{ দিয়ে গুণ করে)} \\
 &= -5 < 2x+1 < 5 \\
 &= |2x+1| < 5 \quad (\text{একপাশে } -5 \text{ এবং আরেক পাশে } 5 \text{ আসায় পরমমান চিহ্ন ব্যবহার করা হয়েছে})
 \end{aligned}$$

নিজে করুন:

৪৭. $3 < x < 5$ হলে পরম মান কোনটি ?

- ক. $|x+4| < 1$ খ. $|x-3| < 1$ গ. $|x-4| < 1$ ঘ. $|x+4| < 1$ উত্তর: গ

Solution :

উভয় পাশের সংখ্যা দুটি যোগ করে ২ দিয়ে ভাগ করলে গড় বের হবে। তারপর সেই গড় দুপাশে বিয়োগ করে উপরের নিয়মে করতে হবে।

৩৯. $-8 < x < 2$ এর পরম মান কত ?

- ক. $|x-3| < 5$ খ. $|x+3| < 7$ গ. $|x+3| < 5$ ঘ. $|x-3| < 7$ উত্তর: গ

৪৮. $4 < x < 10$ -----Ans. $|x-7| < 3$

৪৯. $-5 < x < 11$ -----Ans. $|x-3| < 8$

৫০. If $4x - 7 < 2x + 13$, then which of the following must be true? [BRDB 04, Mercantile Bank 06]

- a. $x < 7$ b. $x < 13$ c. $x > 9$ d. none উত্তর: d

সমাধান:

$4x - 7 < 2x + 13$ বা, $2x < 20$ বা, $x < 10$ [কোনেক্ষেত্রে এই অপশনটি দেয়া নেই তাই এ উত্তর কোনটিই নয়।]

পদ্ধতি-০৫: দ্বিঘাত অসমতা

এগুলো অনেকের কাছে জটিল মনে হয়। তাই এখান থেকে ভালোভাবে শিখে রাখুন।

৫১. $x^2 - 5x + 6 < 0$ হলে - (৩৭-তম বিসিএস প্রিলি)

- (ক) $2 < x < 3$ (খ) $-3 < x < -2$ (গ) $x < 2$ (ঘ) $x < 3$ উত্তর: ক

সমাধান:

$$\begin{aligned}
 &x^2 - 3x - 2x + 6 < 0 \\
 &= x(x-3) - 2(x-3) < 0 \\
 &= (x-3)(x-2) < 0 \text{ -----(i)}
 \end{aligned}$$

এখানে সমীকরণটি সত্য হবে যদি $(x-3)$ ও $(x-2)$ এর একটি ধনাত্মক এবং অন্যটি ঋণাত্মক হয়।

$\Rightarrow x-3 > 0$ (ধনাত্মক) $\therefore x > 3$ এবং $x-2 < 0$ (ঋণাত্মক) $\therefore x < 2$

তাহলে এখান থেকে লেখা যায়, $2 > x > 3$ কিন্তু এটা অসম্ভব কারণ এমন কোন সংখ্যা নেই যে একই সাথে ২ এর থেকে ছোট আবার ৩ এর থেকে বড় হতে পারে।

আবার, $\Rightarrow x - 3 < 0$ (ঋণাত্মক) $\therefore x < 3$ এবং $x - 2 > 0$ (ধনাত্মক) $\therefore x > 2$

তাহলে এখন থেকে লেখা যায়, $2 < x < 3$ এটা সম্ভব। কারণ ২ এর থেকে বড় কিন্তু ৩ এর থেকে ছোট অনেক ভগ্নাংশ আছে, যেমন: ২.৫, ২.৭৫।

তাহলে দেখা যাচ্ছে শুধুমাত্র $2 < x < 3$ হলে, (i) নং সমীকরণটি সত্য বলে প্রমাণিত হয়। তাই উত্তর: $2 < x < 3$

[ভুক্তি পরীক্ষা: $2 < x < 3$ অর্থাৎ $(x=2.5)$ ধরে রাশিটি সমাধান করলে দেখা যাবে তার মান ০ এর থেকে ছোট হবে।]

