

বীজগণিতের বিভিন্ন সূত্র ও তার প্রয়োগ

এই অধ্যায়ে আমরা শিখবো

পদ্ধতি-০১:	মুখে মুখে মান নির্ণয়
পদ্ধতি-০২:	বর্গের সূত্রের প্রয়োগ
পদ্ধতি-০৩:	ঘন-এর সূত্রের প্রয়োগ
পদ্ধতি-০৪:	পূর্ণবর্গ রাশি তৈরী
পদ্ধতি-০৫:	তিনটি রাশির বর্গের সূত্রের প্রয়োগ
পদ্ধতি-০৬:	এই অধ্যায়ের সবথেকে গুরুত্বপূর্ণ কিছু প্রশ্ন লিখিত প্রশ্ন ও সমাধান

□ বিভিন্ন গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলী:

□ বর্গ এর সূত্রাবলী:-

$$1. (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \\ = (a-b)^2 + 4ab$$

$$2. (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 \\ = (a+b)^2 - 4ab$$

$$3. a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab \\ = (a-b)^2 + 2ab$$

$$4. 2(a^2+b^2) = (a+b)^2 + (a-b)^2$$

$$5. a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$6. 4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$$

$$7. ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$8. (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \\ \text{অথবা, } a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \\ \text{অথবা, } 2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)$$

$$9. (x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$$

□ ঘন এর সূত্রাবলী:

$$10. (a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ = a^3+b^3+3ab(a+b)$$

$$11. (a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \\ = a^3-b^3-3ab(a-b)$$

$$12. a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) \\ = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$13. a^3-b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b) \\ = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

পদ্ধতি - ০১: মুখে মুখে মান নির্ণয়

□ এই নিয়মটির গুরুত্ব বোঝার জন্য নিচের সমাধান করে দেয়া অংকটি ভালভাবে পড়ুন:

১. $x-y = 2$ এবং $xy = 24$ হলে, x - এর ধনাত্মক মানটি- [35তম বিসিএস]

ক) 3

খ) 4

গ) 5

ঘ) 6

সমাধান:

দেয়া আছে, $x-y = 2$

বা, $(x-y)^2 = 2^2$ (উভয় পক্ষকে বর্গ করে)

বা, $(x-y)^2 = 4$

বা, $(x+y)^2 - 4xy = 4$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 24} \\ \underline{2 12} \\ 2 6 \\ \underline{2 6} \\ 0 \end{array}$$

যদি কখনো বড় সংখ্যা আসে তাহলে এভাবে ভাগতে পারেন

বা, $(x+y)^2 - 4 \times 24 = 4$ ($\because xy=24$)

বা, $(x+y)^2 - 96 = 4$

বা, $(x+y)^2 = 100$

বা, $(x+y) = \sqrt{100}$

বা, $(x+y) = \pm 10$

$(x+y) = 10$ (ধনাত্মক মান ধরে)

এখন, $x+y = 10$

এবং $x-y = 2$

$2x = 12$

বা, $x = 6$

$\therefore x = 6$ Ans: 6 এভাবে করলে ৫ মিনিটেও উত্তর মিলবে না।

Attention: যেকোনো চাকুরীর পরীক্ষায় এই নিয়মের দু'একটি করে অংক প্রায়ই আসে। এখানে সমাধান করে দেয়া অংকগুলো খুব ভালোভাবে বুঝে বুঝে করলে কয়েক সেকেন্ডেই এ ধরনের শত শত অংক খাতা - কলম এমনকি সূত্র ছাড়াই মুখে মুখে করতে পারবেন।

কিন্তু সূত্র ছাড়াই বুঝে বুঝে ৫ সেকেন্ডে অংকটি করতে এভাবে ভাবুন

$x-y = 2$ অর্থ x -এর মান বড়।

আবার $xy = 24$ অর্থাৎ x ও y গুণ করে 24 হবে এবং x থেকে y বিয়োগ করলে 2 হবে।

তাহলে $8 \times 3 = 24$ হতে পারে, কিন্তু $8-3 = 5$ হয় না।

আবার, $6 \times 4 = 24$ এবং $6-4 = 2$ (মিলে গেছে!!) উত্তর 6 (প্রাকটিস করলে সরাসরি সঠিকটিই মাথায় আসবে)

দৈর্ঘ্য ধরে নিচের ব্যাখ্যাগুলো পড়ুন। বুঝতে একটু সময় লাগবে, কিন্তু একবার বুঝে গেলে খুব দ্রুত মান নির্ণয়ের প্রশ্নগুলোর উত্তর বের করা সম্ভব হবে।

এই নিয়মের দু'ধরনের অংক সাধারণত বিভিন্ন পরীক্ষায় আসে। যেমন:

ক. দুটি সংখ্যার সমষ্টি এবং ব্যবধান দেয়া থাকে। যেমন:

২. যদি $x+y=6$ এবং $x-y = 2$ হয়, তাহলে x ও y এর মান কত?

a. 5,1

b. 4,2

c. 3,3

d. 1,5

Ans:b

প্রসমাধান:

এরূপ অংকে সবাই সূত্র খুঁজে করার চেষ্টা করেন, অনেকের সূত্র মনে থাকে না, আবার অনেকে কোন সূত্র ফেলতে হবে তা নিয়ে সংশয়ে পড়ে যান। কিন্তু একটু মনে মনে এভাবে ভাবুন যে $x+y=6$ অর্থাৎ দুটি সংখ্যা যোগ করে 6 হতে হবে। এখন $5+1 = 6$ বা $4+2=6$ বা $3+3=6$ হতে পারে। কিন্তু পরের অংশ দেখে আমরা বুঝতে পারি যে x এর মান y এর থেকে বড় এবং x ও y এর পার্থক্য হবে 2 তাই আমরা দেখতে পারতেছি যে $4+2$ ছাড়া এর উত্তর আর কিছুই হতে পারে না, তাই উত্তর হবে $x=4$ এবং $y = 2$, প্রমাণ করে দেখে নিন, $4+2=6$ ও $4-2=2$ ।

উপরের অংকটিতে ছোট ছোট সংখ্যা থাকায় মুখে মুখে পারা গেল। কিন্তু বড় সংখ্যা আসলে কিভাবে করবেন দেখে নিন।

৩. $x+y=6$ এবং $x-y = 4$ হলে, xy এর মান কত? [IBBL-(ATO)-2017]

ক. ৩৫

খ. ২০

গ. ৯

ঘ. ৫

উত্তর: ঘ

প্রসমাধান: [বুঝলে মুখে মুখে আর লিখে করতে চাইলে এই নিয়মে সমাধান করুন]

$x+y = 6$ ----(i)

$x-y = 4$ ----(ii)

$2x = 10$ Or, $x = 5$

Again

$x+y = 6$ or, $5+y = 6 \therefore y = 1$ So, $xy = 5 \times 1 = 5$

দুটি সংখ্যার যোগফল (সমষ্টি) এবং বিয়োগফল (ব্যবধান) দেয়া থাকলে, সমষ্টি থেকে ব্যবধান বিয়োগ করে ২ দিয়ে ভাগ করলে ছোট সংখ্যা বের হয় আবার সমষ্টি এবং ব্যবধান যোগ করে ২ দিয়ে ভাগ করলে বড় সংখ্যাটি বের হয়।

উত্তর: 5

১১. $x + y = 6$ এবং $x - y = 4$ হলে, xy এর মান কত? [রাকাব, (ক্যাশিয়ার)-১৫]

a. 35

b. 20

c. 9

d. 5

Ans: d

□ একটু ব্যতিক্রম:

১২. $a + b = 9m$ এবং $ab = 18m^2$ হলে $a - b$ এর মান কত?

a. $+3m$

b. $-3m$

c. $\pm 3m$

d. $3m$

Ans: c

✍ Solution:

$$\begin{aligned} \text{আমরা জানি: } (a - b)^2 &= (a+b)^2 - 4ab \\ &= (9m)^2 - 4 \cdot 18m^2 \\ &= 81m^2 - 72m^2 \end{aligned}$$

$$\text{বা, } (a - b)^2 = 9m^2$$

$$\text{বা, } a - b = \sqrt{9m^2} \therefore a - b = \pm 3m$$

অর্থাৎ শুধু $(a + b)$ অথবা $(a - b)$ এর মান বের করতে বলা হলে সরাসরি এদের যেহেতু সূত্র নেই, তাই $(a + b)^2$ বা $(a - b)^2$ এর সূত্র প্রয়োগ করে অংকটি করতে হয়। এক্ষেত্রে উত্তর যাহাই আসুক না কেন তার পূর্বে \pm চিহ্ন বসাতে হয়। কারণ বর্গমূল ধনাত্মক বা ঋণাত্মক উভয়ে হতে পারে।

✍ একটি অংশ গুণ অবস্থায় থাকলে এবং অন্য অংশটি যোগ বিয়োগ অবস্থায় থাকলে, যেমন:

১৩. $x+y = 7$ এবং $xy = 12$ হলে x ও y এর মান কত? [RAKUB (Supervisor)-2017]

a. 3,5

b. 2,3

c. 9,3

d. 3,4

Ans: d

✦ টিপস: এরূপ ক্ষেত্রে যোগ বিয়োগ নিয়ে আগে ভাবলে অংক করা সহজ হবে না। তাই আগে গুণের অংশটি নিয়ে ভাবুন।

✍ সমাধান:

এখানে দ্বিতীয় অংশে $xy = 12$, নিয়ে আগে এভাবে ভাবুন, কি কি গুণ করলে 12 হয়। $6 \times 2 = 12$, আবার $3 \times 4 = 12$, আবার $12 \times 1 = 12$, কিন্তু সংখ্যা দুটি যোগ করে যেন 7 হয়। তাহলে $4 + 3 = 7$ ই গ্রহণযোগ্য, উত্তর: 4 এবং 3

