

সমান্তর ও গুণোত্তর ধারা

এই অধ্যায়ে আমরা শিখবো

পদ্ধতি-০১:	সমান্তর ধারা
	ক. পদক্রম বের করা
	খ. পদের মান বের করা
	গ. পদসংখ্যা বের করা
পদ্ধতি-০২:	বর্গ ও ঘন আকারে সংখ্যার সমষ্টি
পদ্ধতি-০৩:	সমষ্টি বের করা
পদ্ধতি-০৪:	গুণোত্তর ধারা (পদক্রম ও সমষ্টি)
	লিখিত প্রশ্ন ও সমাধান

প্রাথমিক আলোচনা:

ধারা একটি সিস্টেম যেখানে পরপর কিছু সংখ্যা থাকে যারা পরস্পর সুবিন্যস্ত এবং নির্দিষ্ট নিয়ম অনুসারে সাজানো।

ধারা সাধারণত দুই প্রকার:

(ক) সমান্তর ধারা (The Arithmetic Series)

(খ) গুণোত্তর ধারা (Geometric Series)

ধারার সাথে সম্পর্কিত কিছু বিষয়:

Δ প্রথম পদ: যে কোন ধারার শুরু হয় যে পদের দ্বারা। যাকে প্রকাশ করা হয় a দ্বারা।

Δ সাধারণ অন্তর: একপদের সাথে তার পরবর্তী পদের পার্থক্যকে সাধারণ অন্তর বলা হয়।

সাধারণ অন্তর প্রকাশ করা হয় d দ্বারা। $d = ২য় পদ - ১ম পদ$

Δ শেষপদ: কোন পদের শেষ পদ জানা না থাকলে তা r তম পদ বা n তম পদ হিসেবে ধরা হয়। তাই n হলো শেষপদ।

Δ পদসংখ্যা: একটি ধারায় মোট কতটি পদ আছে তাদেরকে পদসংখ্যা বলা হয়। মোট পদসংখ্যা অনির্দিষ্ট হলে পদসংখ্যা n ধরা হয়

বিভিন্ন ধারার পরিচিতি:

(ক) সাধারণ ধারা: একটি নির্দিষ্ট ব্যবধানে বৃদ্ধি বা হ্রাসকৃত পরপর কিছু সংখ্যাকে সাধারণ ধারা বলে।

(খ) সমান্তর ধারা: কোনো ধারার পরপর দুইটি পদের মানের পার্থক্য সমান হলে তাকে সমান্তর ধারা বলে। যেমন:

$$1+2+3+4+.100$$

(গ) গুণোত্তর ধারা: একটি ধারাকে প্রতিবার নির্দিষ্ট একটি সংখ্যা দিয়ে গুণ অথবা ভাগ করে নতুন রাশি তৈরী করলে তাকে

গুণোত্তর ধারা বলা হয়। যেমন: $2+4+8+16+32+.+256$

পদ্ধতি-০১: সমান্তর ধারা

সমান্তর ধারা: যে ধারায় প্রতিটি পদে একই পরিমাণে বৃদ্ধি বা হ্রাস ঘটে অর্থাৎ ক্রমিক দুইটি পদের অন্তর একই হয়, তাকে সমান্তর ধারা বলে। অর্থাৎ যে ধারার কোন পদকে তার পরবর্তী পদ থেকে বিয়োগ করলে প্রতিফলকে বিয়োগফল একই হয় তাকে

সমান্তর ধারা বলে। যেমন: $2+4+6+8+10+.+20$ এখানে প্রতি পদের বৃদ্ধির হার ২ করে।

সমান্তর ধারার গুরুত্বপূর্ণ সূত্র ও তার প্রয়োগ:

কোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ ও শেষ পদ দেয়া থাকলে

$$\text{সমষ্টি} = \frac{\text{পদসংখ্যা} (\text{শেষপদ} + \text{প্রথম পদ})}{2} \quad \text{এবং} \quad \text{পদসংখ্যা} = \frac{\text{শেষপদ} - \text{প্রথম পদ}}{\text{সাধারণ অন্তর}} + 1$$

$$\text{একটি সমান্তর ধারার প্রথম পদ } a \text{ এবং সাধারণ অন্তর } d \text{ হলে } r \text{ তম পদ} = a + (r-1)d$$

$$\text{প্রথম পদ } a \text{ এবং সাধারণ অন্তর } d \text{ বিশিষ্ট সমান্তর ধারার } n \text{ সংখ্যক পদের সমষ্টি } s = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\}$$

□ সমান্তর ধারার উপর বিভিন্ন প্রশ্ন:

(১.ক) পদক্রমের মান বের করা :

যে কোন একটি ধারা দেয়া থাকবে, সেই ধারার যে কোন একটি পদের মান কত তা বের করতে বলা হবে।

ধারার পদক্রমের মান বের করার ক্ষেত্রে সূত্র হলো:

$$r \text{ তম পদ} = a + (r-1)d$$

অর্থাৎ ধারার ৫ম, ৮ম বা ১০ম এভাবে যে কোন পদের মান বের করতে এই সূত্রটি প্রয়োগ করতে হবে।

নিচের প্রশ্নগুলো দেখুন।

1. ১, ৪, ৭ ধারার ২৯ তম পদটি কত? (যুব উন্নয়ন অধিদপ্তর (ক্যাশিয়ার)-২০১৮)

ক. ৭৯

খ. ৮২

গ. ৮৫

ঘ. ৮৮

উত্তর: গ

সমাধান:

আমরা জানি,

$$\text{একটি সমান্তর ধারার } r \text{ তম পদ} = a + (r-1)d$$

এখানে, প্রথম পদ $a = 1$, সাধারণ অন্তর $d = 4-1 = 3$ এবং r তম পদ $= 29$

$$\text{সুতরাং, } a + (r-1)d = 1 + (29-1) \times 3 = 1 + 28 \times 3 = 1 + 84 = 85$$

□ সূত্র মনে না থাকলে?

সূত্র ভুলে গেলেও Practically এভাবে ভাবলে সূত্র লাগবে না :

১ম পদ থেকে ২৯ তম পদ পর্যন্ত যেতে (১ থেকে ২৯ টি গাছের মাঝে) মোট $29-1 = 28$ টি গ্যাপ আছে। প্রতিটি গ্যাপের মান ৩

(সাধারণ অন্তর) হলে ২৮ টি গ্যাপের মান হবে $28 \times 3 = 84$ । এখন শুরু ১ এর পর ৮৪ যেতে হলে ২৯ তম পদটি হবে $1 + 84 = 85$

2. একটি সমান্তর অনুক্রমে সাধারণ অন্তর 10 এবং 6-তম পদটি 52 হলে 15-তম পদটি- (৩৭-তম বিসিএস প্রিলি)

(ক) 140

(খ) 142

(গ) 148

(ঘ) 150

উত্তর: খ

□ লিখিত সমাধান:

আমরা জানি r তম পদ $a + (r-1)d$

$$\text{প্রশ্নমতে ৬ষ্ঠ পদ} = a + (6-1)d = 52$$

$$\Rightarrow a + 5 \times 10 = 52$$

$$\Rightarrow \therefore a = 2$$

অর্থাৎ ধারাটির প্রথম পদ $a = 2$

এখন ১৫ তম পদের মান বের করার জন্য একই সূত্র $a + (r-1)d = 2 + (15-1)10 = 2 + 140 = 142$ Ans:

শ্রুত মুখে মুখে সমাধান:

সাধারণ অন্তর ১০ এবং ৬ষ্ঠ পদ ৫২ তাহলে ১৫ তম পদ হবে ৬ষ্ঠ পদের পর আরো $(15-6) = 9$ টি পদের যোগফল। প্রতিটি পদের মধ্যকার পার্থক্য ১০ হওয়ায় ৯ টি পদের পার্থক্য হবে $9 \times 10 = 90$ । তাহলে ১৫ তম পদটি হবে $52 + 90 = 142$ ।

(১.খ) পদক্রম বের করা :

পদক্রম বের করা অর্থ হলো এর আগের নিয়মটিতে যেখানে ৮ম, ১০ম পদের মান কত তা বের করতে বলা হয়েছে আর এখানে পদটি কত তম পদ তা দেয়া থাকবে না কিন্তু তার মান দেয়া থাকবে। এখন ঐ পদটির পদক্রম কত তা বের করতে হবে। অর্থাৎ আগের নিয়মটির ঠিক উল্টো নিয়ম।

সূত্র : আমরা জানি r তম পদ $a + (r-1)d$ অর্থাৎ সূত্র একটাই।

পূর্বের নিয়মটিতে r এর মান কত তা জানা ছিল। (৫ম, ৮ম, ১০ম এভাবে) কিন্তু এবার r এর মান দেয়া থাকবে না। তবে r এর মান বসানোর পর উত্তর কত হবে তা দেয়া থাকবে। নিচের প্রশ্নগুলোর সমাধান দেখুন।