[এমসিকিউ পরীক্ষায় অপশন ধরে এভাবে করা যায়।]

৫২. $2x^2 + 5x + 3 < 0$ এর সমাধান কোনটি? (৩৯ - তম বিসিএস- (বিশেষ))

ক. $-\frac{3}{2} < x < -1$

খ. $-\frac{3}{2} < x < 1$

গ. $-\frac{3}{2} \leq x \leq 1$

ঘ. $-\frac{3}{2} < x \leq 1$ উত্তর: ক

সমাধান: $2x^2 + 5x + 3 < 0$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3x + 2x + 3 < 0$$

$$\Rightarrow x(2x+3) + 1(2x+3) < 0 \Rightarrow (2x+3)(x+1) < 0$$

এখানে, দুটি রাশির গুণফল ০ এর থেকে ছোট হলে গুণফলটি অবশ্যই ঋণাত্মক সংখ্যা হবে।

এবং সেই ঋণাত্মক গুণফল আনতে হলে একটি রাশি ধনাত্মক হলে অপর রাশিটি অবশ্যই ঋণাত্মক হতে হবে।

এখন,

$2x+3 > 0$ (ধনাত্মক হলে) বা, $x+1 < 0$ (ঋণাত্মক) [০ এর থেকে বড় হলে ধনাত্মক ছোট হলে ঋণাত্মক]

বা, $2x > -3$

$\therefore x < -1$

$\therefore x > -\frac{3}{2}$

এখানে প্রাপ্ত x এর দুটি মান থেকে একসাথে লেখা যায়: $-\frac{3}{2} < x < -1$ (অর্থাৎ x এর মান $-\frac{3}{2}$ এর থেকে বড়

কিন্তু -1 এর থেকে ছোট।)

আবার,

$2x+3 < 0$ (ঋণাত্মক হলে) বা, $x+1 > 0$ (ধনাত্মক) [০ এর থেকে বড় হলে ধনাত্মক ছোট হলে ঋণাত্মক]

বা, $2x < -3$

$\therefore x > -1$

$\therefore x < -\frac{3}{2}$

এখানে প্রাপ্ত x এর দুটি মান থেকে একসাথে লেখা যায়: $-1 < x < -\frac{3}{2}$ (অর্থাৎ x এর মান -1 এর থেকে বড়

কিন্তু $-\frac{3}{2}$ এর থেকে ছোট।)

এখন সংখ্যারেখায় হিসেব করলে এমন কোন সংখ্যা নেই যা একই সাথে (-1) এর থেকে বড় হয় আবার

$-\frac{3}{2}$ বা -1.5 এর থেকে ছোট হয়। তাই $-1 < x < -\frac{3}{2}$ উত্তর টি নেয়া যাবে না।

সুতরাং $-\frac{3}{2} < x < -1$

(অর্থাৎ $-\frac{3}{2}$ বা -1.5 এর থেকে বড় কিন্তু -1 এর থেকে অনেক সংখ্যা আছে যেমন: 1.25 বা 1.2 ইত্যাদি।)

(\geq) চিহ্ন থাকলে উপরের নিয়মে হবে না বরং নিচের নিয়মে করতে হবে। (তবে এগুলো পরীক্ষায় খুব বেশি আসে না।)

৫৩. $x^2 + 2x - 8 \geq 0$ অসমতাটির সমাধান করুন

সমাধান:

$$x^2 + 2x - 8 \geq 0 \text{ (সাধারণ উৎপাদকের নিয়মে সমাধান করতে হবে)}$$

$$x^2 + 4x - 2x - 8 \geq 0$$

$$x(x + 4) - 2(x + 4) \geq 0$$

$$(x + 4)(x - 2) \geq 0$$

এখন দুটি রাশির গুণফল ধনাত্মক হলেই কেবল তা 0 এর থেকে বড় অথবা সমান হবে। তাহলে দুটি রাশির দুটিই ধনাত্মক অথবা দুটিই ঋণাত্মক হতে হবে।

$$(x + 4)(x - 2) \geq 0$$

অসমতাটি সিদ্ধ হবে যদি $x \leq -4$ অর্থাৎ x এর মান -4 এর সমান অথবা -4 এর থেকে ছোট হয়।