১৪. $x + y = 17$ এবং $xy = 60$ হলে, $(x - y)^2$ এর মান কত? [শিক্ষক নিবন্ধন, প্রিন্সিপালস টেস্ট কলেজ পর্যায়-২০১৫]

ক. 49

খ. 64

গ. 36

ঘ. 125

উত্তর: ক

✍ লিখিত সমাধান:

$$\text{আমরা জানি } (x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy \quad (x+y) \text{ এবং } xy \text{ এর মান দেয়া আছে তাই এই সূত্র}$$

$$\text{বা, } (x-y)^2 = 17^2 - 4 \times 60 \quad (\text{মান বসিয়ে})$$

$$\text{বা, } (x-y)^2 = 289 - 240 \therefore (x-y)^2 = 49$$

✦ মুখে মুখে করতে এভাবে ভাবুন $= x+y = 17$, $xy = 60$ [60 কে ভাগলে $12 \times 5 = 60$ এবং $12+5 = 17$]

$$\text{তাই } (12-5)^2 = 7^2 = 49$$

উত্তর: 49

১৫. $a+b = 13$ এবং $ab = 36$ হলে $a-b$ -এর মান কত? [স্বরাষ্ট্র মন্ত্রণা: কারা তত্ত্বা:-০৫]

a. 45

b. 20

c. 9

d. 5

Ans: d

✍ সমাধান:

$12 \times 3 = 36$ কিন্তু 12 ও 3 যোগ করলে 13 হয় না। আবার $18 \times 2 = 36$ ।

কিন্তু $18+2 = 20$ এটাও না। $9 \times 4 = 36$ এবং $9+4 = 13$ এটাই সঠিক। তাহলে উত্তর হলো $9 - 4 = 5$

□ নিজে করুন:

১৬. $x+y = 6$, $xy = 8$ then $(x-y)^2 = ?$ [যুব উন্নয়ন অধিদপ্তর (ক্যাশিয়ার)-২০১৮]

A. 3

B. 4

C. 9

D. 12

Ans: B

১৭. যদি $x-y = 1$, $xy = 56$ হয় তবে $x+y =$ কত? [মাধ্যমিক সহ: শিক্ষক-০০]

a. 35

b. 20

c. 15

d. 5

Ans: c

১৮. $x+y = 5$ & $x-y = 3$ then $2x^2 + 2y^2 = ?$ [রাকাব, (সুপারভাইজার)-১৫] [Help: $2.4^2 + 2.1^2 = 2.16 + 2.1 = 34$]

a. 34

b. 20

c. 15

d. 5

Ans: a

১৯. $a+b = 7$ এবং $a^2+b^2 = 25$ হলে নিচের কোনটি ab -এর মান হবে? (৩০তম বিসিএস)

a. 35

b. 12

c. 9

d. 5

Ans: b

☞ টিপস: এমনভাবে ভাবা শুরু করবেন যেন খুব বেশি ভাবতে না হয়। বেশি বেশি প্রাকটিস করলে স্বাভাবিকভাবেই আপনার আইডিয়া হয়ে যাবে। তাই এই অধ্যায়ের শেষে যে প্রাকটিসগুলো দেয়া আছে তা ভালোভাবে করতে থাকুন।

☞ সমাধান:

দেখুন, দুটি সংখ্যার যোগফল 7 এবং তাদের বর্গের যোগফল 25। তাহলে সংখ্যা দুটির কোন একটি অবশ্যই 5 অথবা 6 হতে পারে না। কেননা 5 এবং 6 এর বর্গ 25 এর সমান বা তার থেকে বেশি। কিন্তু প্রশ্নানুযায়ী দুটি সংখ্যার বর্গের যোগফল 25 হতে হবে। তাহলে $4+3 = 7$ হতে পারে। কিন্তু দ্বিতীয় শর্তটিও পূরণ হচ্ছে কি না তা দেখে নিতে হবে।

$4^2+3^2=16+9 = 25$ । তাই a এবং b এর মান হচ্ছে 4 ও 3। তাহলে ab এর মান হবে, $4 \times 3 = 12$

২০. $a-b = 3$ and $a^2 + b^2 = 29$ find the value of ab (RAKUB Senior off:-2015)

a. 10

b. 12

c. 15

d. 18

Ans: a

☞ ব্যাখ্যা:

সূত্র ছাড়াই এভাবে ভাবুন দুটি সংখ্যা বিয়োগ করে ২ হবে এবং তাদের বর্গের সমষ্টি ২৯ হবে। এখন ২৯ এর নিচে বর্গ সংখ্যার মধ্যে ৫ এর বর্গ ২৫ এবং ২ এর বর্গ ৪ যোগ করলে ২৯ হয় এবং বিয়োগ করলে $৫-২ = ৩$ হয়। সুতরাং এদের গুণফল ab -এর মান $৫ \times ২ = ১০$ ।

২১. $a^2 - b^2 = 45$ এবং $a-b = 3$ হলে ab -এর মান কত? (পরিকল্পনা মন্ত্রণা:সহ:পরি:-০৬)

ক. ৬০

খ. ৬৪

গ. ৫৪

ঘ. ৪৫

উত্তর: গ

[Help: অপশন দেখে $9 \times 6 = 54$ এবং $9^2 - 6^2 = 81 - 36 = 45$ আবার $9 - 6 = 3$]

◆ সূত্র প্রয়োগ করে সমাধান:

(যে অংকগুলো সূত্র ছাড়া করা সম্ভব নয় সেগুলো সূত্র প্রয়োগ করে করতে হবে) যেমন:

২২. $x^2+y^2 = 8$ এবং $xy = 7$ হলে, $(x+y)^2$ -এর মান কত? (২০তম বিসিএস) + [RAKUB (Supervisor)-2017]

সূত্রের সাহায্যে সমাধান:

$$(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy \\ = 8+2 \cdot 7 = 8+14 = 22 \text{ Ans:}$$

☞ Attention: সব অংকের লিখিত নিয়ম না খোঁজাই ভালো। কেননা লিখিত প্রশ্ন এবং এমসিকিউ প্রশ্নের মধ্যে অনেক পার্থক্য আছে। কতটুকু পার্থক্য আছে তা বোঝার জন্য বিভিন্ন পরীক্ষার লিখিত এবং এমসিকিউ প্রশ্ন দেখে তুলনা করুন।

২৩. $a+b = \sqrt{3}$ এবং $a-b = \sqrt{2}$ হলে $8ab(a^2+b^2) = ?$ (BKB Sen.Off-2015)

a. 12

b. 10

c. 8

d. 5

Ans: d

☞ Solution:

$$8ab(a^2+b^2) \\ = 4ab \cdot 2(a^2+b^2) \\ = \{ (a+b)^2 - (a-b)^2 \} \{ (a+b)^2 + (a-b)^2 \} \\ = \{ (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 \} \{ (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 \} = (3-2)(3+2) = 5 \cdot 1 = 5$$

২৪. যদি $(x-y)^2 = 14$ এবং $xy = 2$ হয় তবে $x^2 + y^2 =$ কত?

ক) 12

খ) 14

গ) 16

ঘ) 18

উত্তর: ঘ

☞ সমাধান:

দেয়া আছে, $(x-y)^2 = 14$ এবং $xy = 2$

আমরা জানি,

$$x^2 + y^2 \Rightarrow (x-y)^2 + 2xy \Rightarrow 14 + 2 \times 2 \Rightarrow 14 + 4 = 18 \quad \therefore x^2 + y^2 = 18$$

৩৩. There are 8 more men than women on board of directors of a company. If there are 20 members on the board, how many are men? (Bangladesh Bank-10) [Help: $(20+8) \div 2$]
 a. 19 b. 30 c. 12 d. 14 Ans: d

পদ্ধতি - ০২: বর্গের সূত্রের প্রয়োগ

□ সংশ্লিষ্ট সূত্রসমূহ:

$$(i) a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \quad (ii) a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab \quad (iii) 2(a^2 + b^2) = (a+b)^2 + (a-b)^2$$

□ বর্গ বের করা:

৩৪. $2x+3y$ -এর বর্গ কত? (প্রাথমিক বিদ্যালয় প্রধান শিক্ষক-৯৯)

a. $4x^2+12xy+9y^2$ b. $4x+12xy+9y^2$ c. $4x^2+12x+9y^2$ d. $4x^2+12xy+9y^2$ Ans: d

◆ টিপস: ধরুন আপনাকে বলা হলো ৩ এর বর্গ কত? তখন সরাসরি এর উত্তর $৩^2 = ৯$ অর্থাৎ যে কোন সংখ্যার উপর ক্যার দিলে তার বর্গ কত তা বের হয়। তেমনি বীজগণিতের যে কোন রাশির উপর ক্যার দিলে সেই রাশিটির বর্গ কত তা বের হবে। কিন্তু এক্ষেত্রে সূত্র প্রয়োগ করে সর্বশেষ মানটি বের করতে হবে।

✍ সমাধান:

$2x+3y$ -এর বর্গ হল

$$(2x+3y)^2 \quad [(a+b)^2 \text{ এর সূত্র প্রয়োগ করতে হবে}]$$

$$= (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

□ নিজে করুন:

৩৫. $(2x+1)$ -এর বর্গ কত? (আবহাওয়া অধিদপ্তর সহ: পরিচালক-৯৫)

a. $4x^2+1$ b. $4x^2+4x$ c. $4x^2+4x+1$ d. $4x+4x+1$ Ans: c

৩৬. ৯৯৯ সংখ্যাটির বর্গ নির্ণয় করুন? (বন ও পরিবেশ মন্ত্রণা: সহ: পরি: ০৭)

a. 998001 b. 99001 c. 99001 d. 99800 Ans: a

□ বর্গের মান বের করা:

৩৭. $a - \frac{1}{a} = 3$ হলে $a^2 + \frac{1}{a^2}$ এর মান কত? (মাধ্য: সহ: প্র: শি: -০৩)

a. 11 b. 12 c. 14 d. 16 Ans: a

✍ Solution: $a^2 + \frac{1}{a^2}$

যখন $(a + b)$ এর মান দেয়া থাকবে তখন $(+)$ এর সূত্রটি প্রয়োগ করতে হবে কিন্তু $(a - b)$ এর মান দেয়া থাকলে $(-)$ এর সূত্রটি প্রয়োগ করতে হবে।

$$= a^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2 \quad \left[\frac{1}{a^2} \text{ কে } \left(\frac{1}{a}\right)^2 \text{ লিখলে একই মান বোঝায়} \right]$$

$$= \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a} \quad \left[\text{এখানে } a - \frac{1}{a} \text{ এর মান দেয়া আছে তাই } (-) \text{ এর সূত্রটি প্রয়োগ করা হয়েছে আর মনে রাখবেন}$$

ভেতরে $(-)$ হলে বাইরে $(+)$ হবে, এবং ভেতরে $(+)$ হলে বাইরে $(-)$ হবে।]

◆ **Shortcut:** এ ধরনের মান নির্ণয়ের অংক খুব দ্রুত করতে হলে একটা বিষয় মনে রাখবেন যে, কিসের মান দেয়া আছে? যদি $(-)$ এর মান দেয়া থাকে তাহলে যে মানটি দেয়া থাকবে তার বর্গ করে ২ যোগ করতে হবে। আবার যদি $(+)$ এর মান থাকে তাহলে তার বর্গ করার পর ২ বিয়োগ করতে হবে। সরাসরি, $= 3^2 + 2 = 9 + 2 = 11$

বা, $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 49$ বা, $\left(a + \frac{1}{a}\right) = \sqrt{49} \therefore \left(a + \frac{1}{a}\right) = \pm 7$ [যে কোন সংখ্যার উপর $\sqrt{\quad}$ দিলে তার উত্তরটিতে \pm হয়। কেননা $+7 \times +7 = 49$ আবার $-7 \times -7 = 49$] **Ans: ± 7**

□ নিজে করুন:

৪৫. $a^2 + \frac{1}{a^2} = 51$ হয়, তবে $a - \frac{1}{a}$ এর মান কত? [এখানে (-) এর মান বের করতে বলা হয়েছে তাই (+) এর সূত্র প্রয়োগ করতে হবে] উত্তর: ± 7

আরো দ্রুত করতে চাইলে নিচের বক্সের লিখাটি পড়ুন।

Attention : যার মান দেয়া থাকবে এবং যার মান বের করতে হবে এ দুটো বিষয় খুব ভালোভাবে দেখতে হবে। যদি (+) এর মান দেয়া থাকে এবং (-) এর মান বের করতে বলা হয়, তাহলে প্রথমে (+) অথবা (-) এর সূত্র প্রয়োগ করার পর সমীকরণের ডানপক্ষের মানটি থেকে 2 যোগ অথবা বিয়োগ করে তার বর্গমূল বের করতে হবে।

৪৬. $a^2 + \frac{1}{a^2} = 83$ হয়, তবে $a - \frac{1}{a}$ এর মান কত? **Ans: ± 9**

☞ সমাধান:

মাথা খাঁটালে 2 সেকেন্ডে হয়ে যাবে। কোন সূত্রের প্রয়োজন নেই। যেমন: যদি কোন মান 83 দেয়া থাকে তাহলে 83 এর সাথে 2 যোগ করলে 85 হয় যা বর্গ সংখ্যা নয়। তাই সূত্র ছাড়াই বুঝতে হবে 83 থেকে 2 বিয়োগ করলে 81 আসবে যা বর্গ সংখ্যা। এখন 81 এর বর্গমূল হলো ± 9 | এভাবে ভেবে করার চেষ্টা করুন: সূত্র দিয়ে করলেও করতে পারেন।

৪৭. $a^2 + \frac{1}{a^2} = 18$ হয়, তবে $a - \frac{1}{a}$ এর মান কত? **Ans: ± 4**

□ টিপস: 18 এর সাথে 2 যোগ করলে 20 যা বর্গ সংখ্যা নয়। তাই 2 বিয়োগ করলে 16 হয়। যা একটি বর্গ সংখ্যা এবং 16 এর বর্গমূল হলো ± 4 ।

৪৮. $a^2 + \frac{1}{a^2} = 2$ হলে $a - \frac{1}{a}$ কত? (গ্রাই: সহ: শি: নি: পরীক্ষা-২০১৪ (অনু: ২০১৮))

a. 3

b. 0

c. 1

d. 2

Ans: b

☞ **Solution:** $a^2 + \frac{1}{a^2} = 2$ বা, $\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a} = 2$ বা, $\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = 2 - 2 \therefore a - \frac{1}{a} = 0$

□ নিজে করুন:

৪৯. $a^2 + \frac{1}{a^2} = 66$ হয়, তবে $a - \frac{1}{a}$ এর মান কত? **Ans: ± 8**

৫০. $P + \frac{1}{P} = 2$ হলে $P^2 + \frac{1}{P^2}$ এর মান কত? (বাংলাদেশ ডাক বিভাগ (মেট্রোপলিটন সার্কেল) পরিদর্শক ২০১৬)

a. 2

b. 4

c. 6

d. 8

Ans: a

☞ **Solution:**

$$P^2 + \frac{1}{P^2} = \left(P + \frac{1}{P}\right)^2 - 2 \cdot P \cdot \frac{1}{P} = (2)^2 - 2 = 4 - 2 = 2$$

৫১. $x - \frac{1}{x} = 5$ হলে $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ এর মান কত? [BSC- Combined-(So)- Exam - 2018 (Set-A)]

- a. ২৯ b. ২৭ c. ২৫ d. ৩২ **Ans: a**

Solution:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = 5^2 + 4 = 25 + 4 = 29$$

৫২. $2x + \frac{2}{x} = 3$ হলে, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ মান কত? [IBBL-(ATO)-2017]

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{6}{10}$ **উত্তর: B**

সমাধান:

দেওয়া আছে, $2x + \frac{2}{x} = 3$ বা, $2\left(x + \frac{1}{x}\right) = 3$ বা, $x + \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$

সুতরাং: $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 = \frac{9}{4} - 2 = \frac{9-8}{4} = \frac{1}{4}$ **উত্তর: $\frac{1}{4}$**

□ (a²) এর স্থলে (a⁴) থাকলে:

এক্ষেত্রে নিয়ম একই শুধু একই সূত্র দু'বার সূত্র প্রয়োগ করতে হবে। যেমন:

৫৩. $a \cdot \frac{1}{a} = 2$ হয়, তবে $a^4 + \left(\frac{1}{a}\right)^4 =$ কত? [প্রাক প্রাথমিক সহ-শিক্ষক (মেঘনা): ২০১৩]

- ক. 36 খ. 32 গ. 34 ঘ. 40 **উত্তর: গ**

সমাধান:

$$a^4 + \left(\frac{1}{a}\right)^4 = \left(a^2\right)^2 + \left(\frac{1}{a^2}\right)^2 \quad (\text{পাওয়ার } 4 \text{ কে ভেঙ্গে দুটো } 2 \text{ স্ফায়ার বানানো হয়েছে যেন সূত্র প্রয়োগ করা যায়।})$$

$$= \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 - 2 \cdot a^2 \cdot \frac{1}{a^2} \quad (\text{প্রথম বার সব সময় } + \text{ এর সূত্র প্রয়োগ করতে হবে, নতুবা মান বসানো যাবে না})$$

$$= \left\{ \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a} \right\}^2 - 2 \quad [\text{ভেতরের প্রথম অংশটিতে প্রশ্নানুযায়ী } (-) \text{ এর সূত্র প্রয়োগ করা হয়েছে}]$$

$$= (2^2 + 2)^2 - 2$$

$$= (4 + 2)^2 - 2 = (6)^2 - 2 = 36 - 2 = 34$$

Shortcut: এই অংকটি এত কিছু না লিখে ২ সেকেন্ডেই উত্তর বলে দেয়ার জন্য এই নিয়মের শেষ পর্যন্ত পড়ুন।

Ans: 34

Key point : (+) অথবা (-) যারই মান দেয়া থাকে প্রথমবার + এর সূত্র প্রয়োগ করে তারপর যার মান দেয়া থাকবে সে অনুযায়ী সূত্র প্রয়োগ করতে হবে। কারণ প্রথমেই $a^2 - b^2$ চলে আসলে মান বসানো সম্ভব হবে না।

Shortcut: পাওয়ার 4 থাকলে যেহেতু প্রথমে (+) এর সূত্র প্রয়োগ করতে হয়। তাই প্রতিবার প্রথমে 2 বিয়োগ করতে হবে, মনে রাখবেন সব সময় শেষে 2 বিয়োগ। এখন ভেতরের অংশে ((-) বর্গ করে ২ যোগ তারপর বর্গ করে ২ বিয়োগ এবং (+) থাকলে বর্গ করে ২ বিয়োগ তারপর বর্গ করে ২ বিয়োগ। নিচের প্রশ্নটি দেখুন।

৫৪. $x + \frac{1}{x} = 3$ হলে $x^4 + \left(\frac{1}{x}\right)^4$ কত? (প্রাথমিক বিদ্যালয় প্রধান শিক্ষক ২০০৯ (গোলাপ))

ক.47

খ.51

গ.27

ঘ.49

উত্তর: ক

শর্টকাট অনুযায়ী সমাধান:

প্রথমেই শেষে - 2 বসান, কারণ সবসময় প্রথম বার + এর সূত্র প্রয়োগ করতে হবে।

তারপর মান দেখুন, এই অংকে (+) এর দেয়া আছে, তাই ভেতরেও - 2 হবে। অর্থাৎ দুবার - 2 হবে। এভাবে

