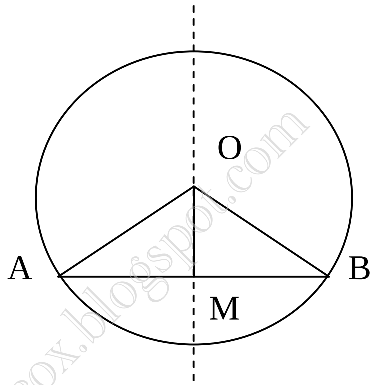
www.facebook.com/tanbir.ebooks

দশম অধ্যায় ১০ বৃত্ত

উপপাদ্য ১। বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাস ভিন্ন কোনো জ্যা- এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ ঐ জ্যা- এর উপর লম্ব।

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে AB ব্যাস নয় এমন একটি জ্যা এবং M এই জ্যা- এর মধ্যবিন্দু। O, M যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, OM রেখাংশ AB জ্যা- এর উপর লম্ব।



tanbircox.blogspot.com

অঙ্কন : O, A এবং O, B যোগ করি।

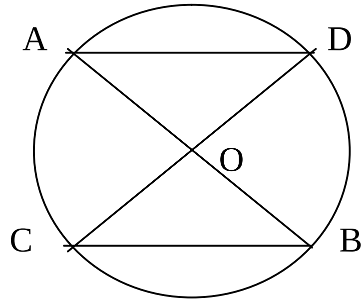
প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔOAM এবং ΔOBM এ	
$AM = BM$	M, AB এর মধ্যবিন্দু]
$OA = OB$	[উভয় একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
এবং $OM = OM$	[সাধারণ বাহু]
$\Delta OAM \cong \Delta OBM$	[বাহু - বাহু - বাহু উপপাদ্য]
$\therefore \angle OMA = \angle OMB$	
(২) যেহেতু কোণদ্বয় রৈখিক যুগল কোণ এবং এদের পরিমাপ সমান,	
সুতারাং $\angle OMA = \angle OMB = 1$ সমকোণ।	
অতএব, $OM \perp AB$ (প্রমাণিত)	

অনুশীলনী ১০.১

১। প্রমাণ কর যে, কোনো বৃত্তের দুইটি জ্যা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তাদের ছেদবিন্দু বৃত্তটির কেন্দ্র হবে।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB ও CD দুইটি জ্যা পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত করে। অর্থাৎ AO = BO এবং CO = DO। প্রমাণ করতে হবে যে, O বিন্দুই বৃত্তের কেন্দ্র।

অঙ্কন : A, D এবং B, C যোগ করি।

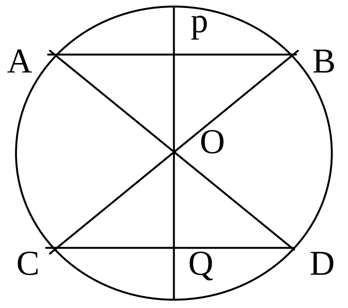
প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔBOC- এ, CO = BO এবং ΔAOD- এ, DO = AO ∴ AO = BO = CO = DO অর্থাৎ O বিন্দু থেকে বৃত্তের পরিধিস্থ A, B, C, D বিন্দুর দূরত্ব সমান। তাই বলা যায় O বিন্দু থেকে বৃত্তের পরিধিস্থ যেকোনো বিন্দুর দূরত্ব সমান ∴ O বিন্দুই বৃত্তের কেন্দ্র। **(প্রমাণিত)**	[AB ও CD রেখা O বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয়েছে।]

tanbircox.blogspot.com

২। প্রমাণ কর যে, দুইটি সমান্তরাল জ্যা- এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা কেন্দ্রগামী এবং জ্যাদ্বয়ের উপর লম্ব।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB ও CD দুইটি সমান্তরাল জ্যা। AB ও CD এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q। প্রমাণ করতে হবে যে, P, Q এর সংযোজক সরলরেখা O বিন্দুগামী। অর্থাৎ P, O, Q একই সরলরেখায় অবস্থিত প্রমাণ করাই যথেষ্ট হবে।