এবং, $x \geq 2$ হলে ও অসমতাটি সিদ্ধ হয়। অর্থাৎ অসমতাটিতে x এর মান 2 এর সমান অথবা 2 এর থেকে বড় হয়।

সুতরাং নির্ণেয় সমাধান: $(-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$ উত্তর: $(-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$

৫৪. $x^2 + x - 2 > 0$ অসমতাটির সমাধান করুন। [মহিলা ও শিশু বিষয়ক মন্ত্রণালয়ের অধীন -২০০৭]

ক. $(-2, 1)$

খ. $(-2, 1)$

গ. $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

ঘ. $(-2, \infty)$

উত্তর: গ

সমাধান:

$$x^2 + x - 2 > 0 \text{ (সাধারণ উৎপাদকের নিয়মে সমাধান করতে হবে)}$$

$$x^2 + 2x - x - 2 > 0$$

$$x(x + 2) - 1(x + 2) > 0$$

$$(x + 2)(x - 1) > 0$$

এখন দুটি রাশির গুণফল ধনাত্মক হলেই কেবল তা 0 এর থেকে বড় হবে।

তাহলে দুটি রাশির দুটিই ধনাত্মক অথবা দুটিই ঋণাত্মক হতে হবে।

$$(x + 2)(x - 1) > 0$$

অসমতাটি সিদ্ধ হবে যদি $x < -2$ হয় অর্থাৎ x এর মান -2 এর থেকে ছোট হয়।

এবং, $x > 1$ হলে ও অসমতাটি সিদ্ধ হয়। অসমতাটিতে x এর মান 1 এর থেকে বড় হবে।

সুতরাং নির্ণেয় সমাধান $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

৫৫. $x^2 - 5x + 6 > 0$ অসমতাটির সমাধান করুন। [সহকারী আবহাওয়াবিদ পরীক্ষা ২০০৪]

ক. $(2, 3)$

খ. $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

গ. $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

ঘ. $(-\infty, +\infty)$

উত্তর: খ

সমাধান: $x^2 - 3x - 2x + 6 > 0$

$$= x(x - 3) - 2(x - 3) > 0$$

$$= (x - 3)(x - 2) > 0$$

($x > 0$ হবে যদি $(x - 3)$ ও $(x - 2)$ উভয়ই ধনাত্মক বা উভয়ই ঋণাত্মক হয়। তাই সমাধান হবে $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$)

পদ্ধতি-০৬: তিন রাশির অসমতা

অসমতায় ৩ রাশি থাকলে তা থেকে দুটি আলাদা সমীকরণ তৈরী করে দুটি অংশের আলাদা সমাধান করার পর একসাথে সমন্বয় করে উত্তর বের করতে হয়।

৫৬. $-5 \leq x-4 \leq 13$ (সমাধান করুন।)

Δ এরকম প্রশ্নে সমাধান করার জন্য প্রথমে দুটি অংশে ভাগ করে নিয়ে লিখতে হবে

প্রথম অংশ

$$-5 \leq x-4$$

$$\text{or, } -5+4 \leq x-4+4 \text{ (দুপাশে 4 যোগ করে)}$$

$$\text{or, } -1 \leq x \text{ or, } x \geq -1 \text{ (x এর মান -1 থেকে বড় অথবা সমান)}$$

আবার, দ্বিতীয় অংশ:

$$x-4 \leq 13 \text{ or, } x-4+4 \leq 13+4 \text{ or, } x \leq 17$$

(x এর মান 17 এর থেকে ছোট অথবা সমান।) এখন দুটি অংশ মিলিয়ে, উত্তর বের করতে হবে,

∴ $17 \geq x \geq -1$ অথবা $-1 \leq x \leq 17$ (এভাবে, একই চিহ্ন দুবার লিখে, উপরের দুটি মান থেকে উত্তর বের করতে হয়।)