3. $5 + 8 + 11 + 14 + \dots$ এ ধারাটির কত তম পদ 320? (বহুলাদেশ বেঙ্গলরে (সহ: টেশন মাস্টার)-২০১৮)

সমাধান:

উত্তর: ১০৬ তম পদ।

আমরা জানি কোন সমান্তর ধারার r তম পদ $= a+(r-1)d$

এদত সমান্তর ধারাটিতে প্রথম পদ $a = 5$ এবং সাধারণ অন্তর $d = 8-5 = 3$

r তম পদ 320 হলে r এর মান কত তা বের করতে হবে,

প্রসূত:

$$a+(r-1)d = 320 \text{ (সূত্রটি প্রয়োগ করলে যে মান আসবে তা ৩২০ হবে)}$$

$$\Rightarrow 5+(r-1)3 = 320$$

$$\Rightarrow (r-1)3 = 320-5$$

$$\Rightarrow (r-1) = \frac{315}{3}$$

$$\therefore r = 105+1 = 106$$

☞ মুখে মুখে ২০ সেকেন্ডে পারার জন্য:

প্রথমপদ থেকে শেষ পদের ব্যবধান: $৩২০-৫ = ৩১৫$ এর মাঝে ৩ করে গ্যাপ রাখলে মোট গ্যাপ হবে $৩১৫ \div ৩ = ১০৫$ টি। ১০৫ টি গ্যাপ হলে শুরু পদটি সহ মোট পদ হবে $১০৫+১ = ১০৬$ টি।

4. $5 + 8 + 11 + 14 + \dots$ ধারাটির কোন পদ = 302? (বাণিজ্য ও সমাজকল্যাণ মন্ত্র: নিয়োগ পরীক্ষা)

সমাধান:

ধারাটির ১ম পদ, $a = 5$, সাধারণ অন্তর, $d = 8 - 5 = 3$,

মান করি, r -তম পদ = 302

Ans: 100-তম পদ

$$\therefore a + (r-1)d = 302$$

$$\Rightarrow 5 + (r-1) \cdot 3 = 302$$

$$\Rightarrow 5 + 3r - 3 = 302$$

$$\Rightarrow 3r = 302 - 5 + 3$$

$$\Rightarrow r = \frac{300}{3}$$

$$\therefore r = 100 \therefore 302 = 100\text{-তম পদ}$$

☞ মুখে মুখে ২০ সেকেন্ডে পারার জন্য:

প্রথমপদ থেকে শেষ পদের ব্যবধান: $৩০২-৫ = ২৯৭$ এর মাঝে ৩ করে গ্যাপ রাখলে মোট গ্যাপ হবে $২৯৭ \div ৩ = ৯৯$ টি। ৯৯টি গ্যাপ হলে শুরু পদটি সহ মোট পদ হবে $৯৯+১ = ১০০$ টি। বিষয়টিকে গাছ লাগানোর মত করে তুলনা করতে পারেন। ১টি গাছ = ১টি পদ।

□ নিজে করুন:

5. 1,3,5 ----- কোন পদ 383 হবে? (প্রাইমারী শিক্ষক নিয়োগ-১২)

a.192

b.132

c.124

[Help: হুবহু উপরের নিয়মে]

d.142

উত্তর:- a

6. 2,4,6,..... কোন পদ 94 হবে?

উত্তর:- 47

7. $4+7+10+13+\dots$ ধারাটির কোন পদ 301? (৯ম-১০ম শ্রেণীর অনু. ১৩.১)

উত্তর: ১০০তম

(১.গ) পদসংখ্যা বের করা:

এখন পদসংখ্যার সূত্রটি $\frac{\text{শেষপদ} - \text{প্রথম পদ}}{\text{সাধারণ অন্তর}} + ১$ (এর ব্যাখ্যা দেখুন)

ধরুন: ১০ মিটার পর পর ১টি করে গাছ লাগানো হবে। তাহলে ১০০ মিটার জায়গায় মোট ১০টি গাছ নয় বরং $১০+১ = ১১$ টি গাছ লাগাতে হবে। (শুরু গাছ সহ ধরলে ১টি গাছ অতিরিক্ত হয়।)

উদাহরণ: ১০০ মিটার থেকে শুরু করে ২০০ মিটার পর্যন্ত গাছ লাগাতে হবে, ১০০, ১১০, ১২০ ২০০ মিটার এভাবে।

তাহলে মোট গাছের সংখ্যা কতটি হবে? ১০টি নাকি ১১টি? এখানে,

গাছ লাগানো হবে, ১০০ (১০০মিটারে ই ১ম গাছ লাগিয়ে শুরু।) তারপর ১১০, ১২০, ১৩০, ১৪০, ১৫০, ১৬০, ১৭০, ১৮০, ১৯০

ও ২০০ মিটারে। = ১১টি। এই বিষয়টিকেই শর্টকাটে বের করার জন্য সূত্রটি প্রয়োগ করুন:

পদসংখ্যা = $\frac{\text{শেষপদ} - \text{প্রথম পদ}}{\text{সাধারণ অন্তর}} + 1$ [এখানে উপরের রাশিগুলোর মাঝের পার্থক্য বের করতে হবে, $200 - 100 = 100$ মিটার জায়গাতেই গাছ লাগাতে হবে। এখন সাধারণ অন্তর বা ১টি গাছ থেকে আরেকটি গাছের দূরত্ব ১০ মিটার তাহলে মোট গাছ লাগানো যাবে, $\frac{100}{10} = 10$ টি? না, বরং উত্তর হবে $10 +$ প্রথমে ১টি = ১১টি।। আর এজন্যই সূত্রটির সাপে সবসময় শেষে ১ যোগ হয়।]

এভাবে **Practically** ভাবতে পারলে সূত্রগুলো সবসময় মনে থাকবে।

8. 20, 25, 30 ... 140 ধারাটিতে মোট কতগুলো পদ আছে? [জনসংখ্যা প্রকৌশল অধি দপ্তর এস্টিমেটর নিয়োগ পরীক্ষা-২০১৮]
ক. 25টি খ. 24 টি গ. 23 টি ঘ. 22টি উত্তর : ক

সমাধান:

$$\text{এখানে, পদসংখ্যা} = \frac{\text{শেষপদ} - \text{প্রথম পদ}}{\text{সাধারণ অন্তর}} + 1 = \frac{140 - 20}{5} + 1 = \frac{120}{5} + 1 = 24 + 1 = 25$$

সম্মুখে মুখে:

১৪০ ও ২০ এর মাঝে পার্থক্য ১২০। রাশি গুলোর পার্থক্য ৫ হওয়ায় মোট পদ $120 \div 5 = 24 +$ শুরু ১টি = ২৫টি।

9. ১২ ও ৯৬ এর মধ্যে (এই দুটি সংখ্যা সহ) কয়টি সংখ্যা ৪ দ্বারা বিভাজ্য?
ক. ১১ খ. ২২ গ. ২৪ ঘ. ২৫ উত্তর:- খ

সমাধান:

এখানে ১ম পদ = ১২ শেষ পদ = ৯৬

সাধারণ অন্তর = ৪ [কারণ ৪ দ্বারা বিভাজ্য মানে ৪ ঘর পর পর সংখ্যাটি বিভাজ্য]

অর্থাৎ ধারাটি দেখতে এরকম হবে, ১২, ১৬, ২০, ২৪, ৯৬

$$\therefore \text{পদসংখ্যা} = \frac{\text{শেষ পদ} - \text{১ম পদ}}{\text{সা. অন্তর}} + 1 = \frac{96 - 12}{4} + 1 = \frac{84}{4} + 1 = 21 + 1 = 22 \text{ টি}$$

[দুটি সংখ্যা সহ বলায় ১২ ও ৯৬ কে সহ নেয়া হয়েছে। বাদ দিয়ে বললে $22 - 2 = 20$ টি হতো।]

সম্মুখে মুখে: ১ থেকে ১০০ পর্যন্ত মোট $100 \div 4 = 25$ টি সংখ্যা আছে যেগুলো ৪ দ্বারা বিভাজ্য। এখন এর মধ্যে ৪, ৮ এবং ১০০ এই ৩টি সংখ্যা বাদ দিলে মোট বিভাজ্য সংখ্যা = $25 - 3 = 22$ টি।

(১.ঘ) সমষ্টি বের করা:

সমান্তর ধারার প্রশ্নগুলোতে সমষ্টি দুভাবে বের করা যায়।

(i) শেষপদ দেয়া থাকলে সমষ্টি বের করা:

অর্থাৎ প্রশ্নের মধ্যেই প্রথম পদ ও শেষপদের উল্লেখ থাকবে:

সবাসরি শুধু প্রশ্ন আর উত্তর না পড়ে ১০মিনিট সময় ধরে এই পোজের গল্পে মত কথাগুলো পড়লে আশা করি সূত্র নিয়ে কনফিউশন তৈরী হবে না আবার কোন সূত্রই সহজে ভুলে যাবেন না।

শেষ পদ দেয়া থাকলে সূত্র হলো: $\text{সমষ্টি} = \text{পদসংখ্যা} \times \frac{\text{শেষপদ} + \text{প্রথম পদ}}{2}$ এখন এই সূত্রে থাকা পদ সংখ্যা বা মোট পদ

কয়টি তা কিভাবে পাবেন? পদসংখ্যা বের করার সূত্র হচ্ছে: $\text{পদসংখ্যা} = \frac{\text{শেষপদ} - \text{প্রথম পদ}}{\text{সাধারণ অন্তর}} + 1$

উপরের এই সূত্র দুটি যাদের এলোমেলো লেগে যেতে পারে তারা এভাবে **Practically** ভাবতে পারেন।

আমরা জানি কয়েকটি রাশির সমষ্টি = রাশিগুলোর গড় \times মোট রাশির সংখ্যা। এই সহজ টেকনিকটি দিয়েই সমষ্টির সূত্রটি খুব সহজে মনে রাখা যায়।

যেমন: একটি সিরিজ: ৪, ৬, ৮, ১০, ১২ সিরিজটির যোগফল সহজে বের করার নিয়ম হলো এখানে মোট রাশি বা পদসংখ্যা আছে ৫টি। এবং রাশিগুলোর গড় হচ্ছে $গড় = \frac{শেষপদ + প্রথম পদ}{২} = \frac{১২ + ৪}{২} = \frac{১৬}{২} = ৮$ তাহলে

সবগুলোর সমষ্টি হবে $৫ \times ৮ = ৪০$ । (এখানে এই গড় বের করার সূত্রটিই সমষ্টি বের করার সূত্রের শেষাংশ যেখানে শেষ পদ ও প্রথম পদ যোগ করে নিচে দুটি রাশির জন্য ২ দিয়ে ভাগ করে গড় বের করতে হয়।)

তাহলে বার বার এভাবে ভাবলে সূত্রটি সহজে ভুলে যাবেন না।

শেষপদ যুক্ত নিচের প্রশ্নগুলো ও তার সমাধান দেখুন: যে কোন পরীক্ষায় এই প্রশ্নগুলোই সবথেকে বেশি আসে:

10. $1+2+3+4+\dots+99 =$ কত? (২৫তম বিসিএস) + [৯ম-১০ম শ্রেণীর (অনু. ১৩.১) উদা:৪]
 ক. ৪৯৫০ খ. ৬০৫২ গ. ২৫৪৭ ঘ. ২২৮৮ উত্তর:- ক

সমাধান:

এখানে সূত্র প্রয়োগ করে পদ সংখ্যা না এনে সরাসরি পদসংখ্যা ৯৯টি [কারণ ১ থেকে ৯৯ পর্যন্ত মোট পদ ৯৯টি।]

এখন সমষ্টি বের করার সূত্রানুযায়ী $\frac{99(99+1)}{2} = \frac{99 \times 100}{2} = 99 \times 50 = 4950$

ক মুখে মুখে: গড় = $(৯৯+১) \div ২ = ৫০$ এবং রাশি = ৯৯টি তাহলে সমষ্টি = $৫০ \times ৯৯ = ৪৯৫০$ ।

11. 1 থেকে 100 পর্যন্ত সংখ্যাগুলোর যোগফল কত? (১৮তম বিসিএস)
 a. 5050 b. 4050 c. 3040 d. 5062 উত্তর:- a
 [Help: 1-99 এর সমষ্টির সাথে ১০০ যোগ = $৪৯৫০+১০০ = ৫০৫০$]

12. $১+৫+৯+ \dots + ৮১ = ?$ (৩৬তম বিসিএস)
 ক. ৯৬১ খ. ৮৬১ গ. ৭৬১ ঘ. ৬৬১ উত্তর: খ

সমাধান: এখানে প্রথম পদ $a = ১$ সাধারণ অন্তর $d = ৫-১ = ৪$ এবং শেষ পদ = ৮১

\therefore পদসংখ্যা = $\frac{শেষপদ - প্রথম পদ}{সাধারণ অন্তর} + ১ = \frac{৮১-১}{৪} + ১ = \frac{৮০}{৪} + ১ = ২০+১ = ২১$ (ধারাটিতে মোট ২১টি পদ আছে।)

সুতরাং সমষ্টি = $\frac{পদসংখ্যা (শেষপদ + প্রথম পদ)}{২} = \frac{২১(৮১+১)}{২} = \frac{২১ \times ৮২}{২} = ২১ \times ৪১ = ৮৬১$ Ans: ৮৬১

ক মুখে মুখে করার জন্য: সমষ্টি = গড় $(৪১) \times$ পদসংখ্যা $(২১) = ৮৬১$

13. $1+2+3+\dots+50 = ?$ c. 7512 d. 5062 উত্তর:- b
 a. 3645 b. 1275

14. $3+6+9+\dots+36 = ?$ (প্রতিরক্ষা মন্ত্র: অধীন এডমিনিস্ট্রেশন অফি: ও পার্সোনাল অফি: ০৬)
 a. 234 b. 432 c. 324 d. 342 উত্তর:- a

সমাধান: এখানে, প্রথম পদ, $a = ৩$, সাধারণ অন্তর, $d = (৬-৩) = ৩$, শেষ পদ = ৩৬

\therefore পদসংখ্যা, $n = \frac{36-3}{3} + 1$

$= 11 + 1 = 12$ / পদসংখ্যা বের করা হয়েছে সমষ্টি বের করার জন্য, এরপর সমষ্টি বের করার সূত্র প্রয়োগ করতে হবে।

সমষ্টি = $12 \times \frac{36+3}{2} = 6 \times 39 = 234$

Ans: 234

15. $1+3+5+7+9+\dots\dots\dots+51?$ (পররাষ্ট্র মন্ত্রণালয়ে ব্যক্তিগত কর্মকর্তা-০৬)

a.234

b.432

c.324

d.676

উত্তর:- d

সমাধান:

ধারাটির ১ম পদ, $a = 1$, সাধারণ অন্তর, $d = 3 - 1 = 2$ এবং শেষ পদ $= 51$

পদ সংখ্যা $n = \frac{51-1}{2} + 1 = 25 + 1 = 26$ (অংক করার সময় সরাসরি এখান থেকে শুরু করবেন)

সমষ্টি, $\frac{26(51+1)}{2} = 676$

যাটা কলম ছাড়াই মুখে মুখে করার জন্য এভাবে ভাবা যায়, গড় \times রাশির সংখ্যা ।

এখানে গড় হবে $\frac{51+1}{2} = \frac{52}{2} = 26$ আবার পদসংখ্যা $= \frac{51-1}{2} + 1 = 25 + 1 = 26$ টি ।

তাহলে সমষ্টি হবে $26 \times 26 = 676$

16. $1 + 3 + 5 + \dots\dots\dots + (2x - 1)$ কত? (৩৬তম বিসিএস)

a. $x(x - 1)$

b. $\frac{x(x+1)}{2}$

c. $x(x + 1)$

d. x^2

Ans: d

সমাধান:

এখানে প্রথম পদ $a = 1$ সাধারণ অন্তর $d = 3-1 = 2$ এবং শেষ পদ $= (2x - 1)$

\therefore পদসংখ্যা $= \frac{\text{শেষপদ} - \text{প্রথম পদ}}{\text{সাধারণ অন্তর}} + 1 = \frac{2x - 1 - 1}{2} + 1 = \frac{2x - 2}{2} + 1 = \frac{2(x - 1)}{2} + 1 = x - 1 + 1 = x$

সুতরাং সমষ্টি $= \frac{\text{পদসংখ্যা} (\text{শেষপদ} + \text{প্রথম পদ})}{2} = \frac{x(2x - 1 + 1)}{2} = \frac{2x^2}{2} = x^2$

আবার মুখে মুখে করার জন্য গড় এবং পদসংখ্যা বের করে গুণ করার নিয়মেও করতে পারেন ।

□ নিজে করুন:

17. $1 + 8 + 9 + 10 + \dots\dots\dots + 93$ সমান্তর ধারাটির যোগফল কত হবে? (একটি বাড়ী একটি খামার -(জেলা সমন্বয়কারী)-১৭)

ক. ৯২৫

খ. ১১২৫

গ. ১০২৫

ঘ. ১২২৫

উত্তর:- ক

[Help: গড় $= 93+1=94 \div 2 = 47$ আবার পদসংখ্যা $(93-1) = 92 \div 8 = 11.5 = 12$ টি । সমষ্টি $= 47 \times 12 = 564$]