অঙ্কন : P, Q যোগ করি।

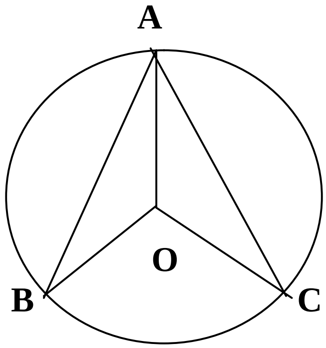
প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔAOP ও ΔBOP এর মধ্যে	
$AO = BO$	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
$BP = AP$	[P, AB এর মধ্যবিন্দু]
এবং OP সাধারণ বাহু	
$\therefore \Delta AOP \cong \Delta BOP$	[বাহু- বাহু- বাহু উপপাদ্য]
(২) $\angle APO = \angle BPO = 1$ সমকোণ	[রৈখিক যুগল কোণ বলে]
$\therefore OP \perp AB$	
অনুরূপে $\angle CQO = \angle DQO = 1$ সমকোণ	[রৈখিক যুগল কোণ বলে]
$\therefore OQ \perp CD$	
(৩) আবার, $OP = OQ$	
$\therefore AO = BO = CO = DO$	
অর্থাৎ P, Q, O বিন্দুগামী **(প্রমাণিত)**	

tanbircox.blogspot.com

৩। কোনো বৃত্তের AB ও AC জ্যা দুইটি A বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের সাথে সমান কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ কর যে, AB = AC.

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে AB ও AC জ্যা দুইটি A বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের সাথে সমান কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ করতে হবে যে, AB = AC

প্রমাণ :

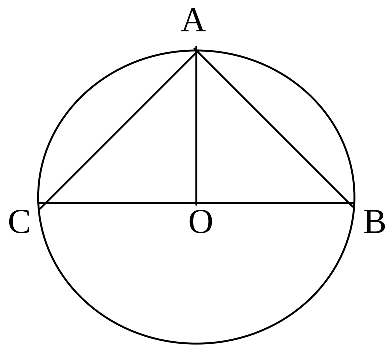
ধাপ	**যথার্থতা**
(১) ΔAOB ও ΔAOC এর মধ্যে	
$BO = CO$	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
$\angle BAO = \angle CAO$	[কল্পনা]
এবং $OA = OA$	[সাধারণ বাহু]
$\therefore \Delta AOB \cong \Delta AOC$	[বাহু - বাহু- বাহু উপপাদ্য]
$\therefore AB = AC$ **(প্রমাণিত)**	

tanbircox.blogspot.com

৪। চিত্রে, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং জ্যা AB = জ্যা AC.

প্রমাণ কর যে, $\angle BA\emptyset = \angle CA\emptyset$

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : O বৃত্তের কেন্দ্র এবং জ্যা AB = জ্যা AC প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BAO = \angle CAO$

অঙ্কন : O,B এবং O,C যোগ করি।

প্রমাণ :

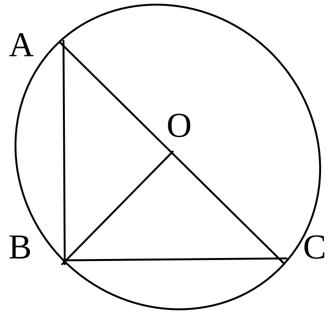
ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔAOB ও ΔAOC এর মধ্যে	
AB = AC	[কল্পনা]
OB = OC	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]
এবং OA = OA	[সাধারণ বাহু]
$\therefore \Delta AOB \cong \Delta AOC$	[বাহু- বাহু- বাহু উপপাদ্য]
$\therefore \angle BAO = \angle CAO$ **(প্রমাণিত)**	

tanbircox.blogspot.com

www.facebook.com/tanbir.ebooks

৫। কোনো বৃত্ত একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু দিয়ে যায়। দেখাও যে, বৃত্তটির কেন্দ্র অতিভুজের মধ্যবিন্দু।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, বৃত্তটি ABC সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A দিয়ে যায়। AB এর মধ্যবিন্দু O বৃত্তটির কেন্দ্র অর্থাৎ BO = $\frac{১}{২}$ AC