৫৭. $2x - 7 < 8 < 3x - 11$ হলে, x এর মান পূর্ণসংখ্যা নির্ণয় করুন।

সমাধান:

Ans:7

$$\text{প্রথম অংশ, } 2x - 7 < 8 = 2x < 15 = x < \frac{15}{2} = x < 7.5$$

$$\text{দ্বিতীয় অংশ, } 8 < 3x - 11 = 3x > 19 = x > \frac{19}{3} \therefore x > 6.333$$

Ans. 7

পদ্ধতি-০৭ : অসমতার বিবিধ প্রশ্ন

৫৮. মিনার ৬টি কলম আছে যার প্রতিটির মূল্য ২৫ টাকার বেশি কিন্তু ৩০ টাকার কম। ৬টি কলমের মোট মূল্য কত? / ডাক অধিদপ্তরের নিয়োগ- ২০১৮।

ক. ১৫০ টাকা

খ. ১৮০ টাকা

গ. ১৬৭ টাকা

ঘ. ১০০ টাকা

উত্তর: গ

সমাধান:

প্রতিটি কলমের মূল্য ২৫ টাকা হিসেবে ৬টি কলমের সর্বনিম্ন মূল্য হতে পারে $25 \times 6 = 150$ আবার প্রতিটি কলমের সর্বোচ্চ মূল্য ৩০ টাকা হিসেবে ৬টি কলমের সর্বোচ্চ মূল্য হতে পারে $30 \times 6 = 180$ টাকা। যাকে অসমতা দিয়ে লেখা যায় $150 < 6 \text{টি কলম} < 180$ অপশনের মধ্যে ১৫০ ও ১৮০ এর মাঝের সংখ্যা শুধু ১৬৭ ই দেয়া আছে। তাই উত্তর: ১৬৭ টাকা।

৫৯. $|x - 5| \leq 4$ হলে, নিচের যে ব্যবধি সত্যতা হলো / সিনিয়র স্টাফ নার্স-২০১৭।

ক. $x \in [1, 5]$

খ. $x \in [1, 7]$

গ. $x \in [1, 3]$

ঘ. $x \in [1, 9]$

উত্তর: ঘ

[সমাধান করার পর দুপাশে যে সংখ্যা আসবে সে দুটিই উত্তর:]

৬০. If $x \geq 8$ and $y \leq 3$, then which of the following must be true? [BREB-2019]

(a) $x+y \geq 5$

(b) $x+y \leq 11$

(c) $x-y \leq 5$

(d) $x-y \geq 5$

Ans:d

[বিস্তারিত ব্যাখ্যা পড়ে বুঝুন তারপর বুঝে গেলে খুব কম সময়ে সমাধান করা যাবে।]

Solution:

প্রশ্নগুলোতে প্রদত্ত ক্রু এবং অপশন গুলো টেস্ট করার মাধ্যমে উত্তর বের করতে হয়।

$x \geq 8$ অর্থ x এর মান ৮ থেকে শুরু করে ৮ এর উপরে যে কোন সংখ্যা যেমন: ৮, ৯, ১০, ..., ৫০, ..., ৫০০

আবার, $y \leq 3$ অর্থ y এর মান ৩ থেকে শুরু করে ৩ এর নিচে যত সংখ্যা আছে যেমন: ৩, ২, ১, ০, -১, -৫, -১০, -৫০০

এখন খেয়াল করুন প্রশ্নে বলা হয়েছে **must be true** অর্থাৎ অবশ্যই সত্য হবে। অর্থাৎ অন্য কিছু হওয়ার সুযোগ থাকলে তা নেয়া যাবে না। এখন অপশনগুলো টেস্ট করলেই উত্তর বের হয়ে যাবে।