$\{(3^2-2)^2-2$ (অবশ্যই মনে রাখবেন, সেকেন্ড ব্রাকেটের উপরেও স্কার দিতে হবে)

$= (9-2)^2-2 = 7^2-2 = 49-2 = 47$

আরো দ্রুত করার জন্য এভাবে ভাবুন:

যেহেতু সবসময় শেষে 2 বিয়োগ করতে হচ্ছে এবং তার আগের সংখ্যাটির বর্গ করতে হয়, তাই বুঝতে হবে একটি বর্গ সংখ্যা থেকে 2 বিয়োগ করলে যা আসবে তা - ই উত্তর: এ কারণে উপরের সবগুলো প্রশ্নের উত্তর হবে এরকম সংখ্যায় 2, 7, 14, 23, 34, 47, 119, 142 অর্থাৎ বর্গ সংখ্যার থেকে 2 কম। এখন আপনার পছন্দের উত্তরটি সহজেই বাছাই করতে পারবেন।

নিজে করুন:

৫৫. $m + \frac{1}{m} = 2$ হলে $m^4 + \frac{1}{m^4} =$ কত? (প্রাথমিক প্রধান শিক্ষক ২০০৯ (জবা))

Ans: 2

৫৬. $x - \frac{1}{x} = 4$ হলে $x^4 + \frac{1}{x^4} =$ কত? (প্রাথমিক সহকারী শিক্ষক ২০১০ (করতোয়া))

Ans: 322

৫৭. $x + \frac{1}{x} = 3$ হলে $x^4 + \left(\frac{1}{x}\right)^4$ কত? (প্রাথমিক বিদ্যালয় প্রধান শিক্ষক ২০০৯ (গোলাপ))

ক.47

খ.51

গ.27

ঘ.49

উত্তর: ক

৫৮. $p - \frac{1}{p} = 3$ হলে $p^4 + \frac{1}{p^4} =$ কত? (বাংলাদেশ রেলওয়ের জুনিয়র অডিটর-২০১০)

উত্তর: 119

একটু ব্যতিক্রম :

৫৯. $x + \frac{1}{x} = 4$ হলে, $\frac{x}{x^2 - 3x + 1}$ এর মান কত? (সড়ক ও জনপথ অধিদপ্তরের উপসহকারী প্রকৌশলী-২০১০)

সমাধান:

এখানে দ্বিতীয় অংশটিতে এমন একটি রাশির মান বের করতে বলা হয়েছে যার মধ্যে সূত্রের প্রয়োগ করে প্রদত্ত মানটি বসানো কঠিন। তাই এধরনের অংকের ক্ষেত্রে প্রদত্ত মানটি থেকেই অংকটি করা শুরু করতে হবে। এবং যার মান বের করতে বলা হয়েছে তার কথা মাথায় রাখতে হবে।

এখানে দেয়া আছে, $x + \frac{1}{x} = 4$ বা, $\frac{x^2 + 1}{x} = 4$ বা, $x^2 + 1 = 4x$ (এখন এই মানটি প্রদত্ত রাশিটিতে বসাতে হবে)

$\therefore \frac{x}{x^2 - 3x + 1} = \frac{x}{x^2 + 1 - 3x}$ ($x^2 + 1 = 4x$ বসানোর জন্য নিচে $x^2 + 1$ কে পাশাপাশি লিখা হয়েছে।)

$$= \frac{x}{4x-3x} \quad (x^2+1=4x \text{ বসিয়ে}) = \frac{x}{x} = 1$$

Ans: 1

৬০. $x + \frac{1}{x} = 2$ হলে, $\frac{x}{x^2-x+1}$ এর মান কত? [বাংলাদেশ বেলাওয়ে (সহ: টেশন মটার)-২০১৮]

প্রসমাধান:

দেয়া আছে, $x + \frac{1}{x} = 2$ বা, $\frac{x^2+1}{x} = 2$ বা, $x^2+1 = 2x$ (এই মানটিকে এখন বসানো যাবে)

$$\therefore \frac{x}{x^2-x+1} = \frac{x}{x^2+1-x} = \frac{x}{2x-x} = \frac{x}{x} = 1$$

Ans: 1

□ নিজে করুন:

৬১. যদি $x + \frac{1}{x} = 5$ হয়, তবে $\frac{x}{x^2+x+1}$ এর মান কত? [ATEO (কেটা) পরীক্ষা-১৫]

Ans: $\frac{1}{6}$

৬২. $a - \frac{6}{a} = 1$ হলে, $\frac{6}{a^2-a-1}$ এর মান কত? (সংস্থাপন মন্ত্রণালয়ের প্রশাসনিক কর্মকর্তা-২০০৭)

Ans: $\frac{6}{5}$

(যেভাবে মেনালা মান বসানো যাবে সেভাবে করার চেষ্টা করুন। মুখস্ত করার চেষ্টা বাদ দিন)

পদ্ধতি - ০৩: ঘন-এর সূত্রের প্রয়োগ

এ সংক্রান্ত সূত্রাবলী:

- (i) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- (ii) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- (iii) $a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$
- (iv) $a^3-b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$
- (v) $a^3+b^3+c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2 - ab - bc - ca)$

□ ঘন এর উপর বিভিন্ন প্রশ্ন:

৬৩. $a^3+b^3 =$ কত? (সমবায় দপ্তরে বি:শ্রে:অফি:-৯৭) (সরাসরি সূত্রটিই দিতে হবে) $(a+b)^3 - 3ab(a+b)$

৬৪. $a+b = 3$ এবং $ab = 3$ হলে a^3+b^3 -এর মান কত? (৬ষ্ঠ সি:নি:ও প্র:পরী:-১০)

প্রসমাধান:

$$\begin{aligned} a^3+b^3 &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) \quad \text{[প্রশ্নে যেহেতু } a+b \text{ এবং } ab \text{ এর মান দেয়া আছে।]} \\ &= 3^3 - 3 \cdot 3 \cdot 3 \quad \text{[মান বসিয়ে]} \\ &= 27 - 27 = 0 \end{aligned}$$

Ans: 0

৬৫. $x-y = 4$ হলে, নিচের কোন উক্তিটি সঠিক? [IBBL-(ATO)-2017]

- A. $x^3 - y^3 - 4xy = 64$
- B. $x^3 - y^3 - 12xy = 12$
- C. $x^3 - y^3 - 3xy = 64$
- D. $x^3 - y^3 - 12xy = 64$

Ans: D

প্রসমাধান:

সবগুলো অপশনে যেহেতু $x^3 - y^3$ দেয়া আছে সুতরাং এটা নিয়েই কাজ শুরু
 $x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y) = 4^3 + 3xy \cdot 4 = 64 + 12xy$
 দেখা যাচ্ছে 64 এর সাথে অতিরিক্ত $+12xy$ এসে গেছে তাই এই $+12xy$ কে বাদ দেয়ার জন্য $-12xy$ নিতে হবে। যা শুধুমাত্র অপশন D তে আছে। $x^3 - y^3 - 12xy = 64$

□ নিজে করুন: (যার মান দেয়া আছে সে অনুযায়ী সূত্রটি প্রয়োগ করতে হবে)

৬৬. $a+b = 5$ এবং $ab = 3$ হলে a^3+b^3 -এর মান কত? (প্রা:বি:সহ:শি:০৮)

Ans:80

□ ভগ্নাংশ আকারে আসলে:

৬৭. $a + \frac{1}{a} = 3$ হলে $a^3 + \frac{1}{a^3}$ এর মান কত? (৩০তম বিসিএস; প্রাথমিক সহকারী শিক্ষক (করতোয়া) ২০১২)

✍ Solution:

$$a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3 \cdot a \cdot \frac{1}{a} \left(a + \frac{1}{a}\right) \quad [\text{সরাসরি ঘন এর সূত্র প্রয়োগ করে মান বসিয়ে দিলেই উত্তর বের হবে।}]$$

$$= 3^3 - 3 \cdot 3 = 27 - 9 = 18$$

Ans: 18

৬৮. $x - \frac{1}{x} = 7$ হলে, $x^3 - \frac{1}{x^3}$ এর মান কত? (৩২তম বিসিএস (বিশেষ))

Ans:364

$$\text{ব্যাখ্যা- } x^3 - \left(\frac{1}{x}\right)^3 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right) = 7^3 + 3 \cdot 7 = 343 + 21 = 364$$

[Note: মনে রাখবেন সূত্রটিতে ব্রাকেটের ভেতরে (+) থাকলে বাইরে (-), আর ভেতরে (-) হলে বাইরে (+) বসে]

□ নিজে করুন: (নিচের সবগুলো অংক একই, শুধু ভিন্ন ভিন্ন মান দেয়া আছে। নিজে থেকে চেষ্টা করুন)

৬৯. $a - \frac{1}{a} = 3$ হলে, $a^3 - \frac{1}{a^3}$ এর মান কত? (প্রাথমিক: প্রধান শি:০৯)

ক.18

খ.24

গ.36

ঘ.42

উত্তর: গ

৭০. $a + \frac{1}{a} = 3$ হলে, $a^3 + \frac{1}{a^3}$ এর মান কত? (প্রাথমিক: সহ: শি:১২)

ক.12

খ.18

গ.21

ঘ.27

উত্তর: খ

৭১. $a - \frac{1}{a} = 1$ হলে, $a^3 - \frac{1}{a^3}$ এর মান কত? (৯ম-১০ম শ্রেণী, অনু: ৩.২ এর ১২)

Ans:4

৭২. $p + \frac{1}{p} = 5$ হলে $p^3 + \frac{1}{p^3}$ কত?