18. $1+3+5+\dots\dots\dots+19$ সমান কত হবে? (সমাজসেবা অধিদপ্তর-০৫)

a.102

b.103

c.89

d.100

উত্তর:- d

19. $8,9,10,\dots\dots\dots 100$ - পর্যন্ত সংখ্যাগুলোর যোগফল কত? (প্রবাসী কল্যাণ মন্ত্রণালয়ের সহ:পরি:২০০৭)

a.5022

b.2432

c.2324

d.2342

উত্তর:- a

[Help: গড় $(100+8) \div 2 = 54$ আর রাশি $1-100$ পর্যন্ত ১০০টি থেকে $1-9 = 9$ টি কম অর্থাৎ ৯১ । সমষ্টি $= 54 \times 91 = 4914$]

20. ৫ থেকে ৪৫ পর্যন্ত সংখ্যাগুলোর যোগফল কত? (সরকারী মাধ্যমিক বিদ্যালয় সহ:শিক্ষক-০৬)

a.1024

b.1028

c.3255

d.1025

উত্তর:- d

21. $99+98+97+\dots\dots\dots+40$ ধারাটির সমষ্টি কত? (সমাজসেবা অধিদপ্তর -০৫)

a.1234

b.4432

c.4170

d.2546

উত্তর:- c

[Help: এই অংকটি $80 + \dots\dots\dots + 99 + 98 + 97$ এভাবে ঘুরিয়ে নিয়ে উপরের নিয়মে করা যায়, উত্তর একই হবে ।

22. $1+3+5+\dots+31 =$ কত? (২৪ তম বিসিএস)
 a. 234 b. 256

c. 324

d. 342

উত্তর: b

Solution: পদসংখ্যা $= \frac{31-1}{2} + 1 = \frac{30}{2} + 1 = 16$ সুতরাং সমষ্টি $= 16 \times \frac{31+1}{2} = 256$

Confusion Clear: এই প্রশ্নের পদসংখ্যার নিচের ২ আর এই দুই ২ এক নয়। মনে রাখবেন: সমষ্টির নিচের ২ সবসময়ই ২ ই থাকবে। (কারণ দুটি রাশির শব্দের জন্য ২ দিয়ে ভাগ) কিন্তু পদসংখ্যার ক্ষেত্রে রাশিগুলোর মাঝে সাধারণ অন্তর যখন যা হবে তাই লিখতে হবে।

(ii) শেষপদ দেয়া না থাকলে সমষ্টি বের করা:

প্রশ্নের মধ্যে শেষ পদের উল্লেখ না থেকে যদি পদের সংখ্যা কতটি তার উল্লেখ থাকে। তাহলে আগের সূত্রগুলো ব্যবহার করা যাবে না।

শেষপদ না থাকলে সমষ্টি বের করার সূত্র $S = \frac{n}{2} (2a + (n-1)d)$

23. $7 + 12 + 17 + \dots$ ধারাটির 30 টি পদের সমষ্টি কত? (৯ম-১০ম সেশীর (অনু. ১৩.১) উদাহরণ)

সমাধান:

ধারাটির প্রথম পদ $a = 7$, সাধারণ অন্তর $d = 12 - 7 = 5$ এবং পদ সংখ্যা $n = 30$

\therefore 30টি পদের সমষ্টি $= \frac{30}{2} \{2 \times 7 + (30-1)5\}$

$= 15(14 + 29 \times 5) = 15(14 + 145) = 15 \times 159 = 2385$

24. $11+18+25+32+\dots$ ধারাটির 29 তম পদের সমষ্টি কত? (সর্বশেষ বিসিএস সহকারী শিক্ষক - ২০১২)

ক) 2131

খ) 3131

গ) 3161

ঘ) 3260

উত্তর: গ

সমাধান: যোগফল $S = \frac{n}{2} \{2a+(n-1)d\} = \frac{29}{2} \{2 \times 11 + (29-1) \times 7\} = \frac{29}{2} \{22 + 28 \times 7\} = 3161$ Ans:

25. $1+2+3+\dots+48+49+50+49+48+\dots+3+2+1 =$ কত? (সর্বশেষ বিসিএস সহকারী শিক্ষক - ২০১৩)

ক) ১২৫০

খ) ২৫০০

গ) ২৫২৫

ঘ) ৫০০০

উত্তর: খ

সমাধান:

এখানে দুটি অংশে ভাগ করলে পাওয়া যাবে,

প্রথম অংশ $= 1+2+3+\dots+48+49+50$ [এখানে মোট পদ $= 50$ টি]

দ্বিতীয় অংশ $= 1+2+3+\dots+48+49$ [এখানে মোট পদ $= 49$ টি]

প্রথম অংশের যোগফল $= \frac{n}{2} \{2a+(n-1)d\} = \frac{50}{2} \{2 \times 1 + (50-1)\} = 25(2+49) = 25 \times 51 = 1275$

দ্বিতীয় অংশের যোগফল $= \frac{n}{2} \{2a+(n-1)d\} = \frac{49}{2} \{2 \times 1 + (49-1)\} = \frac{49}{2} \{2+49-1\} = \frac{49}{2} \times 50 = 1225$

সবগুলোর যোগফল $= 1275 + 1225 = 2500$

26. ৫, ৯, ১৩, ১৭ - - - সিরিজটির প্রথম ১৭টি সংখ্যার যোগফল কত? [Sonali Bank -(SO)-2018]

a. 529

b. 462

c. 629

d. 523

Ans: c

Solution:

এখানে প্রথম পদ $a = 5$, সাধারণ অন্তর $d = 9-5 = 4$ এবং পদসংখ্যা $n = 17$

সুতরাং সমষ্টি $= \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\} = \frac{17}{2} \{2 \times 5 + (17-1)4\} = \frac{17}{2} (10 + 64) = 17 \times 37 = 629$

□ ছবছ একই নিয়মে নিজে করুন:

27. $8+16+24+\dots$ ধারাটির প্রথম ৯ টি পদের সমষ্টি কত? [৯ম-১০ম শ্রেণীর অনু. ১৩.১]

Ans:360

28. $1+3+5+7+\dots$ ধারাটির n সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় করুন

Ans: n^2

সমাধান: ধারাটির ১ম পদ, $a = 1$ সাধারণ অন্তর, $d = 2$

n সংখ্যক পদের সমষ্টি, $S = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$ [যখন শেষপদ দেয়া থাকে না তখন এই সূত্রটি প্রয়োগ করতে হবে]

$$= \frac{n}{2} [2.1 + (n-1).2] = \frac{n}{2} [2 + 2n - 2] = \frac{n}{2} \times 2n = n^2$$

29. কোন সমান্তর ধারার 12 তম পদ 77 হলে, এর প্রথম 23 টি পদের সমষ্টি কত? [৯ম-১০ম শ্রেণীর অনু. ১৩.১]

সমাধান :

$$\therefore 12 \text{ তম পদ} = a + (12-1)d = a + 11d$$

প্রশ্নানুসারে, $a + 11d = 77 \dots\dots\dots(i)$ [এই লাইনটা খুব গুরুত্বপূর্ণ।]

$$\therefore \text{সমষ্টি} = \frac{23}{2} [2a + (23-1)d] = \frac{23}{2} [2a + 22d] = \frac{23}{2} \times 2(a + 11d) = 23 \times 77 = 1771$$

\therefore সমান্তর ধারার ২৩টি পদের সমষ্টি 1771 (Ans:)

30. একটি সমান্তর অনুক্রমে ৫ম পদটি 18 এবং প্রথম ৫টি পদের যোগফল 75 হলে প্রথম পদটি কত? [৩৮তম বিসিএস প্রিলি:]

(ক) ২

(খ) ১০

(গ) 8

(ঘ) ১২

উত্তর: ঘ

সমাধানঃ

এখানে ১ম পদ = a , সাধারণ অন্তর = d

সমান্তর ধারার ৫ম পদ = $a + (5-1)d = a + 4d$

প্রথমতে, $a + 4d = 18 \dots\dots(i)$

$$\text{প্রথম ৫টি পদের সমষ্টি} = \frac{5}{2} [2a + (5-1)d]$$

$$= \frac{5}{2} [a + (a + 4d)]$$

$$= \frac{5}{2} (a + 18)$$

$$\text{শর্তমতে, } \frac{5}{2} (a + 18) = 75 \Rightarrow a + 18 = 30 \therefore a = 12$$

কয়েক সেকেন্ড সমাধান করার জন্য:

৫টি সংখ্যার যোগফল ৭৫ হলে তাদের গড় = $৭৫ \div ৫ = ১৫$ ।

সমান্তর ধারায় সিরিজটি হবে

১২, ১৩.৫, ১৫, ১৬.৫ এবং ১৮।

গড় কে মাঝখানে রেখে শেষের ১৮ এর সাথে পার্থক্য ৩ কে ২ দিয়ে ভাগ করলে ১.৫ হয়। তাই সবগুলো রাশির পার্থক্য ১.৫।

