সপ্তম অধ্যায়

মেট্রিক্স ও নির্ণায়ক (Matrix & Determinants)

মেট্রিক্স : A,B,C

মেট্রিক্স-এর উপাদান : $a_i, b_i, a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}$

মেট্রিক্স-এর নির্ণায়ক : det A

উপাদানের মাইনর $a_{ij} : M_{ij}$

উপাদানের সহ উৎপাদক $a_{ij} : C_{ij}$

মেট্রিক্স-এর পক্ষান্তর : A^T, $\tilde{A}$

সংলগ্ন মেট্রিক্স : adj A

মেট্রিক্স-এর কর্ণাঙ্ক : tr A

বিপরীত মেট্রিক্স : A^{-1}

বাস্তব সংখ্যা : k

বাস্তব চল : x_i

স্বাভাবিক সংখ্যা : m,n

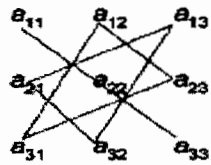
৭.১ নির্ণায়ক (Determinants) :

৫০৩. দ্বিতীয় পর্যায়ের নির্ণায়ক : $datA = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$

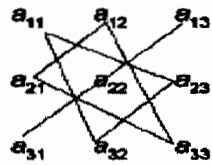
৫০৪. তৃতীয় পর্যায়ের নির্ণায়ক : $datA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$

৫০৫. তীর নিয়ম :



+



—

alamin5g

৫০৬. N তম ক্রমের নির্ণায়ক : $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \cdots \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \cdots a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$

৫০৭. সহ উৎপাদক : $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

৫০৮. N তম ক্রমের নির্ণায়কের জন্য ল্যাপলসের বিস্তৃতি :

i তম সারির জন্য $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}, i = 1,2,....,n.$

j তম সারির জন্য $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}, i = 1,2,....,n.$

৭.২ নির্ণায়কের ধর্ম :

৫০৯. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_2 \end{vmatrix}$ ৫১০. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$

৫১১. $\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = 0$ ৫১২. $\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

৫১৩. $\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

৭.৩ মেট্রিক্স :

৫১৪. সংজ্ঞা : $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

৫১৫. বর্গ মেট্রিক্স হলো একটি মেট্রিক্স যার ক্রম $n \times n$

alamin5g

৫১৬ যদি $a_{ij} = a_{ji}$ হয় তাহলে বর্গ মেট্রিক্সটি হবে $\lfloor a_{ij} \rfloor$

৫১৭. যদি $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ এবং

$B = [b_{ij}] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$ হয় তাহলে,

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

৫১৮. যদি k একটি স্কেলার রাশি এবং $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ একটি মেট্রিক্স , তাহলে

$$kA = [ka_{ij}] = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

৫১৯. দুটি মেট্রিক্স-এর গুণ :

যদি $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ এবং

alamin5g

$$B=[b_{ij}]=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{bmatrix}$$ হয় তাহলে

$$AB = C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mk} \end{bmatrix}$$, যেখানে

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+....+a_{in}b_{nj}=\sum_{\lambda=1}^{n}a_{i\lambda}b_{\lambda j}\ (i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,k$$

তাহলে হয় $A=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\ a_{13} \\ a_{21} & a_{22}\ a_{23} \end{bmatrix}, B=[b_i]=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, তাহলে

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\ a_{13} \\ a_{21} & a_{22}\ a_{23} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}b_1 & a_{12}b_2 & a_{13}b_3 \\ a_{21}b_1 & a_{22}b_2 & a_{23}b_3 \end{bmatrix}$$

৫২০. $(AB)^T=B^TA^T$. ৫২১. $adjA=[C_{ij}]^T$

৫২২. $trA=a_{11}+a_{22}+....+a_{nn}$ ৫২৩. $A^{-1}=\dfrac{adjA}{\det A}$

৫২৪. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

৫২৫. $AX=\lambda X, |A-\lambda I|=0$

৭.৪ রৈখিক সমীকরণের নিয়ম :

চল : $x, y, z, x_1, x_2,...$

বাস্তব সংখ্যা : $a_1, a_2, a_3, b_1, a_{11}, a_{12},....$

নির্ণায়ক : D, D_x, D_y, D_z

মেট্রিক্স : A, B, X

alamin5g

৫২৬. $\begin{cases} a_1x + b_1y = d_1 \\ a_2x + b_2y = d_2 \end{cases}$, $x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}$

যেখানে $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1,$

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix} = d_1b_2 - d_2b_1,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} = a_1d_2 - a_2d_1$$

৫২৭. যদি $D \neq 0$ হয় তাহলে পদ্ধতিটির একটি একক সমাধান হলো

$$x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}$$

যদি $D = 0$ এবং $D_x \neq 0$ (অথবা $D_y \neq 0$)হয় তাহলে পদ্ধতিটির কোন সমাধান হবে না।

যদি $D = D_x = D_y = 0$ হয় তাহলে পদ্ধতিটির সমাধান হবে অসংখ্য এবং অসীম।

৫২৮. $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$, $x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}, z = \frac{D_z}{D}$, যেখানে

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

alamin59

৫২৯. রৈখিক সমীকরণের সেট $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$

একে মেট্রিক্সের আকালে লেখা যায় এভাবে

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ যেহেতু } A.X = B,$$

যেখানে $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$

৫৩০. রৈখিত সমীকরণ $n \times n$ এর সমাধান সেট হলো $X = A^{-1}.B$, যেখানে A^{-1} হলো A এর বিপরীত।

alamin59