অঙ্কন : O, B যোগ করি।

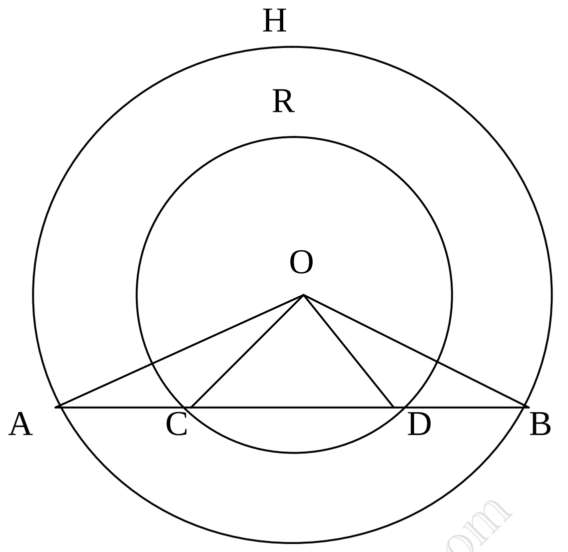
প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) যেহেতু AC বৃত্তের ব্যাস এবং ∠ABC = এক সমকোণ। সুতারাং A, B, C শীর্ষবিন্দু তিনটি বৃত্তস্থ হবে। অর্থাৎ A, B, C বৃত্তের পরিধির উপর তিনটি বিন্দু। O বৃত্তের কেন্দ্র হওয়ায় BO = CO = AO	[অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক- সমকোণ] [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]
(২) এখন, AO + CO = AC বা, BO + BO = AC বা, 2BO = AC ∴ BO = $\frac{১}{২}$ AC **(প্রমাণিত)**	[(১) থেকে]

tanbirebox.blogspot.com

৬। দুইটি সমকেন্দ্রিক বৃত্তের একটির AB জ্যা অপর বৃত্তকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে।
প্রমাণ কর যে, AC = BD.

সমাধান :



tanbircox.blogspot.com

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট দুইটি বৃত্ত ABH ও CDR। ABH বৃত্তের একটি জ্যা AB, CDR বৃত্তকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, AC = BD

অঙ্কন : A, O; C, O; D, O ও B, O যোগ করি।

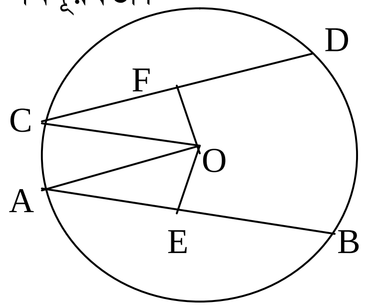
প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔAOC ও ΔBOD-এ AO = BO, CO = DO এবং ∠OAC = ∠OBD ∴ ΔAOC ≅ ΔBOD ∴ AC = BD **(প্রমাণিত)**	 [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে] [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে] [বাহু- কোণ- বাহু উপপাদ্য]

10.2 বৃত্ত

উপপাদ্য ২। বৃত্তের সকল সমান জ্যা কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী।

মনে করি, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB ও CD বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা। প্রমাণ করতে হবে যে, O থেকে AB এবং CD জ্যাদ্বয় সমদূরবর্তী।



অঙ্কন : O থেকে AB এবং CD জ্যা- এর উপর যথাক্রমে OE এবং OF লম্ব রেখাংশ আঁকি। O, A এবং O,C যোগ করি।

tanbircox.blogspot.com

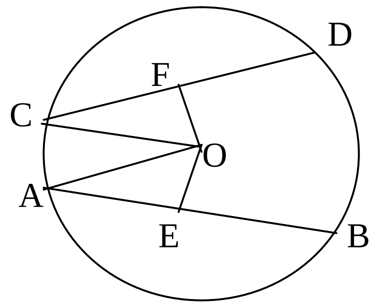
প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) $OE \perp AB$ ও $OF \perp CD$ সুতারাং, AE = BE এবং CF = DF $AE = \frac{১}{২}AB$ এবং $CF = \frac{১}{২}CD$	[কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা- এর উপর অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]
(২) কিন্তু AB = CD $\therefore$ AE = CF	[কল্পনা]
(৩) এখন ΔOAE এবং ΔOCF সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে। অতিভুজে OA = অতিভুজ OC এবং AE = CF $\therefore \Delta OAE \cong \Delta OCF$ $\therefore$ OE = OF	[উভয় একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ] [ধাপ ২] [সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ- বাহু সর্মসমতা উপপাদ্য]
(৪) কিন্তু OE এবং OF কেন্দ্র O থেকে যথাক্রমে AB জ্যা এবং CD জ্যা- এর দূরত্ব। সুতারাং, AB এবং CD জ্যাদ্বয় বৃত্তের কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী। **(প্রমাণিত)**	