31. একটি সমান্তর ধারার ৪র্থ এবং ১২তম পদের যোগফল ২০। ঐ ধারাটির প্রথম ১৫টি পদের যোগফল কত? [BD House Building FC (SO)-2017]

a. 300

b. 120

c. 150

d. 130

Ans: c

সমাধান:

এখানে ৪র্থ পদ = $a + (4-1)d = a + 3d$

[যেহেতু r তম পদ = $a + (r-1)d$]

এখানে ১২তম পদ = $a + (12-1)d = a + 11d$

৪র্থ ও ১২তম পদের যোগফল = $a + 3d + a + 11d = 2a + 14d = 20$ [২০ প্রশ্নে দেয়া আছে]

$$\text{সুতরাং প্রথম ১৫টি পদের যোগফল} = \frac{15}{2} [2a + (15-1)d] = \frac{15}{2} \times [2a + 14d] = \frac{15}{2} \times 20 = 150 \quad \text{Ans:150}$$

36. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + x^2$ এর মান কত? [একটি বাড়ি একটি খামার প্রকল্পের (ফিল্ড সুপারভাইজার) নিয়োগ-২০১৮]

- ক. $\frac{x(x+1)(2x+1)}{6}$ খ. $\frac{x(x+1)}{2}$ গ. x ঘ. $\left(\frac{x(x+1)}{2}\right)^2$ উত্তর: ক

সমাধান: x সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি = $\frac{x(x+1)(2x+1)}{6}$

সূত্রের প্রয়োগ:

37. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (40)^2 =$ কত? (২৭ তম বিসিএস)

- ক. 22130 খ. 22140 গ. 22150 ঘ. 22160 উত্তর:- খ

সমাধান: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (40)^2 = \frac{40(40+1)(2 \cdot 40 + 1)}{6} = \frac{40 \times 41 \times 81}{6} = 22140$

38. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 50^2 =$ কত?

- ক. 35725 খ. 42925 গ. 45500 ঘ. 47225 উত্তর:- খ

সমাধান: আমরা জানি, n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি = $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\therefore 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 50^2 = \frac{50 \times 51 \times 101}{6} = 42925$$

□ ঘন এর ধারার সূত্র:

প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি: অর্থাৎ $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 =$ ধারার সমষ্টি $S = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$

◇ ঘন এর ধারার উপর বিভিন্ন প্রশ্ন:

39. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 =$ কত? (সমাজ সেবা অফিসার: ২০০৭) $\left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$ (মূল সূত্রটিই)

40. $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + (30)^3 =$ কত? (পিএসসির সহ: পরিচালক ২০০৬)

সমাধান: $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + (30)^3 = \left\{ \frac{30(30+1)}{2} \right\}^2 = 216225$ Ans: 216225

□ নিজে করুন:

41. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 =$ কত? (সহকারী থানা শিক্ষা অফিসার: ২০১০)

- a. 3025 b. 3030 c. 3028 d. 3050 উত্তর:- a

42. $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + (20)^3 =$ কত?

- a. 3025 b. 3030 c. 44100 d. 3050 উত্তর:- c

□ গুণোত্তর ধারা:

পদ্ধতি-০৩ : গুণোত্তর ধারা

যে ধারার কোনো পদের সাথে তার পরবর্তী পদের অনুপাত সব সময় সমান হয়, সে ধারাকে গুণোত্তর ধারা বলে। যেমন: $3+6+12+24+\dots$ প্রতি পদের সাথে ২ গুণ করে পরবর্তী পদ বের করা হয়েছে। যতগুণ করে বাড়ে বা কমে তাকে সাধারণ অনুপাত বলা হয় এবং সাধারণ অনুপাতকে q দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$$\text{মনে রাখবেন } q = \frac{\text{দ্বিতীয় পদ}}{\text{প্রথম পদ}}$$

গুণোত্তর ধারার সূত্র দুটি অবশ্যই মনে রাখুন:

$$1. r\text{-তম পদ} = aq^{r-1}$$

$$2. n \text{ সংখ্যক পদের সমষ্টি, } s = a \times \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (q > 1 \text{ হলে})$$

$$s = a \times \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (q < 1 \text{ হলে})$$

□ গুণোত্তর ধারার Basic Concept Clear করার জন্য নিচের আলোচনাতুলো মনযোগ দিয়ে পড়ুন:

(৩.ক) গুণোত্তর ধারার পদের মান বা কত তম পদ তা বের করতে বলা হলে:

গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত q হলে ধারাটির r -তম পদ $= aq^{r-1}$ (অর্থাৎ একটি ধারার মাঝখানের যে কোন একটি পদের মান কত অথবা যে পদের মান দেয়া আছে পদটি কত নম্বর পদ বের করতে বলা হলে এই সূত্রটি প্রয়োগ করতে হয়। যেমন:

43. $2+4+8+16+ \dots$ ধারাটির ৭ম পদ কত?

a.128

b.120

c.125

d.124

উত্তর:- a

সমাধান: (সুত্রানুযায়ী):

$$aq^{r-1} \quad (\text{যেখানে প্রথম পদ } a = 2, \text{ সাধারণ অনুপাত } q = 4 \div 2 = 2 \text{ এবং পদের সংখ্যা } r = 7)$$

$$= 2 \cdot 2^{7-1} = 2 \cdot 2^6 = 2 \cdot 64 = 128 \quad \text{Ans: } 128$$

সিরিজটি বুঝে বুঝে লিখলেই প্রমাণ পাওয়া যায় $2+4+8+16+ 32 + 64 + 128$ (৭ম পদ 128)

আবার এই একই প্রশ্নটি যদি এভাবে ঘুরিয়ে আসে

44. $2+4+8+16+ \dots$ ধারাটির কত তম পদের মান 128?

তখনও একই সূত্র কিন্তু এখানে r তম পদটি কত তা জানা থাকলে r এর মান কত তা অজানা, তাই r এর মান বের করার জন্য লিখতে হবে

$$aq^{r-1} = 128 \quad (\text{কারণ এই সূত্রটি প্রয়োগ করলে যে মানটি আসবে তা হবে 128})$$

$$\text{বা, } 2 \cdot 2^{r-1} = 128, \text{ বা, } 2^{r-1} = 64, \text{ বা, } 2^{r-1} = 2^6 \quad \text{বা, } r-1 = 6 \quad \text{বা, } r = 7$$

□ নিজে করে দেখুন:

45. $2+4+8+16+ \dots$ ধারাটি ৯ম পদের মান কত বের করুন।

Ans:512

46. $2+4+8+16+32+ \dots$ ধারাটি কততম পদের মান ১০২৪?

উত্তর:- ১০ম

47. $64 + 32 + 16 + 8 + \dots$ ধারাটির অষ্টম পদ নির্ণয় কর। (৯ম-১০ম শ্রেণীর অনু. ১৩.২)

উত্তর: ১/২

Solution:

সূত্রানুযায়ী ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা। (প্রতি পদ ই পূর্বের পদের অর্ধেক)

এখানে ধারার প্রথম পদ, $a = 64,$

$$\text{এবং সাধারণ অনুপাত, } r = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{ধারাটির } n \text{ তম পদ} = ar^{n-1} = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^6 \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{ধারাটির অষ্টম পদ} = \frac{1}{2}$$

48. $128 + 64 + 32 + \dots$ ধারাটির কোন পদ $\frac{1}{2}$? [৯ম-১০ম শ্রেণীর অনু. ১৩.২]

Solution: ar^{n-1} সূত্রানুসারে:

$$128. \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{256} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^8 \Rightarrow n-1 = 8 \Rightarrow n = 8+1 \therefore n = 9$$

\therefore ধারাটির নবম পদ = $\frac{1}{2}$

□ বিভিন্ন পরীক্ষায় কিভাবে আসে দেখুন:

49. একটি গুণোত্তর অনুক্রমে তৃতীয় পদটি 20 এবং ষষ্ঠ (6 - তম) পদটি 160 হলে প্রথম পদটি কত?