Ans:110

✍ Shortcut: বুঝে বুঝে করলে স্বাভাবিক ভাবেই সময় কম লাগবে। নিচের উদাহরণের শর্টকাট সমাধানটি লক্ষ্য করুন।

৭৩. $x - \frac{1}{x} = 2$ হলে, $x^3 - \frac{1}{x^3}$ এর মান কত?

$$\text{ব্যাখ্যা- } x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right) = 2^3 + 3 \times 2 = 8 + 6 = 14$$

Ans:14

✍ Shortcut: যেহেতু (-) এর মান দেয়া আছে 2, তাই সরাসরি $2^3 + 3 \cdot 2 = 8 + 6 = 14$

(বেশি বেশি প্রাকটিস করলে সূত্র ছাড়াই নিজ থেকে খুব দ্রুত পারবেন। তাই শর্টকার্টের আগে প্রাকটিস করতে থাকুন)

৭৪. $x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$ হলে, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ এর মান কত?

সমাধান: দেয়া আছে, $x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$

$\therefore x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right)$ (+ এর মান দেয়া আছে তাই ভেতরে + এবং 3এর পূর্বে -)

$= (\sqrt{5})^3 - 3\sqrt{5}$

$= \sqrt{5} \cdot (\sqrt{5})^2 - 3\sqrt{5}$ ($\sqrt{\quad}$ যুক্ত যে কোনো সংখ্যার উপর কিউব থাকলে, একটিকে বর্গ করতে হয়)

$= 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$ (5টি $\sqrt{5}$ থেকে 3টি $\sqrt{5}$ বিয়োগ করতে হবে) $= 2\sqrt{5}$ **Ans: $2\sqrt{5}$**

□ **Note:** $\sqrt{\quad}$ (root) যুক্ত যে কোনো সংখ্যার উপর কিউব অর্থাৎ power³ থাকলে, একটিকে বর্গ করতে হয়
 কেন: $(\sqrt{2})^3 = (\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, এই নিয়মটি যে কোন সংখ্যার ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য। যেমন: $(\sqrt{5})^3 = 5\sqrt{5}$

৯৫. $x \cdot \frac{1}{x} = \sqrt{5}$ হলে, $x^3 \cdot \frac{1}{x^3} =$ এর মান কত?

Shortcut: (-) এর মান দেয়া আছে তাই $(\sqrt{5})^3 + 3\sqrt{5} = 5\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$

Ans: $8\sqrt{5}$

৯৬. $x + \frac{1}{x} = \sqrt{3}$ হলে, $x^3 + \frac{1}{x^3} =$ এর মান কত? [প্রাথমিক সহ: শি: ১০(করতোয়া)]

ক. $3\sqrt{3}$

খ. 0

গ. $2\sqrt{3}$

ঘ. 9

উত্তর: খ

Shortcut: (+) এর মান দেয়া আছে তাই $(\sqrt{3})^3 - 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 0$

(বিস্তারিত সমাধান করার জন্য এই পদ্ধতির যে অংকগুলোর বিস্তারিত সমাধান করে দেয়া আছে সেগুলো দেখুন)

□ মাথা ঝাঁটান:

৯৭. $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 3$ হলে $a^3 + \frac{1}{a^3}$ এর মান কত? [পররাষ্ট্র মন্ত্রণালয়ের ব্যক্তিগত কর্মকর্তা: ০৬]

ক. 0

খ. 1

গ. 3

ঘ. 9

Ans: ক

[Help: $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 3$, বা, $a + \frac{1}{a} = \sqrt{3}$ এনে ছবছ আগের নিয়মে করুন]

৯৮. $a - \frac{1}{a} = 3$ হলে $a^3 - \frac{1}{a^3}$ এর মান কত? [প্রতিরক্ষা মন্ত্রণালয়ের সহ: পরি: - ২০১৮]

(ক) ৪

(খ) ১৮

(গ) ২৭

(ঘ) ৩৬ **উত্তর: ঘ**

সমাধান:

$a^3 - \frac{1}{a^3} = \left(a - \frac{1}{a}\right)^3 + 3 \cdot a \cdot \frac{1}{a} \left(a - \frac{1}{a}\right) = 3^3 + 3 \cdot 3 = 27 + 9 = 36$

□ বিবিধঃ

৭৯. $x+y = 2$ এবং $x^2+y^2 = 4$ হলে x^3+y^3 এর মান কত? (থানা শি:অফিসার-০৫)

সমাধান:

দেওয়া আছে, $x+y = 2$ এবং $x^2+y^2 = 4$ (এই দুটি মান সরাসরি x^3+y^3 এর সূত্রে প্রয়োগ করা যায় না) তাই একটু ঘুরিয়ে অন্য সূত্র প্রয়োগ করে x^3+y^3 এর মান বের করতে হবে। নিচে দেখুন।

আমরা জানি,

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$$

$$\text{বা, } 4 = (2)^2 - 2xy$$

$$\text{বা, } 4 = 4 - 2xy$$

$$xy = 0 \text{ (} xy \text{ এর মান বের করার পর } x^3 + y^3 \text{ এর মান বের করা সম্ভব।)}$$

$$\text{এখন, } x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = (2)^3 - 3 \times 0 \times 2 = 8$$

Ans: 8

□ নিজে করুন:

৮০. $x^3 - y^3 = 513$ এবং $x - y = 3$ হলে xy -এর মান কত? (প্রা:বি:প্র:শি:০৯)

Ans: 54

[Direction: $x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y)$ বা, $513 = 3^3 + 3xy \cdot 3$]

৮১. $a + b = c$ হলে $a^3 + b^3 + 3abc$ -এর মান কত? (প্রা:বি:প্র:শি:০৮)

টিপস: এধরনের অংকে প্রথমে প্রদত্ত রাশিটির প্রথম অংশটির সূত্র প্রয়োগ করুন, পরবর্তীতে বাকী অংশের কাজ করুন:

সমাধান:

দেয়া আছে, $a + b = c$

$$\therefore a^3 + b^3 + 3abc = (a + b)^3 - 3ab(a + b) + 3abc = c^3 - 3abc + 3abc \text{ (} a + b = c \text{ বসিয়ে)} = c^3 \text{ Ans: } c^3$$

৮২. $x - y = 3$ হলে $x^3 - y^3 - 9xy$ -এর মান কত? (প্রা:বি:প্র:শি:০৮)

Ans: 27

সমাধান:

$$x^3 - y^3 - 9xy$$

$$= (x - y)^3 + 3xy(x - y) - 9xy \text{ [প্রথম অংশ } x^3 - y^3 \text{ এর সূত্র প্রয়োগ করে শেষে } -9xy \text{ রেখে দেয়া হয়েছে]}$$

$$= 3^3 + 3xy \cdot 3 - 9xy \text{ [} x - y = 3 \text{ বসিয়ে]} = 27 + 9xy - 9xy = 27$$

□ নিজে করুন:

৮৩. $x + y = 3$ এবং $xy = 1$ হলে $x^3 + y^3 + 3xy$ -এর মান কত? (বিশেষ শি:নি:পরী:-১০)

Ans: 21

৮৪. $a + b + c = 0$ হলে $a^3 + b^3 + c^3$ এর মান কত? $3abc$ [১০ম বিসিএস, সাব-রেজিস্টার - ২০১৬]

ক. ০

খ. ১

গ. $3abc$

ঘ. abc

উত্তর: গ

সমাধান:

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$$

$$= 0 \times (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc = 0 + 3abc = 3abc$$

□ নিজে করুন:

৮৫. $p + q + r = 0$ হলে, $p^3 + q^3 + r^3$ এর মান কত? (প্রাথমিক প্রধান শিক্ষক - ০৯ গোলাপ)

Ans: $3pqr$

৮৬. $x + y + z = 0$ হলে, $x^3 + y^3 + z^3$ এর মান কত?

Ans: $3xyz$

পদ্ধতি -০৪: পূর্ণবর্গ রাশি তৈরী : (Perfect square)

□ পূর্ণ বর্গ বিষয়টি আগে বুঝে নিন:

যে সংখ্যাগুলোর বর্গমূল পূর্ণ সংখ্যায় বের করা যায় সেগুলো পূর্ণবর্গ সংখ্যা। যেমন: 9, 16, 25, 36, 64 ইত্যাদি। কিন্তু 10, 15, 24, এই সংখ্যাগুলো পূর্ণবর্গ সংখ্যা নয়। কেননা এদের বর্গমূল পূর্ণ সংখ্যায় নেই। এখন যদি বলা হয় 15 এর সাথে কত যোগ করলে সংখ্যাটি পূর্ণবর্গ হবে সেক্ষেত্রে 15 এর পরপরই পূর্ণবর্গ সংখ্যাটি হলো 16 তাই 15 এর সাথে 1 যোগ করলে তা পূর্ণ বর্গ হবে।

কোন সংখ্যাকে পূর্ণবর্গ বানাতে যা ঘটিত বা অতিরিক্ত থাকে তা যোগ বা বিয়োগ করার মাধ্যমে ঐ সংখ্যা বা রাশিটিকে পূর্ণবর্গ বানানো যায়।

বীজগণিতের ক্ষেত্রেও বিষয়টি একই। তবে এক্ষেত্রে প্রদত্ত রাশিটিকে নিম্নোক্ত ৪ টি সূত্রের যে কোন একটিতে ফেলতে হবে।

1. $(a+b)^2$ 2. $(a-b)^2$ 3. $(a+b+c)^2$ 4. $(a-b-c)^2$

দরুন, প্রশ্ন করা হলো a^2+2ab এর সাথে কত যোগ করলে তা পূর্ণবর্গ হবে। তাহলে দেখেই বোঝা যাচ্ছে প্রদত্ত রাশিটির সাথে b^2 যোগ করলে তা $(a+b)^2$ এর সূত্রানুযায়ী হবে। যা একটি পূর্ণবর্গ রাশি। তাহলে বোঝা যাচ্ছে প্রদত্ত রাশিটিতে b^2 এর ঘটিত রয়েছে তাই b^2 যোগ করতে হবে। উত্তর: b^2