উপপাদ্য ৩। বৃত্তের কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী সকল জ্যা পরস্পর সমান।

সমাধান :

মনে করি, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB ও CD দুইটি জ্যা। O থেকে AB ও CD এর উপর যথাক্রমে ও OE ও OF লম্ব। তাহলে OE ও OF কেন্দ্র থেকে যথাক্রমে AB ও CD জ্যা- এর দূরত্ব নির্দেশ করে। OE = OF হলে প্রমাণ করতে হবে যে, AB = CD.



অঙ্কন : O, A এবং O,C যোগ করি।

প্রমাণ :

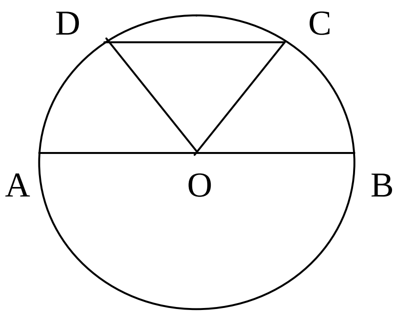
ধাপ	যথার্থতা
(১) যেহেতু OE $\perp$ AB ও OF $\perp$ CD সুতারাং, $\angle$OEA = $\angle$OFC = এক সমকোণ	[সমকোণ]
(২) এখন, ΔOAE এবং ΔOCF সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে অতিভুজ OA = অতিভুজ OC এবং OE = OF $\therefore$ ΔOAE $\cong$ ΔOCF $\therefore$ AE = CF	 [উভয় একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ] [কল্পনা] [সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ- বাহু সর্মসমতা উপপাদ্য]
(৩) AE = $\frac{১}{২}$AB এবং CF = $\frac{১}{২}$ CD।	[কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা- এর উপর অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখন্ডিত করে]
(৪) সুতারাং $\frac{১}{২}$ AB = $\frac{১}{২}$CD অর্থাৎ AB = CD	

tanbircox.blogspot.com

উদাহরণ ৪। প্রমাণ কর যে, বৃত্তের ব্যাসই বৃহত্তম জ্যা।

সমাধান :

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABCD একটি বৃত্ত। AB ব্যাস এবং CD ব্যাস ভিন্ন যেকোনো একটি জ্যা।
প্রমাণ করতে হবে যে, AB CD > CD



অঙ্কন : O, C এবং O, D যোগ করি।

প্রমাণ :

OA = OB = OC = OD [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এখন ΔOCD এ

OC + CD > CD

বা, OA + OB > CD

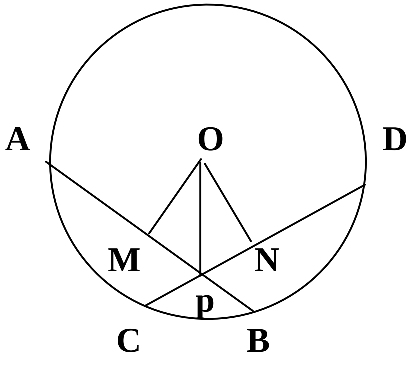
অর্থাৎ AB > CD

tanbircox.blogspot.com

অনুশীলনী ১০.২

১। বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা পরস্পরকে ছেদ করলে দেখাও যে, এদের একটি অংশদ্বয় অপরটির অংশদ্বয়ের সমান।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে দুইটি সমান জ্যা AB ও CD পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, $PA = PD$ এবং $PB = PC$