(ক) 5 (খ) 10 (গ) 12 (ঘ) 8

উত্তর: ক

সাধারণ নিয়মে সমাধান: (এই নিয়মেই অনেক প্রশ্ন আসে। সূত্রটি মনে রাখার চেষ্টা করুন)

গুণোত্তর অনুক্রমের প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত q হলে অনুক্রমটির n -তম পদ $=aq^{n-1}$ তৃতীয় পদ,

$$aq^{3-1} = aq^2 = 20 \text{ এবং } 6\text{ষ্ঠ পদ, } aq^{6-1} = aq^5 = 160$$

$$\text{শর্তমতে, } aq^2 = 20 \text{ ----- (i)}$$

$$\text{এবং } aq^5 = 160 \text{ ----- (ii)}$$

$$\text{এখন, } \frac{aq^5}{aq^2} = \frac{160}{20} \text{ [(ii) \div (i)]}$$

$$\text{বা, } q^3 = 8 \text{ বা, } q^3 = 2^3 \therefore q = 2$$

ক্মুখে মুখে সমাধান বের করার জন্য এভাবে ভাবুন:

তৃতীয় পদ ২০ এবং ৬ষ্ঠ পদ ১৬০ এখন, যদি চতুর্থ পদ $20 \times 2 = 80$

এবং পঞ্চম পদ $80 \times 2 = 160$ ধরা হয় তাহলে ৬ষ্ঠ পদ $160 \times 2 = 320$

মিলে। অর্থাৎ প্রতিবার ২দিয়ে গুণ করে পরের পদ তৈরী করা হয়েছে।

সুতরাং তৃতীয় পদ $20 \div 2 =$ দ্বিতীয় পদ 10 এবং $10 \div 2 = 5$ প্রথম পদ।

এখন প্রথম পদ a এর মান বের করার জন্য q এর মান (1) নং সমীকরণে বসাই।

$$a \cdot 2^2 = 20 \Rightarrow a = 20 \div 4 \therefore a = 5$$

50. একটি গুণোত্তর অনুক্রমের দ্বিতীয় পদটি -48 এবং পঞ্চম পদটি $\frac{3}{4}$ হলে, সাধারণ অনুপাত কত? [35তম বিসিএস]

ক) $\frac{1}{2}$

খ) $-\frac{1}{2}$

গ) $\frac{1}{4}$

ঘ) $-\frac{1}{4}$

Ans: ঘ

সাধারণ নিয়মে, গুণোত্তর অনুক্রমের প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত q হলে অনুক্রমটির n -তম পদ $=aq^{n-1}$ দ্বিতীয় পদ,

$$aq^{2-1} = aq = -48 \text{ এবং পঞ্চম পদ, } aq^{5-1} = aq^4 = \frac{3}{4} \text{ (বের করতে হবে সাধারণ অনুপাত } q \text{ এর মান কত?)}$$

$$\text{প্রথম শর্তমতে, } aq = -48 \text{ ----- (i)}$$

$$\text{২য় শর্তমতে, } aq^4 = \frac{3}{4} \text{ ----- (ii)}$$

$$\text{এখন, } \frac{aq^4}{aq} = \frac{\frac{3}{4}}{-48} \text{ [(i) \div (ii)] (সাধারণত ছোট সংখ্যার সমীকরণ দিয়ে বড় সংখ্যার সমীকরণকে ভাগ করতে হয়।)}$$

$$\text{বা, } q^3 = -\frac{1}{64} \text{ (বামে কাটাকাটি এবং ডানে ভগ্নাংশকে উল্টিয়ে গুণ করা হয়েছে)}$$

$$\text{বা, } q^3 = \left(-\frac{1}{4}\right)^3 \therefore q = -\frac{1}{4} \text{ [এতো কঠিন সূত্র মনে রাখতে না পারলে বুঝে বুঝে নিচের নিয়মে করার চেষ্টা করুন]}$$

◆ **Learning Point:** ধারার রাশিগুলোর মধ্যে একবার (+) ও একবার (-) থাকলে বুঝতে হবে ঋণাত্মক সংখ্যা দিয়ে গুণ করা হয়েছে। অর্থাৎ রাশিগুলোর মাঝে সাধারণ অনুপাত বা q এর মানটি ঋণাত্মক হবে।

□ মুখে মুখে করতে হলে এভাবে চেষ্টা করুন:

যেহেতু ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা এবং ধারাটির ২য় পদে -48 এবং পঞ্চম পদে $\frac{3}{4}$ আছে অর্থাৎ - থেকে + মান এসেছে, তাই অবশ্যই প্রতিবার - যুক্ত সংখ্যা দিয়ে গুণ করা হয়েছে। তাই ক ও গ নং অপশন বাদ দেয়া যায়। এখন খ অপশনটি দিয়ে গুণ করে দেখতে হবে মিলে কি না

এখানে ২য় পদ -48 সুতরাং ৩য় পদ = $-48 \times \frac{1}{2} = 24$ আবার, ৪র্থ পদ = $24 \times \frac{1}{2} = -12$ এবং ৫ম পদ = $-12 \times$

$\frac{1}{2} = 6$ কিন্তু প্রশ্নে ৫ম পদ দেয়া আছে $\frac{3}{4}$ তাই এটি উত্তর নয়। সুতরাং উত্তরটি নিশ্চিত ভাবে $-\frac{1}{4}$ ই হবে।

51. $\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \sqrt{2}$ ধারাটির কোন পদ $8\sqrt{2}$ হবে? [বেঙ্গলুর বিমান ও পর্যটন মন্ত্রণালয়ের প্রশাসনিক কর্মকর্তা oet] + [৩৯ - তম বিসিএস- (বিশেষ)]

ক. ৯ তম পদ খ. ১০ তম পদ গ. ১১ তম পদ ঘ. ১২ তম পদ Ans. ক

সমাধান: ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা।

এখানে, প্রথম পদ $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ এবং সাধারণ অনুপাত, $q = 1 \div \frac{1}{\sqrt{2}}$ বা, $q = \sqrt{2}$

∴ n তম পদ = aq^{n-1}

শর্তমতে, $aq^{n-1} = 8\sqrt{2}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{2}} \times (\sqrt{2})^{n-1} = 2^3 \sqrt{2}$

বা, $(\sqrt{2})^{-1} \times (\sqrt{2})^{n-1} = (\sqrt{2})^6 \sqrt{2}$

বা, $(\sqrt{2})^{n-2} = (\sqrt{2})^7$

বা, $n - 2 = 7$ (দুপাশের ভিত্তি $\sqrt{2}$ মিলে যাওয়ায় $\sqrt{2}$ ভুলে দেয়া হয়েছে)

∴ $n = 9$

পরামর্শ: সূত্র ভুলে গেলেও Practical নিয়মগুলো সহজে ভুলে যাবেন না এবং যেহেতু প্রশ্নগুলো সহজই আসে। তাই এমসিকিউ পরীক্ষার জন্য যথাসম্ভব নিয়ম ছাড়াই করার চেষ্টা করুন।

মুখে মুখে সমাধান বের করার জন্য এভাবে ভাবুন:
প্রথমে তিনটি রাশি দেয়াই আছে। তাই ৪র্থ রাশি থেকে গুণ করা শুরু করুন। প্রতিটি রাশির সাথে ধারাটির সাধারণ অন্তর $\sqrt{2}$ গুণ করে বের করুন, কত নং রাশিতে গিয়ে $8\sqrt{2}$ আসে। দেখা যাবে ৯ নং রাশিতে গেলে $8\sqrt{2}$ আসবে

52. $5 + x + y + 135$ গুণোত্তর ধারাটির x ও y এর মান কত? [৯ম-১০ম শ্রেণীর অনু. ১৩.২]

সমাধান:-

এখানে, ৪র্থ পদ $aq^{4-1} = 135$ বা $aq^3 = 135$ (i)

এবং প্রথম পদ $aq^{1-1} = 5$ বা $aq^0 = 5$ (ii)

(i) ÷ (ii) = $q^3 = 27$

∴ $q = 3$

সুতরাং, $x = 5 \times 3 = 15$ এবং $y = 15 \times 3 = 45$

মুখে মুখে করার জন্য: ৫ ও ১৩৫ দুটিই ৫ দিয়ে বিভাজ্য, তাহলে এর মাঝের যে সংখ্যা দুটি হবে তা ৩ ও ৫ দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা ই হবে। দেখা যাচ্ছে ২য় পদ ১৫ ও ৩য় পদ ৪৫ নিলে প্রতিবার ৩ দিয়ে গুণ করতে হচ্ছে। তাই ১৫ ও ৪৫ ই উত্তর।

Ans. $x=15$ এবং $y = 45$

(৩.খ) গুণোত্তর ধারার পদের সমষ্টি বের করা:

গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত q হলে ধারাটির n তম পদের সমষ্টি, $s = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

53. $2 + 6 + 18 + \dots$ ধারাটির ৮টি পদের সমষ্টি কত?