(a) $x+y \geq 5$ [এখানে x এর মান ৪ এবং y এর মান -৩ নিলে $x+y = 4+(-3) = 1$ আবার এখানেই x এর মানটা একটু বড় নিলেই $x+y$ এর মান ৫ এর থেকে বড় ও হবে। তাহলে বলা যায় $x+y \geq 5$ কিন্তু x এর মানকে বড় না করে y এর মানকে পরিবর্তন করলে যেমন: $y = -4$ নিলে $x+y = 4+(-4) = 0$ যা ৫ এর থেকে ছোট। সুতরাং এটা সঠিক না ও হতে পারে।]

(b) $x+y \leq 11$ [উপরের মতই (b) $x+y$ এর মান ১১ এর সমান বা ১১ এর থেকে কম হতে পারে যদি ছোট সংখ্যা থেকে বড় সংখ্যা বিয়োগ করা হয়। কিন্তু প্রথমে সংখ্যাটা অনেক বড় নেয়ার পর পরের সংখ্যাটা ছোট নিলে বিয়োগ করার পরও বিয়োগফলটাকে অনেক বড় বানানো সম্ভব। যেমন: $x = 500$ এবং $y = 1$ হলে $x+y = 500+1 = 501$ যা ১১ এর থেকে অনেক বড়। তাই এটাও সঠিক নয়। ৫০০ এর জায়গায় ৫০০০ ও নেয়া যায় এই বিষয়টা মাথায় রাখতে হবে। অনেকে ছোট ছোট সংখ্যার মধ্যেই থাকার কারণে কনফিউশন দূর হতে বেশি সময় লাগে।]

উপরের অপশন দুটি থেকে এটা বোঝা গেল যে যোগ করে যোগফলটির ধনাত্মক বা ঋণাত্মক মান আনলিমিটেড হতে পারে।

একটা ট্রিক্স দেই। এরকম প্রশ্নগুলো মূলত সীমারেখার শেষ মানের উপর উত্তর বের হয়। নিচে দেখুন।

(c) $x-y \leq 5$ [$8-3 = 5$ হয় কিন্তু $৯-৩ = ৬$ হয়। অর্থাৎ বিয়োগফল ৫ থেকে শুরু করে বড় হচ্ছে। (কমতেও পারে) যেহেতু বড় হতে পারে তাই এটা সঠিক নয়]

(d) $x-y \geq 5$ [$8-3 = 5$ এখানে x এর থেকে ছোট করার আর উপায় নেই। তেমনিভাবে ৩ এর থেকে বড় করার উপায় ও নেই। কারণ এগুলো সর্বশেষ মান। এখন $9-3 = 6$ অর্থাৎ ৫ এর থেকে বড় হচ্ছে। আবার y এর মান ৩ না নিয়ে ছোট নিলে যেমন: $x-2 = 6$, আবার $x-(-৫) = ১৩$ অর্থাৎ বড় ঋণাত্মক সংখ্যা বিয়োগ করলে বিয়োগফল ছোট না হয়ে আরো বড় হয়ে যাচ্ছে। তাহলে বোঝা যাচ্ছে এখানে কোনভাবেই বিয়োগফলকে ৫ এর থেকে ছোট করা যাচ্ছে না।]

Shortcut: x এর সর্বনিম্ন মান x থেকে y এর সর্বোচ্চ মান ৩ বিয়োগ করার পরও বিয়োগফল ৫ হয়। এর বাইরে অন্য যে কোন মান নিয়ে হিসেব করলে তা ৫ এর থেকে বড় হবে কিন্তু কোনভাবেই কম হবে না। তাই উত্তর: d. $x-y \geq 5$

□নিজে করুন :

৬১. If $3 - 2x \leq 7$, then- [Bangladesh Bank 06]

a. $x \leq 2$

b. $x \geq 2$

c. $x \leq -2$

d. $x \geq -2$

উত্তর: d

৬২. If $x + y > 5$ and $x - y > 3$, then which of the following gives all & only possible values of x ? [IBA Jul 93]

a. $x < 3$

b. $x > 3$

c. $x > 4$

d. $x < 5$

উত্তর: c

৬৩. If $x < 10$ and $2x - 3y = 8$, which of the following must be true? (First Security IB Ltd. PO 2013)

a. $y < 4$

b. $y < 6$

c. $y > 5$

d. none of these উত্তর: a

Solution:

যদি $x = 10$ হয়; তাহলে, $2x - 3y = 8 \Rightarrow 2 \cdot 10 - 3y = 8 \Rightarrow -3y = -12 \therefore y = 4$

কিন্তু বলা হয়েছে যে, $x < 10$; $\therefore y$ is also < 4

লিখিত প্রশ্ন

১. $\frac{1}{|x-1|} < 2$ অসমতাটির সমাধান করুন।

ক. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ খ. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ গ. $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ ঘ. $(-\infty, 2) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$ উত্তর: ক

সমাধান:

$$|x-1| > \frac{1}{2} \quad [\text{বিপরীত করণ করে}]$$

$$\text{বা, } x-1 > \frac{1}{2} \quad (x-1 \text{ কে ধনাত্মক ধরে) বা, } x-1+1 > \frac{1}{2}+1$$

$$\text{বা, } x > \frac{3}{2} \quad \text{সুতরাং লিখা যায় } \frac{3}{2} < x < +\infty \quad (\text{অর্থাৎ } x \text{ এর মান } \frac{3}{2} \text{ এর থেকে বড় এবং তা } +\text{অনির্ণেয়ক})$$

$$\text{আবার, } -(x-1) > \frac{1}{2} \quad (x-1 \text{ কে ঋণাত্মক ধরে})$$

$$\text{বা, } (x-1) < -\frac{1}{2} \quad (-1 \text{ দ্বারা গুণ করে})$$

$$\text{বা, } x < -\frac{1}{2}+1$$

$$\text{বা, } x < \frac{1}{2} \quad \therefore -\infty < x < \frac{1}{2} \quad (x \text{ এর মান } \frac{1}{2} \text{ এর ছোট এবং তা } -\text{অনির্ণেয়ক}) \quad \text{Ans. } \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$$

২. অসমতাটির সমাধান সেট নির্ণয় করুন এবং সমাধান সেটটিকে সংখ্যারেখায় দেখান। (৩৫তম বিসিএস(লিখিত))

$$\frac{3}{|2x-1|} \geq 4$$

সমাধান: $(2x-1)$ কে ধনাত্মক ধরে $\frac{3}{2x-1} \geq 4$ বা, $\frac{2x-1}{3} \leq \frac{1}{4}$ [বিপরীতকরণ করে, (চিহ্ন পরিবর্তন হয়)]

$$\text{বা, } 2x-1 \leq \frac{3}{4} \quad (\text{দুপাশে } 3 \text{ দিয়ে গুণ করে) বা, } 2x \leq \frac{3}{4}+1 \quad (\text{দুপাশে } 1 \text{ যোগ করে})$$

$$\text{বা, } 2x \leq \frac{7}{4} \quad \text{বা, } x \leq \frac{7}{8} \quad (\text{দুপাশে } 2 \text{ দিয়ে ভাগ করে}) \quad [\text{এটা সম্পূর্ণ উত্তরের অর্ধেক অংশ}]$$

$(2x-1)$ কে ঋণাত্মক ধরে

$$\frac{3}{-(2x-1)} \geq 4 \quad \text{বা, } \frac{-(2x-1)}{3} \leq \frac{1}{4} \quad (\text{বিপরীতকরণ করে) বা, } (2x-1) \geq -\frac{3}{4} \quad (\text{দুপাশে } -3 \text{ দিয়ে গুণ করে, চিহ্ন ফের})$$

$$\text{বা, } 2x \geq -\frac{3}{4}+1 \quad (\text{দুপাশে } 1 \text{ যোগ করে) বা, } 2x \geq \frac{1}{4} \quad \text{বা, } x \geq \frac{1}{8} \quad (\text{দুপাশে } 2 \text{ দিয়ে ভাগ করে})$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান: } \frac{1}{8} \leq x \leq \frac{7}{8}$$