অঙ্কন : কেন্দ্র O থেকে AB ও CD এর উপর যথাক্রমে OM এবং ON লম্ব অঙ্কন করি। O, P যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔMOP ও ΔNOP সমকোণী ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে	
$OM = ON$	[সমান সমান জ্যা কেন্দ্র হতে সমদূরবর্তী]
$OP = OP$	[সাধারণ বাহু]
$\Delta MOP \cong \Delta NOP$	[অতিভুজ- বাহু উপপাদ্য]
$\therefore PM = PN$	
(২) এখন, OM, AB এর উপর লম্ব হওয়ায়,	
AM = $\frac{১}{২}$ AB	[কেন্দ্র হতে অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখন্ডিত করে]
এবং ON, CD এর উপর লম্ব হওয়ায়,	
DN = $\frac{১}{২}$ CD	[কেন্দ্র হতে অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখন্ডিত করে]
(৩) যেহেতু $AB = CD$	[কল্পনা]
$\therefore AM = DN$	[ধাপ- ২ হতে]
$\therefore PM + AM = PN + DN$	
সুতারাং $PA = PD$	
(৪) আবার, $AB = CD$	
বা, $AB - PA = CD - PD$	[ধাপ- ৩ হতে]
$\therefore PB = PC$	
অতএব, $PA = PD$ এবং $PB = PC$	
(প্রমাণিত)	
সুতারাং $\angle OMA = \angle OMB = 1$ সমকোণ।	
অতএব, $OM \perp AB$ **(প্রমাণিত)**	

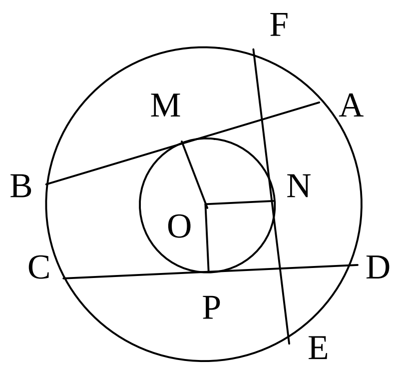
tanbircox.blogspot.com

www.facebook.com/tanbir.ebooks

২। প্রমাণ কর যে, বৃত্তের সমান জ্যা- এর মধ্যবিন্দুগুলো সমবৃত্ত।

সমাধান :

সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, বৃত্তের সমান জ্যা এর মধ্যবিন্দুগুলো সমবৃত্ত।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD বৃত্তের কেন্দ্র O। AB, CD ও EF তিনটি পরস্পর সমান জ্যা। M, N এবং P যথাক্রমে AB, EF ও CD এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, M, N এবং P সমবৃত্ত।

অঙ্কন : O, M; O, N এবং O, P যোগ করি।

প্রমাণ :

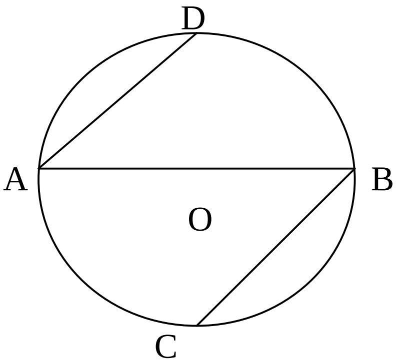
ধাপ	যথার্থতা
(১) যেহেতু M, AB এর মধ্যবিন্দু এবং OM কেন্দ্রগামী রেখাংশ। ∴ OM, AB এর উপর লম্ব। OP, CD এর উপর লম্ব এবং ON, EF এর উপর লম্ব। সেহেতু OM = OP = ON	[বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা- এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ ঐ জ্যা- এর উপর লম্ব] [উপপাদ্য - ২] [বৃত্তের সকল সমান জ্যা কেন্দ্র হতে সমদূরবর্তী]
(২) সুতারাং O কে কেন্দ্র করে OM বা OP বা ON এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত অঙ্কন করলে M, N ও P বিন্দু দিয়ে যাবে। অতএব, M, N ও P সমবৃত্ত। **(প্রমাণিত)**	

tanbir.cox.blogspot.com

৩। দেখাও যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে এর বিপরীত দিকে দুইটি সমান জ্যা অঙ্কন করলে এরা সমান্তরাল হয়।

সমাধান :