ক. 6565

খ. 6560

গ. 6569

ঘ. 5560

উত্তর: খ

সমাধান: ৮টি পদের সমষ্টি = $a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 2 \cdot \frac{3^8 - 1}{3 - 1} = 6560$

54. $2 - 8 + 8 - 16 + \dots$ ধারাটির প্রথম ৭টি পদের সমষ্টি কত? (জটিলতর শিখা অধিদপ্তর-০৫)। (পূর্বে সমস্যা হয়েছে- (আপ)-২০১৬)

(ক) ৩৬

(খ) ৮৬

(গ) ৫২

(ঘ) ৫৬

উত্তর: খ

সমাধান:

গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ $a = 2$, সাধারণ অনুপাত, $q = \frac{-4}{2} = -2$ এবং মোট পদ $n = 7$

\therefore প্রথম ৭টি পদের সমষ্টি = $a \times \frac{q^n - 1}{q - 1} = 2 \times \frac{(-2)^7 - 1}{-2 - 1} = 2 \times \frac{-128 - 1}{-3} = 2 \times \frac{-129}{-3} = 2 \times 43 = 86$

গুণোত্তর ধারার সূত্র জানা না থাকলে অথবা ভুলে গেলেই এ ধরনের প্রশ্ন যাতে ছেড়ে দিয়ে আসতে না হয় সেজন্য নিচের ব্যাখ্যাটি পড়ুন।

$2 - 8 + 8 - 16$ এখানে প্রতিবার (-2) দিয়ে গুণ করা হয়েছে, (একবার $(+)$ ও একবার $(-)$ থাকার ক্ষণাত্মক সংখ্যা) ৪টি রাশি দেয়াই আছে, সুতরাং প্রতিবার (-2) দিয়ে গুণ করলে পরের ৩টি রাশি সহ ৭টি রাশির সিরিজটি হবে $= 2 - 8 + 8 - 16 + 32 - 64 + 128$ [এখন $(+)$ ও $(-)$ ও $(-)$ ও $(+)$ একপাশে একপাশে যোগ করে বিয়োগ করে দিলেই উত্তর বের হবে।] $= 128 - 64 = 64$

55. $12 + 24 + 48 + \dots + 768$ ধারাটির সমষ্টি কত? (সম-১০ম শ্রেণীর (অনু. ১০.১) উসঃ-১০।)

সমাধান:

এখানে, প্রথম পদ $a = 12$, সাধারণ অনুপাত $r = \frac{24}{12} = 2 > 1$ ।

এবং এটি একটি গুণোত্তর ধারা। ধরি, ধারাটির n তম পদ = 768

আমরা জানি, n তম পদ = ar^{n-1}

$\therefore ar^{n-1} = 768$ বা, $12 \times 2^{n-1} = 768$ বা, $2^{n-1} = \frac{768}{12} = 64$ বা, $2^{n-1} = 2^6$ বা, $n-1 = 6 \therefore n = 7$

সুতরাং, ধারাটির সমষ্টি = $\frac{a(r^n - 1)}{(r - 1)} = \frac{12(2^7 - 1)}{(2 - 1)} = 12 \times (128 - 1) = 12 \times 127 = 1524$ Ans: 1524

৮. একটি গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ ও দ্বিতীয় পদ যথাক্রমে 27 এবং 9 হলে ৫ম পদ কত? (৯ম-১০ম শ্রেণী, অনু: ১৩.২ এর উদা:৯)

a. $\frac{1}{3}$

b. 3

c. $\frac{1}{9}$

d. 81

Ans. a

৯. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ ধারাটির প্রথম আটটি পদের সমষ্টি নির্ণয় করুন। (৯ম-১০ম শ্রেণীর (অনু: ১৩.১) উদা:১১)

Answer & Solution

১. উত্তর: গ সমাধান:

প্রথম পদ ২টির যা পার্থক্য পরের দুটিরও তাই হবে। এজন্য:

$$\text{প্রথমে পার্থক্য} = ১৭ - ৫ = ১২।$$

$$\text{তাহলে ৩য় পদ হবে} = ২য় পদ + ১২ = ১৭ + ১২ = ২৯$$

২. উত্তর: ঘ

$$\text{সমাধান: যেহেতু ধারাটি একটি সমান্তর ধারা তাই ২য় পদ হবে ১ম ও ৩য় পদের গড় অর্থাৎ ২য় পদ} = \frac{১১ + ২৭}{২} = \frac{৩৮}{২} = ১৯$$

$$\therefore \text{সাধারণ অন্তর } d = ১৯ - ১১ = ৮$$

$$\text{সুতরাং ১১ তম পদ} = a + (১১ - ১)d = a + ১০d = ১১ + ১০ \times ৮ = ১১ + ৮০ = ৯১$$

৩. উত্তর: ঘ সমাধান: ১ম পদ $+ ১৪ \times ৫ = ৫ + ৭০ = ৭৫$

৪. উত্তর: খ সমাধান: পদ সংখ্যা = $\frac{\text{শেষ পদ} - ১ম পদ}{\text{সাধারণ অন্তর}} + ১ = \frac{৬৭ - ১৫}{৩} + ১ = \frac{৫২}{৩} + ১ = ১৮ + ১ = ১৯$

৫. উত্তর: ৩১ সমাধান: পদ সংখ্যা = $\frac{\text{শেষ পদ} - ১ম পদ}{\text{সাধারণ অন্তর}} + ১ = \frac{৬২ - ২}{২} + ১ = \frac{৬০}{২} + ১ = ৩০ + ১ = ৩১$

৬. Ans.c

$$\text{সমাধান: পদসংখ্যা} = \frac{\text{শেষ পদ} - \text{প্রথম পদ}}{\text{সাধারণ অন্তর}} + ১ = \frac{১১১ - ১৩}{৭} + ১ = \frac{৯৮}{৭} + ১ = ১৪ + ১ = ১৫$$

৭. Ans.c

সমাধান: প্রথম পদ $a = 7$, সাধারণ অন্তর $d = 13 - 7 = 6$

$$\therefore ২০\text{টি পদের সমষ্টি} = \frac{২০}{২} \{2 \cdot 7 + (২০ - 1)6\} = 10 \times (14 + 114) = 10 \times 128 = 1280$$

৮. Ans. a সমাধান:

প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ $a = 27$, দ্বিতীয় পদ $= 9$ তাহলে সাধারণ অনুপাত $r = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$

$$\therefore \text{পঞ্চম পদ } ar^{n-1} = 27 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{27 \times 1}{27 \times 3} = \frac{1}{3}$$

৯. উত্তর: $1 \frac{127}{128}$ সমাধান: প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ $a = 1$, সাধারণ অনুপাত $r = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$

\therefore ইহা একটি গুণোত্তর ধারা। এখানে পদ সংখ্যা $n = 8$

সুতরাং, ধারাটির 8 পদের সমষ্টি $S_8 = \frac{1 \times \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^8 \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{256}}{\frac{1}{2}} = 2 \left(\frac{256 - 1}{256} \right) = \frac{255}{128} = 1 \frac{127}{128}$

Model Test

পূর্ণমান: ১০

সময়: ১০মিনিট

১. $4 + 8 + 12 + \dots$ ধারাটির 17 তম পদ কোনটি?

(ক) 60	(খ) 30	(গ) 34	(ঘ) 68
--------	--------	--------	--------
২. $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 95 =$ কত?

ক. ৪৫৬০	খ. ৪৬৬০	গ. ৪৯৯৬	ঘ. ৫৫৬০
---------	---------	---------	---------
৩. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 11^3 =$ কত?

ক. 3250	খ. 3500	গ. 4356	ঘ. 4550
---------	---------	---------	---------
৪. একটি সমান্তর ধারার তৃতীয় পদ 20 এবং সপ্তম পদ 12 হলে ধারাটির সাধারণ অন্তর কত?

ক. -2	খ. -4	গ. 2	ঘ. 4
-------	-------	------	------
৫. $29 + 25 + 21 + \dots - 23 =$ কত? [৩য় ও মোশাব্বেক সপ্তক অধিদপ্তর, স্ব.প্রশাসনার মে - ২০১৭]

ক) 32	খ) 48	গ) 38	ঘ) 42
-------	-------	-------	-------
৬. 2, 5, 8, ... ৭ম পদ কত?

ক. 20	খ. 22	গ. 18	ঘ. 16
-------	-------	-------	-------
৭. ৫ থেকে ৩৫ পর্যন্ত সংখ্যাগুলোর যোগফল কত? [প্রাথমিক বিদ্যালয়ের প্রধান শিক্ষক: ০১]

ক. ৬০০	খ. ৬১০	গ. ৬২০	ঘ. ৬৩০
--------	--------	--------	--------
৮. $1 + 2 + 4 + \dots$ 6 টি পদের সমষ্টি কত?

ক. 36	খ. 65	গ. 63	ঘ. 73
-------	-------	-------	-------
৯. $1 + 3 + 5 + \dots + 21$ সমান কত হবে? (সমাজসেবা অধিদপ্তর-০৫)

ক. ১০২	খ. ২৫০	গ. ১২১	ঘ. ১১২
--------	--------	--------	--------
১০. ২, ৪, ৬, ... কোন পদ ৯৪ হবে?