৮৭. What must be subtracted (বিয়োগ) from a^2-2ab so that the difference is a perfect square?

প্রসমাধান:

সাধারণত a^2-2ab এর সাথে b^2 যোগ করলে রাশিটি একটি পূর্ণবর্গ রাশি হবে।

কিন্তু এখানে বিয়োগ করতে বলায় উত্তর $(-b^2)$ কারণ $(-)(-b^2) = +b^2$

Ans: $-b^2$

৮৮. $(9x^2+16y^2)$ রাশিটির সাথে কত যোগ করলে যোগফল পূর্ণবর্গ হবে? (সর:মাধ্য:বি:সহ:শি:-০৬)

প্রসমাধান:

$9x^2+16y^2$ (রাশিটিতে দুটো সংখ্যায় করার আছে তাহলে বোঝাই যাচ্ছে এরা দুপাশের অংশ, এবং মাঝের সংখ্যাটি নেই)

$= (3x)^2 + \dots + (4y)^2$ [উপরের চারটি সূত্রের সাথে মেলাতে মাঝখানে যে অংশটুকু বসবে তা ই হবে উত্তর]

$= (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 4y + (4y)^2$ [সূত্র অনুযায়ী $2ab = 2 \cdot 3x \cdot 4y$]

$= (3x+4y)^2 - 24xy$ (অর্থাৎ প্রশ্নে প্রদত্ত রাশিটিতে $24xy$ ঘটিত আছে তাই উত্তর হবে $24xy$)

Ans: $24xy$

□ নিজে করুন:

৮৯. What must be added to the expression $(4a^2+9b^2)$ so that the sum is a perfect square?

Ans: $12ab$

৯০. p-এর মান কত হলে $4x^2-px+9$ সংখ্যাটি পূর্ণবর্গ হবে? [একটি বাড়ী একটি খামার -(জেলা সমন্বয়কারী)-২০১৭]

প্রসমাধান: একই গুণু p এর স্থানে কত বসবে তা বের করুন।

$4x^2-px+9$

$= (2x)^2 - px + 3^2$ (যেহেতু মাঝখানে ঘটিত আছে তাই দুপাশের কাজ আগে করতে হবে)

$= (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2$ (যেহেতু মাঝখানে ঘটিত আছে তাই দুপাশের কাজ আগে করতে হবে) $(2x)^2$ হচ্ছে a এবং 3^2 হচ্ছে b, তাই সূত্রানুযায়ী সূত্রের 2 বসানোর পরে a এবং b এর মান বসানো হয়েছে)

$= (2x)^2 - 12x + 3^2$ (দেখা যাচ্ছে p এর জায়গায় 12 বসালে রাশিটি একটি পূর্ণবর্গ রাশিতে পরিণত হবে।)

$= (2x)^2 - 12x + 3^2$

তাই $p = 12$

Ans: 12

৯১. y এর মান কত হলে $16x^2-xy+25$ একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে? [ডাক অধিদপ্তরের এস্টিমেটর-২০১৮]

ক. 30

খ. 40

গ. 50

ঘ. 60

উত্তর : খ

প্রসমাধান:

$16x^2 = (4x)^2$ এবং $25 = 5^2$ ধরে হিসেব করতে গিয়ে মাঝে যা ঘটিত হবে তা ই উত্তর।

৯২. a এর মান কত হলে $(9 - 12x + ax^2)$ রাশিটি একটি পূর্ণ বর্গ হবে? [বিভিন্ন মন্ত্রণালয়ে (ব্যক্তিগত কর্মকর্তা) নিয়োগ-২০১৮]

ক. ৪

খ. ৬

গ. ৪

ঘ. ২

উত্তর: গ

সমাধান:

$$9 - 12x + ax^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2x + (2x)^2 + ax^2 - 4x^2$$

$$\Rightarrow 9 - 12x + ax^2 = (3 - 2x)^2 + ax^2 - 4x^2$$

$$\therefore \text{রাশিটির পূর্ণবর্গ হতে হলে } ax^2 - 4x^2 = 0 \text{ হবে। } \Rightarrow ax^2 = 4x^2$$

$$\therefore a = 4$$

□ নিজে করুন:

৯৩. $16x^2 + px + 25$ রাশিটি পূর্ণবর্গ হতে হলে p এর মান কত হবে? (স্বরাষ্ট্র মন্ত্রণালয়ের অধীন পার্সাপোর্ট ও ইমিগ্রেশন অধিদপ্তর: সহ: পরি:-০৭)

$$[\text{Help: } (4x)^2 + \dots + 5^2]$$

Ans: 40

৯৪. $16x^2 + 16x + 2$ -এর সাথে ন্যূনতম কত যোগ করলে এটি একটি পূর্ণ বর্গ সংখ্যা হবে? (টেলিফোন বোর্ডের সহ: পরি: ৯৫)

সমাধান:

এখানে শেষের ২ কে ভাগানো যায় না তা ২ এর সাথেই কিছু একটা যোগ করে রাশিটিকে পূর্ণবর্গ বানাতে হবে। তাই

$$16x^2 + 16x + 2$$

$(4x)^2 + 2 \cdot 4x \cdot 2 + 2^2$ (যেহেতু ২ কে ভাগানো যায় না তাই মাঝের $16x$ মেলাতে প্রথমে সূত্রের ২ তার পর a এর মান $4x$ এবং শেষে $16x$ মেলাতে ২ গুণ করে বোঝা যাচ্ছে রাশিটিতে b এর মান হবে ২) তাই পরবর্তী b^2 এর জায়গায় 2^2 লিখে বোঝা যাচ্ছে রাশিটি ২ ঘটিত আছে।)

$$(4x)^2 + 16x + 4$$

Ans: 2

৯৫. $9c^2 + 14c$ -এর সাথে কত যোগ করলে যোগফল একটি পূর্ণ বর্গ হবে? (শ্রম ও কর্মসংস্থান মন্ত্রণালয়-০৫)

Ans: $\frac{49}{9}$

সমাধান:

$$9c^2 + 14c$$

$$= (3c)^2 + 2 \cdot 3c \cdot \frac{7}{3} + \left(\frac{7}{3}\right)^2 - \frac{49}{9}$$

[এখানে মাঝের রাশিটি $14c$ কে মেলানোর জন্য, প্রথমে $2 \cdot 3c = 6c$ দিয়ে $14c$ কে ভাগ করে $\frac{7}{3}$ আনা হয়েছে যা b এর মান।]

$$= \left(3c + \frac{7}{3}\right)^2 - \frac{49}{9} \therefore \frac{49}{9} \text{ [অর্থাৎ প্রদত্ত রাশিটির সাথে } \frac{49}{9} \text{ যোগ করলে তা একটি পূর্ণবর্গ রাশিতে পরিণত হবে।]}$$

৯৬. $x^2 - 8x - 8y + 16 + y^2$ এর সঙ্গে কত যোগ করলে যোগফল একটি পূর্ণবর্গ হবে? (৩২তম + ২৬ তম বিসিএস)

□ ব্যাখ্যা:-

$x^2 - 8x - 8y + 16 + y^2$ [এই অংকটিতে অতিরিক্ত রাশির সংখ্যা থাকায় তা $(a+b+c)^2$ এর সূত্রানুযায়ী হবে]

$$= x^2 + y^2 + (-4)^2 + 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot y \cdot (-4) + 2 \cdot (-4) \cdot x - 2xy \text{ [সূত্র মেলানোর জন্য এভাবে সাজানো প্রয়োজন]}$$

$$= x^2 + y^2 + (-4)^2 + 2xy - 8y - 8x - 2xy$$

$$= (x + y - 4)^2 - 2xy$$

সুতরাং পূর্ণ বর্গ করতে হলে $2xy$ যোগ করতে হবে।

উত্তর: $2xy$

পদ্ধতি-০৫: তিনটি রাশির বর্গের সূত্রের প্রয়োগ

প্রসঙ্গান্ত সূত্রাবলী:

(i) $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2 + 2(ab+bc+ca)$

(ii) $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$

(iii) $2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)$ [প্রথম সূত্রটি মুখস্থ রাখুন এবং অন্য দুটি থেকে বের করুন]

প্রশ্নাবলী:

৯৭. $a + b + c = 15$ এবং $a^2 + b^2 + c^2 = 83$ হলে $ab + bc + ca =$ কত? [সরকারী রেলওয়ে সহকারী কমান্ডেট ২০০৭]

টিপস: যার মান বের করতে বলা হবে তাকে বাম পাশে রেখে অন্য দুটির মান বসিয়ে সমাধান করুন।

সমাধান:

দেয়া আছে, $a + b + c = 15$, $a^2 + b^2 + c^2 = 83$

আমরা জানি, $2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)$

বা, $ab + bc + ca = \frac{(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2} = \frac{15^2 - 83}{2} = \frac{225 - 83}{2} = 71$

নিজে করুন:

৯৮. $a + b + c = 9$, $a^2 + b^2 + c^2 = 29$ হলে $ab + bc + ca$ - এর মান কত? [১৬তম বিসিএস]

Ans: 26

৯৯. $a + b + c = 9$ এবং $ab + bc + ca = 31$ হলে $a^2 + b^2 + c^2$ এর মান?-(মহাহিসাব নিরী: ও নিয়: কার্যা ৯৮)

Ans: 19

বিবিধ:

১০০. যদি $y-7 = 12$ হয়, তবে $y+19 =$ কত? (হিসাবরক্ষক কর্মকর্তা-৯৬)

Ans: 38

১০১. $x^3 - x^2$ কে $x - 2$ দ্বারা ভাগ করলে অবশেষ থাকবে- [৩১তম বিসিএস]

ক. 2

খ. 4

গ. -6

ঘ. -8

উত্তর: খ

সমাধান:

যেহেতু অবশেষ/ভাগশেষ চেয়েছে তাই সাধারণ ভাগের নিয়মে ভাগ করতে হবে:

$$\begin{array}{r} x-2 \overline{) x^3 - x^2(x^2 + x + 2)} \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ x^2 \\ \underline{x^2 - 2x} \\ 2x \\ \underline{2x - 4} \\ 4 \end{array}$$

এখানে ভাগশেষ হলো 4

Shortcut: মাত্র কয়েক সেকেন্ডে করার জন্য এভাবে ভাবুন। এখানে ভাগ করতে হবে $x-2$ দিয়ে। অর্থাৎ $x-2$ যদি প্রদত্ত রাশিটির একটি উৎপাদক হয় তাহলে ভাগশেষ ০ আসার কথা। কিন্তু যদি উৎপাদক না হয় তাহলে যা ভাগশেষ আসবে তাই উত্তর।
 $f(x) = x^3 - x^2$
 $f(2) = 2^3 - 2^2 = 8 - 4 = 4$ [$x-2=0$ থেকে $x = 2$ হবে]

১০২. $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ কে $x+3$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত থাকবে?