সাধারণ নির্বচন : দেখতে হবে যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে তার বিপরীত দিকে দুইটি সমান জ্যা অঙ্কন করলে তারা সমান্তরাল হয়।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের AB ব্যাস। AB ব্যাসের A প্রান্ত থেকে AD জ্যা এবং B প্রান্ত থেকে BC জ্যা অঙ্কন করা হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, AD।। BC

tanbircox.blogspot.com

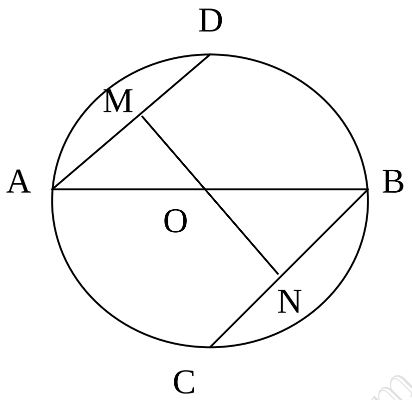
প্রমাণ :

ধাপ	**যথার্থতা**
(১) যেহেতু AD = BC এবং AB তাদের ছেদক ∴ ∠ BAD =∠ABC	[কল্পনা] [একান্তর কোণ বলে]
(২) ছেদকের উভয় পাশের একান্তর কোণগুলো সমান হলে রেখাদ্বয় সমান্তরাল। ∴ AD।। BC **(প্রমাণিত)**	

৪। দেখাও যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে এর বিপরীত দিকে দুইটি সমান্তরাল জ্যা আঁকলে এরা সমান হয়।

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে AB ব্যাস। AB এর A প্রান্ত থেকে AD জ্যা আঁকা হল এবং B প্রান্ত থেকে BC জ্যা আঁকা হল এবং AD|| BC। প্রমাণ করতে হবে যে, AD = BC



অঙ্কন : কেন্দ্র O থেকে AD ও BC এর উপর যথাক্রমে OM ও ON লম্ব আঁকি।

tanbircox.blogspot.com

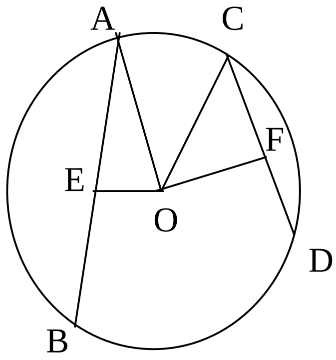
প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) সমকোণী ΔAOM ও ΔBON এ, AO = BO এবং AM = BN ∴ ΔAOM ≅ ΔBON ∴ OM = ON	[কল্পনা] [অতিভুজ- বাহু উপপাদ্য]
(২) সুতারাং AD = BC **(প্রমাণিত)**	[বৃত্তের কেন্দ্র হতে সমদূরবর্তী সকল জ্যা সমান]

www.facebook.com/tanbir.ebooks

৫। দেখাও যে, বৃত্তের দুইটি জ্যা- এর মধ্যে বৃহত্তম জ্যা- টি ক্ষুদ্রতর জ্যা অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটতর।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তে AB ও CD দুইটি জ্যা এবং AB > CD। AB ও CD এর উপরে লম্বদ্বয় যথাক্রমে OE ও OF। দেখাতে হবে যে, OE < OF

অঙ্কন : O, A ও O, C যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) যেহেতু $OE \perp AB$ এবং $OF \perp CD$ $AE = \frac{১}{২} AB$, $CF = \frac{১}{২} CD$ বৃত্তের	[বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন জ্যা এর উপর অঙ্কিত জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]
(২) কিন্তু AB > CD $\therefore$ AE > CF	
(৩) এখন, ΔOAE ও ΔOCF এর মধ্যে $OA^2 = AE^2 + OE^2$ এবং $OC^2 = CF^2 + OF^2$ কিন্তু OA = OC $\therefore OA^2 = OC^2$ $\therefore AE^2 + OE^2 = CF^2 + OF^2$	[অতিভুজ উপর অঙ্কিত বর্গ অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গের সমষ্টির সমান] [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
(৪) এখন, AE > CF হওয়ায় $AE^2 > CF^2$ $\therefore OE^2 < OF^2$ বা, $OE < OF$ অর্থাৎ বৃহত্তর জ্যাটি ক্ষুদ্রতর জ্যা অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটতর। **(দেখানো হলো)**	[ধাপ (৩) হতে]

tanbir.cox.blogspot.com