ক. 46	খ. 47	গ. 48	ঘ. 49
-------	-------	-------	-------

উত্তরমালা:

১.	ঘ	২.	ক	৩.	গ	৪.	ক	৫.	ঘ
৬.	ক	৭.	গ	৮.	গ	৯.	গ	১০.	খ

লিখিত প্রশ্ন

১. $৮+১১+১৪+১৭$ ধারার কোন পদ ৩৯২? [সমাজসেবা অধিদপ্তর (অফিস সহ: কাম কম্পি: টাই:) - ২০১৮- (লিখিত)]

Solution:

ধরি, ধারাটির r তম পদের মান ৩৯২।

আমরা জানি,

একটি সমান্তর ধারার r তম পদ $= a+(r-1)d$

প্রশ্নমতে,

$$a+(r-1)d = ৩৯২$$

$$\Rightarrow ৮+(r-1) \times ৩ = ৩৯২ \text{ (যেহেতু প্রথমে } a = \text{ প্রথম পদ} = ৮ \text{ এবং } d = \text{ সাধারণ অন্তর} = ১১-৮ = ৩)$$

$$\Rightarrow (r-1) \times ৩ = ৩৯২-৮$$

$$\Rightarrow (r-1) = \frac{৩৮৪}{৩}$$

$$\therefore r = ১২৮+১ = ১২৯ \text{ অর্থাৎ ধারাটির } ১২৯ \text{ তম পদের মান } ৩৯২।$$

উত্তর: ১২৯ তম পদ।

২. এক ব্যক্তি ২২০০০ টাকায় একটি ফ্রিজ কিস্তিতে পরিশোধের মাধ্যমে কিনতে রাজী হন। প্রত্যেক কিস্তি পূর্বের কিস্তি থেকে ৫০০ টাকা বেশি। যদি প্রথম কিস্তি ১০০০ টাকা হয়, তবে কতগুলো কিস্তিতে তিনি ফ্রিজের দাম পরিশোধ করতে পারবেন এবং সর্বশেষ কিস্তির পরিমাণ কত? [৩৫তম বিসিএস লিখিত]

সবার আগে বুঝতে হবে যে, এই অংকটি কেন সান্তধারার অংকের নিয়মে হবে।

সমাধান:

এখানে প্রথম কিস্তি = ১০০০ এবং পরবর্তী কিস্তি ৫০০ করে বাড়বে এবং সব কিস্তি মিলে মোট টাকা হবে ২২০০০

তাহলে সিরিজটি সাজালে হবে, $১০০০+১৫০০+২০০০+২৫০০ \dots \dots = ২২০০০$

এখানে ধারার সমষ্টি বের করার সূত্র প্রয়োগ করতে হবে যেখানে প্রথম পদ $a = ১০০০$, সাধারণ অন্তর $d = ৫০০$

এবং সমষ্টি $= ২২০০০$

তাহলে সূত্রানুযায়ী

$$\text{সমষ্টি, } S = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] = 22000 \text{ (এখানে } n \text{ হল মোট কিস্তির সংখ্যা)}$$

$$\text{বা, } n[2 \times 1000 + (n-1)500] = 22000 \times 2 \text{ (মান বসানো হলো)}$$

$$\text{বা, } n[2000 + 500n - 500] = 44000$$

$$\text{বা, } n(500n + 1500) = 44000$$

$$\text{বা, } 500n^2 + 1500n - 44000 = 0$$

$$\text{বা, } 500(n^2 + 3n - 88) = 0$$

$$\text{বা, } n^2 + 3n - 88 = 0$$

$$\text{বা, } n^2 + 11n - 8n - 88 = 0$$

$$\text{বা, } n(n+11) - 8(n+11) = 0$$

$$\text{বা, } (n+11)(n-8) = 0$$

এখন, হয়,

$$n+11=0 \quad \text{অথবা, } n-8=0$$

$$\text{বা, } n=-11 \quad \text{বা, } n=8$$

যেহেতু ঋণাত্মক মান গ্রহণযোগ্য নয় তাই $n=8$

অর্থাৎ মোট কিস্তি সংখ্যা ৮টি।

এই অংকটিই কোন ধরণের নিয়ম ছাড়াই করতে চাইলে এভাবে করতে পারেন

$$১ম \text{ কিস্তি} = ১০০০$$

$$২য় \text{ " } = ১৫০০$$

$$৩য় \text{ " } = ২০০০$$

$$৪র্থ \text{ " } = ২৫০০$$

$$৫ম \text{ " } = ৩০০০$$

$$৬ষ্ঠ \text{ " } = ৩৫০০$$

$$৭ম \text{ " } = ৪০০০$$

$$৮ম \text{ " } = ৪৫০০$$

$$\text{মোট টাকার পরিমাণ} = ২২,০০০$$

$$\text{সুতরাং মোট কিস্তি:} = ৮টি$$

$$\text{এবং সর্বশেষ কিস্তি} = ৪৫০০ \text{ টাকা}$$

অবার মোহেতু মোট কিস্তি ৮টি তাহলে শেষের কিস্তিটি হবে ৮ নম্বর কিস্তি।
 ধরি ৮ হচ্ছে মোট কিস্তির r তম পদ।
 আমরা জানি

$$r \text{ তম পদ} = a + (r-1)d = 1000 + (8-1)500 = 1000 + 7 \times 500 = 1000 + 3500 = 4500$$

(সুতরাং ৮ম কিস্তি বা সর্বশেষ কিস্তির পরিমাণ হল ৪৫০০ টাকা)

উত্তর: মোট কিস্তি ৮টি এবং সর্বশেষ কিস্তির পরিমাণ হল ৪৫০০ টাকা।

[Note : লিখিত অংকে উপরের নিয়মটা অনেক প্রশ্নে প্রয়োজন হবে। তাই খুব ভালোভাবে মনে রাখুন।]

৫. বিনীত তার বেতন থেকে প্রথম মাসে 1200 টাকা সঞ্চয় করেন এবং পরবর্তী প্রতিমাসে এর পূর্ববর্তী মাসের তুলনায় 100 টাকা বেশি সঞ্চয় করেন। (৯ম-১০ম শ্রেণীর (অনু. ১৩.১) উদা:৬)
- ক) সমস্যাটিকে n সংখ্যক পদ পর্যন্ত ধারায় প্রকাশ কর।
 খ) তিনি 18তম মাসে কত টাকা এবং প্রথম 18 মাসে মোট কত টাকা সঞ্চয় করেন?
 গ) তিনি কত বছরে মোট 106200 টাকা সঞ্চয় করেন? BKB- (officer)-2017-(Written)]

সমাধান:

ক) এখানে, ধারাটির প্রথম পদ $a = 1200$, সাধারণ অন্তর $d = 100$

$$\therefore \text{দ্বিতীয় পদ} = 1200 + 100 = 1300, \text{ তৃতীয় পদ} = 1300 + 100 = 1400$$

সুতরাং ধারাটি $1200 + 1300 + 1400 + \dots + n$ পর্যন্ত। (অজানা রাশির শেষ পর্যন্ত লিখতে n পর্যন্ত লিখতে হয়।)

খ) আমরা জানি, n তম পদ $= a + (n - 1)d$

$$\therefore 18 \text{তম মাসে সঞ্চয়} = a + (18 - 1)d = 1200 + 17 \times 100 = 2900 \text{ টাকা (১৮ তম পদের মান)}$$

$$\text{অবার, প্রথম } n \text{ সংখ্যক পদের সমষ্টি} = \frac{n}{2} \{2a + (n - 1)d\}$$

$$\therefore \text{প্রথম ১৮ মাসের সঞ্চয়} = \frac{18}{2} \{2 \times 1200 + (18 - 1) \times 100\} = 9(2400 + 1700) = 36900 \text{ টাকা (১৮ মাস পর্যন্ত)}$$

(মোট সঞ্চয়)

গ) মনে করি, তিনি 106200 টাকা সঞ্চয় করেন মোট n মাসে

$$\text{প্রশ্নানুসারে, } \frac{n}{2} \{2a + (n - 1)d\} = 106200 \text{ [কারণ প্রশ্নে বলা আছে তার মোট সঞ্চয়} = 106200 \text{ টাকা]}$$

$$\text{বা, } \frac{n}{2} \{2 \times 1200 + (n - 1) \times 100\} = 106200$$

$$\text{বা, } n(2400 + 100n - 100) = 212400$$

$$\text{বা, } 100n^2 + 2300n - 212400 = 0$$

$$\text{বা, } n^2 + 23n - 2124 = 0$$

$$\text{বা, } n^2 + 59n - 36n - 2124 = 0$$

$$\text{বা, } (n + 59)(n - 36) = 0$$

$$\text{অর্থাৎ, } n = -59 \text{ অথবা } n = 36$$

এখানে ঋণাত্মক মান গ্রহণযোগ্য নয়। তাই মোট সময় = ৩৬ মাস বা ৩ বছর।