সমাধান:

$f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ হলে,

$f(-3) = (-3)^4 + 2(-3)^3 + 3(-3)^2 + 4(-3) + 5 = 81 + 2(-27) + 3 \cdot 9 - 12 + 5 = 81 - 54 + 27 - 12 + 5 = 113 - 66 = 47$

নিজে করুন:

১০৩. $x^2 - 3x - 2$ কে $x + 1$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কি হবে? [সহকারী সার্জন: ০৫]

$[x = (-1)$ বসিয়ে হিসেব করুন]

ক. 0

খ. 2

গ. 6

ঘ. 4

উত্তর: খ

$$\Rightarrow x^2+1 = \sqrt{5x}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+1}{x} = \frac{\sqrt{5x}}{x} \quad [\text{উভয় পক্ষকে } x \text{ দিয়ে ভাগ করে}]$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$$

$$\text{সুতরাং } x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$$

Attention: $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$ থেকে কিভাবে $x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$ হয়ে গেল সে নিয়মটি খুব ভালোভাবে লক্ষ্য করুন তাহলে ৫ এর জায়গায় অন্য কোন সংখ্যা দিয়ে প্রশ্ন আসলেও বা ভিন্ন লেজুড় লাগিয়ে দিলেও নিয়ম একই হবে।

$$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = (\sqrt{5})^2 - 2 = 5 - 2 = 3 \quad \text{Ans: 3}$$

১১১. $x^2+1-\sqrt{3}x=0$ হলে $x^2+\frac{1}{x^2}=?$ [ডাক অধিদপ্তরের বিভিন্ন ওভারশিয়ার-২০১৮]

ক. 0

খ. 1

গ. 4

ঘ. 10

উত্তর : খ

সমাধান:

$$x^2+1-\sqrt{3}x=0$$

$$\Rightarrow x^2+1=\sqrt{3}x \quad \Rightarrow \frac{x^2+1}{x}=\sqrt{3} \quad \Rightarrow \frac{x^2}{x}+\frac{1}{x}=\sqrt{3} \quad \therefore x+\frac{1}{x}=\sqrt{3}$$

$$\text{এখন, } x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2 \cdot x \cdot \frac{1}{x}=(\sqrt{3})^2-2=3-2=1$$

১১২. $x^2-\sqrt{3}x+1=0$ হলে $\frac{x^6+1}{x^3}$ এর মান কত? [৩২তম বিসিএস লিখিত]

সমাধান:

$$\text{দেওয়া আছে, } x^2-\sqrt{3}x+1=0$$

$$\text{বা, } x^2+1=\sqrt{3}x \quad \therefore x+\frac{1}{x}=\sqrt{3}$$

একজাতীয় অংকগুলো একসাথে দেয়ার কারণে অন্য যে কোন বই এর থেকে এই বই পড়তে অর্ধেক সময়ে দ্বিগুণ শেখা যাবে। আর এজন্য এই বইটি **Best** বই।

$$\text{এখন, } \frac{x^6+1}{x^3} = x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 0$$

Ans: 0

১১৩. $x^4+2x^2+1=5x^2$ হলে, $x+\frac{1}{x}=?$ কত? [সহকারী পরিবার পরিকল্পনা কর্মকর্তা ২০১৬]

a. $\sqrt{3}$

b. 2

c. 5

d. $\sqrt{5}$

Ans: d

Solution:

$$x^4+2x^2+1=5x^2$$

$$\text{বা, } x^4+1=3x^2$$

$$\text{বা, } x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=3x^2 \quad \text{বা, } x^2+\frac{1}{x^2}=3 \quad \text{বা, } \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2 \cdot x \cdot \frac{1}{x}=3 \quad \text{বা, } \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=3+2=5$$

$$\therefore x+\frac{1}{x}=\sqrt{5}$$

১১৪. $x^2 - 3x + 1 = 0$ হলে $(x^2 - \frac{1}{x^2})$ -এর মান (৩৭-তম বিসিএস খিলি)

(ক) $5\sqrt{3}$

(খ) $3\sqrt{5}$

(গ) $4\sqrt{5}$

(ঘ) $6\sqrt{5}$

উত্তর: (খ)

সমাধান:

দেয়া আছে, $x^2 - 3x + 1 = 0$ বা, $x^2 + 1 = 3x$ বা, $\frac{x^2 + 1}{x} = 3$ বা, $\frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} = 3$ বা, $x + \frac{1}{x} = 3$

আবার, আমরা জানি

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 \cdot x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 3^2 - 4$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 9 - 4$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right) = \sqrt{5}$$

$$\therefore x^2 - \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right) = 3\sqrt{5} \text{ (মান বসিয়ে গুণ করে দিলেই উত্তর)}$$

Attention: প্রশ্নটিতে $(x^2 - \frac{1}{x^2})$ -এর মান বের করতে বলা হয়েছে যার সূত্র প্রয়োগ করলে $\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right)$ হয়। তাই একবার (+) এর অন্যবার (-) এর মান বের করে তা বসিয়ে উত্তর বের করা হয়েছে।

১১৫. $a + 3 + \frac{1}{a} = 0$ হলে $a^3 + \frac{1}{a^3} =$ কত? [বিআরটিএ (মোটরযান পরিদর্শক)-২০১৭] + [স্বরাষ্ট্র মন্ত্রণালয়ের মাদক দ্রব্য নিয়ন্ত্রণ (উপ-পরিচালক)-২০১৮]

ক. 18

খ. 20

গ. -18

ঘ. -20

উত্তর: গ

সমাধান: উল্টাপাল্টা যা ই দেয়া থাক সবগুলোকেই ঘুরিয়ে ফিরিয়ে সূত্রে প্রয়োগ করার মত করে সাজিয়ে নিতে হবে।

$$a + 3 + \frac{1}{a} = 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} = -3 \therefore a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3 \cdot a \cdot \frac{1}{a} \left(a + \frac{1}{a}\right) = (-3)^3 - 3(-3) = -27 + 9 = -18$$

১১৬. $a^2 = 3a - 1$ হলে $\frac{a^8 + 1}{a^4}$ এর মান—[বিভিন্ন মন্ত্রণালয়ের ব্যক্তিগত কর্মকর্তা নিয়োগ-২০১৮]

ক. 47

খ. 49

গ. 51

ঘ. 53

উত্তর: গ

সমাধান:

$$a^2 = 3a - 1 \Rightarrow a^2 + 1 = 3a \Rightarrow a + \frac{1}{a} = 3$$

$$\therefore \frac{a^8 + 1}{a^4} = \frac{a^8}{a^4} + \frac{1}{a^4} = a^4 + \frac{1}{a^4}$$

$$= (a^2)^2 + \left(\frac{1}{a^2}\right)^2 = \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 - 2 \cdot a^2 \cdot \frac{1}{a^2}$$

$$= \left\{ \left(a + \frac{1}{a} \right)^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a} \right\} - 2 = (3^2 - 2)^2 - 2 = 7^2 - 2 = 49 - 2 = 47$$

১১৯. $x^4 - x^2 + 1 = 0$ হলে $x^2 + \frac{1}{x^2} =$ কত? [স্বরাষ্ট্র মন্ত্রণালয়ের মাদক দ্রব্য নিয়ন্ত্রণ (উপ-পরিচালক) - ২০১৮]

ক. ০

খ. 1

গ. 2

ঘ. 4

উত্তর : খ

সমাধান: $x^4 - x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^2} = \frac{0}{x^2} \Rightarrow \frac{x^4}{x^2} - \frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 + \frac{1}{x^2} = 0 \therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = 1$

১২০. $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ হলে, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ - এর মান নির্ণয় করুন।

Ans: 10

সমাধান:

দেয়া আছে $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

বা, $\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ [লবকে হর এবং হরকে লব বানানো হয়েছে মান বসানোর জন্য]

বা, $\frac{1}{x} = \frac{1(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}$ [লব ও হরকে একই রাশি দ্বারা গুণ করা হয়েছে]

বা, $\frac{1}{x} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}$ [সুত্রের প্রয়োগ]

$\therefore \frac{1}{x} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})$ [নিচে ৩ থেকে ২ বিয়োগ করলে ১ থাকে তাই কিছু লিখা হয় নি]

বৃত্তান্ত, $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x}$

$= (\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2})^2 - 2 = (2\sqrt{3})^2 - 2 = 2^2(\sqrt{3})^2 - 2 = 4 \cdot 3 - 2 = 12 - 2 = 10$ Ans: 10

১২১. $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ হলে, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ - এর মান নির্ণয় করুন। [৩৮তম বিসিএস প্রিলি:] (৯ম - ১০ম শ্রেণী অনু: ৩.২ এর উদা: ১৬)

(ক) $3\sqrt{2}$

(খ) $18\sqrt{3}$

(গ) $12\sqrt{3}$

(ঘ) 8

উত্তর : খ

সমাধান:

দেয়া আছে $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

বা, $\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

বা, $\frac{1}{x} = \frac{1(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}$

বা, $\frac{1}{x} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}$ [সুত্রের প্রয়োগ]

◆ Learning point: $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ অথবা এরকম কোন রাশি থাকলে $\frac{1}{x}$ মান অধিকাংশ সময় $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ অর্থাৎ (+) চিহ্নটা (-) চিহ্ন হয়ে যায়।

$$\therefore \frac{1}{x} = (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \text{ নিচে 3 থেকে 2 বিয়োগ করলে 1 থাকে তাই কিছু লেখা হয়নি।}$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = x^3 + \frac{1}{x^3}$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= (2\sqrt{3})^3 - 3 \times 2\sqrt{3} = 8 \times 3\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 24\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3} \quad \text{Ans. } 18\sqrt{3}$$

১২০. $a = \sqrt{6} + \sqrt{5}$ হলে, $\frac{a^6 - 1}{a^3}$ এর মান নির্ণয় করুন। (৯ম-১০ম শ্রেণী, অনু: ৩.২ এর ১৬)

a. $46\sqrt{5}$

b. $45\sqrt{5}$

c. $45\sqrt{6}$

d. $46\sqrt{6}$

Ans. a

Solution:

দেওয়া আছে, $a = \sqrt{6} + \sqrt{5}$

বা, $\frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}}$ [বিপরীতকরণ করে]

বা, $\frac{1}{a} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5}}{(\sqrt{6} + \sqrt{5})(\sqrt{6} - \sqrt{5})}$ বা, $\frac{1}{a} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5}}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{5})^2}$ বা, $\frac{1}{a} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5}}{6 - 5}$ বা, $\frac{1}{a} = \sqrt{6} - \sqrt{5}$

$$\therefore a - \frac{1}{a} = \sqrt{6} + \sqrt{5} - \sqrt{6} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

প্রদত্ত রাশি = $\frac{a^6 - 1}{a^3}$

Interesting: $a = \sqrt{6} + \sqrt{5}$ তাই $\frac{1}{a} = \sqrt{6} - \sqrt{5}$ । (+) থাকলে (-) হবে যার।

$$= \frac{a^6}{a^3} - \frac{1}{a^3} = a^3 - \frac{1}{a^3} = \left(a - \frac{1}{a}\right)^3 + 3 \cdot a \cdot \frac{1}{a} \left(a - \frac{1}{a}\right) = (2\sqrt{5})^3 + 3 \cdot (2\sqrt{5}) = 8 \times 5\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 46\sqrt{5}$$

১২১. যদি $4a^2 + \frac{1}{a^2} = 2$ হয়, তবে $8a^3 + \frac{1}{a^3}$ এর মান কত? [নাসিং ও মিডওয়াইফারি অধিসভারের (সিবি: স্টাফ নাসিং) নিয়োগ-২০১৮]

ক. 0

খ. 1

গ. 2

ঘ. 5

উত্তর: ক

Solution:

$$4a^2 + \frac{1}{a^2} = 2$$

$$\Rightarrow (2a)^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2 = 2 \Rightarrow \left(2a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 \cdot 2a \cdot \frac{1}{a} = 2 \Rightarrow \left(2a + \frac{1}{a}\right)^2 = 2 + 4 \quad \therefore 2a + \frac{1}{a} = \sqrt{6}$$

এখন, $8a^3 + \frac{1}{a^3} = (2a)^3 + \left(\frac{1}{a}\right)^3 = \left(2a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3 \cdot 2a \cdot \frac{1}{a} \left(2a + \frac{1}{a}\right) = (\sqrt{6})^3 - 6 \cdot \sqrt{6} = 6\sqrt{6} - 6\sqrt{6} = 0$

লিখিত প্রশ্ন

১. $x - \frac{1}{x} = \sqrt{3}$ হলে, $x^6 + \frac{1}{x^6}$ এর মান নির্ণয় করুন? (৩৮ তম বিসিএস (লিখিত)।

Ans: 110

সমাধান:

দেওয়া আছে, $x - \frac{1}{x} = \sqrt{3}$

বা, $x - \frac{1}{x} = \sqrt{3}$

বা, $(x - \frac{1}{x})^2 = (\sqrt{3})^2$ বা, $x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + (\frac{1}{x})^2 = 3$ বা, $x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = 3$ বা, $x^2 + \frac{1}{x^2} = 5$

এখন, $(x^2 + \frac{1}{x^2})^3 = (5)^3$ [ঘন করে]

বা, $(x^2)^3 + (\frac{1}{x^2})^3 + 3 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^2} (x^2 + \frac{1}{x^2}) = 125$

বা, $x^6 + \frac{1}{x^6} + (3 \times 5) = 125$ বা, $x^6 + \frac{1}{x^6} = 125 - 15 \therefore x^6 + \frac{1}{x^6} = 110$

২. $2x^2 - 3x = 2$ হলে, $x^3 - \frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় করুন। (৩৭তম বিসিএস লিখিত)

সমাধান:

দেওয়া আছে, $2x^2 - 3x = 2$

$\Rightarrow 2x^2 - 2 = 3x \Rightarrow \frac{2x^2 - 2}{x} = \frac{3x}{x} \Rightarrow \frac{2x^2}{x} - \frac{2}{x} = 3 \Rightarrow 2(x - \frac{1}{x}) = 3 \therefore x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$

এখন, $x^3 - \frac{1}{x^3} = (x - \frac{1}{x})^3 - 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} (x - \frac{1}{x})$

$= (\frac{3}{2})^3 + 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{8} + \frac{9}{2} = \frac{27 + 36}{8} = \frac{63}{8}$ নির্ণেয় মান = $\frac{63}{8}$

৩. $y = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ হলে, $(y^2 + \frac{1}{y^2})(y^3 - \frac{1}{y^3})$ এর মান নির্ণয় করুন। (৩৫তম বিসিএস (লিখিত)।

Ans: $220\sqrt{2}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $y = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{1(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{1} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

$\therefore y + \frac{1}{y} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$ (মান বসিয়ে)

সুতরাং $y^2 + \frac{1}{y^2} = (y + \frac{1}{y})^2 - 2 \cdot y \cdot \frac{1}{y} = (2\sqrt{3})^2 - 2 = 12 - 2 = 10$

$$\text{আবার, } y - \frac{1}{y} = \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$y^3 - \frac{1}{y^3} = \left(y - \frac{1}{y}\right)^3 + 3 \cdot y \cdot \frac{1}{y} \left(y - \frac{1}{y}\right) = (2\sqrt{2})^3 + 3 \cdot 2\sqrt{2} = 16\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 22\sqrt{2}$$

$$\therefore \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) \left(y^3 - \frac{1}{y^3}\right) = 10 \times 22\sqrt{2} = 220\sqrt{2}$$

Ans. $220\sqrt{2}$

৪. যদি $2x = \frac{2}{x} + 3$ হয় তবে প্রমাণ করুন যে, $8x^3 = \frac{8}{x^3} + 63$. (৩৩-তম বিসিএস, লিখিত [মাধ্যমিক বোর্ড বই])

প্রসমাধান: দেওয়া আছে,

$$2x = \frac{2}{x} + 3 \Rightarrow \left(2x - \frac{2}{x}\right) = 3 \Rightarrow 2\left(x - \frac{1}{x}\right) = 3 \therefore \left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\text{প্রমাণ করতে হবে যে, } 8x^3 = \frac{8}{x^3} + 63 \Rightarrow 8x^3 - \frac{8}{x^3} = 63$$

$$\text{L.H.S } 8x^3 - \frac{8}{x^3} = 8\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) = 8\left\{\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right)\right\} = 8\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{3}{2}\right)\right\}$$

$$= 8\left\{\frac{27}{8} + \frac{9}{2}\right\} = 8\left\{\frac{27+36}{8}\right\} = 63 = \text{R.H.S} \therefore 8x^3 = \frac{8}{x^3} + 63. \therefore \text{L.H.S} = \text{R.H.S (Proved)}$$

৫. $2x - \frac{2}{x} = 3$ হলে $x^2 + \frac{1}{x^2}$ এর মান কত? (সমাজসেবা অধিদপ্তর (অফিস সহকারী কাম কম্পিউটার টাইপিষ্ট) - ২০১৮- (লিখিত))

প্রসমাধান :

$$2x - \frac{2}{x} = 3 \text{ বা, } 2\left(x - \frac{1}{x}\right) = 3 \therefore x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 = \frac{9}{4} + 2 = \frac{9+8}{4} = \frac{17}{4}$$

উত্তর: $\frac{17}{4}$

৬. $x^3 + \frac{1}{x^3} = 2$ হলে $x + \frac{1}{x}$ এর মান কত? (প্রবাসী কল্যাণ মন্ত্র: অধীনে-(জনশক্তি কর্মসংস্থান ও প্রশিক্ষণ ব্যুরোর টেকনিক্যাল এ্যাসিস্টেন্ট)-২০১৮-(লিখিত))

প্রসমাধান : দেয়া আছে, $x^3 + \frac{1}{x^3} = 2$

$$\Rightarrow \frac{x^6 + 1}{x^3} = 2 \Rightarrow x^6 + 1 = 2x^3 \Rightarrow (x^3)^2 - 2 \cdot x^3 \cdot 1 + 1^2 = 0 \Rightarrow (x^3 - 1)^2 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \therefore x = 1$$

$$\text{সুতরাং, } x + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

Ans: 2