এয়োদশ অধ্যায়

ধারা বা শ্রেণী (Series)

১৩.১ পাটিগাণিতিক ধারা :

প্রথম পদ : a_1

n তম পদ : a_n

দুটি পদের মধ্যবর্তী দূরত্ব : d

ধারার পদের সংখ্যা : n

প্রথম n তম ধারার সমষ্টি : S_n

১১২৩. $a_n = a_{n-1} + d = a_{n-2} + 2d = ... = a_1 + (n-1)d$

১১২৪. $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = ... = a_i + a_{n+1-i}$

১১২৫. $a_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{2}$

১১২৬. $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}.n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}.n$

১৩.২ জ্যামিতিক ধারা :

প্রথম পদ : a_1

n তম পদ : a_n

সাধারণ অনুপাত : q

ধারার পদের সংখ্যা : n

প্রথম n তম ধারার সমষ্টি : S_n

অসীমের যোগফল : S

১১২৭. $a_n = qa_{n-1} = a_1 q^{n-1}$

১১২৮. $a_1.a_n = a_2.a_{n-1} = ... = a_i.a_{n+1-i}$

১১২৯. $a_i = \sqrt{a_{i-1}.a_{i+1}}$

১১৩০. $S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$

১১৩১. $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$, $|q| < 1$ এর জন্য S এর অভিসরণ হয় $n \to \infty$

১৩.৩ কিছু সসীম ধারা :

ধারার পদের সংখ্যা : n

alamin5g

১১৩২. $1+2+3+....+n=\frac{n(n+1)}{2}$

১১৩৩. $2+4+6+...+2n=n(n+1)$

১১৩৪. $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$

১১৩৫. $k+(k+1)+(k+2)+...+(k+n-1)=\frac{n(2k+n-1)}{2}$

১১৩৬. $1^2+2^2+3^2+....+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

১১৩৭. $1^3+2^3+3^3+....+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

১১৩৮. $1^2+3^2+5^2+....+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$

১১৩৯. $1^3+3^3+5^3+....+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$

১১৪০. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}+...=2$

১১৪১. $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}+...=1$

১১৪২. $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{(n-1)!}+..=e$

১৩.৪ অসীম ধারা : অনুক্রম : $\{a_n\}$

প্রথম পদ : a_1

n তম পদ : a_n

১১৪৩. অসীম শ্রেণী/ধারা : $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+...+a_n+...$

১১৪৪. n তম এর আংশিক সমষ্টি : $S_n\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+...+a_n$

১১৪৫. অসীম শ্রেণীর অভিসরণ : $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=L$, যদি $\lim_{n\to\infty}S_n=L$

১১৪৬. n তম পদের পরীক্ষা : যদি ধারার অভিসরণ হয় $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, তাহলে $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ । আর যদি ধারটি $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$ হয় তাহলে ধারাটি হবে অপসারী ।

alamin5g

১৩.৫ অপসারী ধারা :

অপসারী ধারা : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = AB$

বাস্তব সংখ্যা : c

১১৪৭. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A + B$

১১৪৮. $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n = cA$

১৩.৬ ঘাত ধারা :

বাস্তব সংখ্যা : x, x_0

ঘাত শ্রেণী : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)$

সমগ্র সংখ্যা : n

অভিসরণ ব্যাসার্ধ : R

১১৪৯. x এর ঘাত শ্রেণী : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + .. + a_n x^n + ...$

১১৫০. $(x - x_0)$ এর ঘাত শ্রেণী :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + ... + a_n (x - x_0)^n + ..$$

১১৫১. অভিসরণের বিরতী : $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

১১৫২. অভিসরণ ব্যাসার্ধ : $R = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$ বা, $R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

১৩.৭ শক্তি শ্রেণীর অন্তরকলন ও সমাকলন :

সন্তত অপেক্ষক (Continuous function) : $f(x)$

শক্তি শ্রেণী : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

সমগ্র সংখ্যা : n

অভিসরণ ব্যাসার্ধ : R

১১৫৩. শক্তিশ্রেণীর অন্তরকলন :

$$f'(x) = \frac{d}{dx} a_0 + \frac{d}{dx} a_1 x + \frac{d}{dx} a_2 x^2 + .. = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + .. = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

alamin5g

১১৫৪. শক্তিশ্রেণীর অন্তরকলন :

$$\int f(x)dx = \int a_0 dx + \int a_1 x dx + \int a_2 x^2 dx + \ldots$$

$$= a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

১৩.৮ টেলর ও ম্যাকলারিণ শ্রেণী :

সমগ্র সংখ্যা : n

অন্তরকলন যোগ্য অপেক্ষক : $f(x)$

অবশিষ্ট পদ : R_n

১১৫৫. টেলর শ্রেণী :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \ldots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + R_n$$

১১৫৬. অবশিষ্ট $n+1$ তম পদ হলো, $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}, a < \xi < x$

১১৫৭. ম্যাকলারিন শ্রেণী :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + R_n$$

১৩.৯ কিছু অপেক্ষকের জন্য শক্তি শ্রেণীর বিস্তৃতি :

সমগ্র সংখ্যা : n, বাস্তব সংখ্যা : x

১১৫৮. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

১১৫৯. $a^x = 1 + \frac{x\ln a}{1!} + \frac{(x\ln a)^2}{2!} + \frac{(x\ln a)^3}{3!} + \ldots + \frac{(x\ln a)^n}{n!} + \ldots$

১১৬০. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \pm \ldots, -1 < x \le 1$

১১৬১. $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right), |x| < 1$

১১৬২. $\ln x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\ldots.\right], x > 0$

alamin5g

১১৬৩. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \pm \ldots$

১১৬৪. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \pm \ldots$

১১৬৫. $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \ldots, |x| < \frac{\pi}{2}$

১১৬৬. $\cot x = \frac{1}{x} - \left(\frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \frac{2x^7}{4725} + \ldots\right), |x| < \pi$

১১৬৭. $\arcsin x = x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{1.3x^5}{2.4.5} + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)x^{2n+1}}{2.4.6\ldots(2n)(2n+1)} + \ldots, |x| < 1$

১১৬৮. $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{1.3x^5}{2.4.5} + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)x^{2n+1}}{2.4.6\ldots(2n)(2n+1)} + \ldots\right), |x| < 1$

১১৬৯. $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{(-1)x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, |x| \le 1$

১১৭০. $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$

১১৭১. $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$

১৩.১০ দ্বিপদ শ্রেণী :

সমগ্র সংখ্যা : n, m,

বাস্তব সংখ্যা : x

সমন্বয় : ${}^nC_m$

১১৭২. $(1+x)^n = 1 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + \ldots + {}^mC_n x^m + \ldots + x^n$

১১৭৩. ${}^nC_m = \frac{n(n-1)\ldots[n-(m-1)]}{m!}, |x| < 1$

১১৭৪. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots, |x| < 1$

alamin59

১১৭৫. $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+...,|x|<1$

১১৭৬. $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2.4}+\frac{1.3x^3}{2.4.6}-\frac{1.3.5x^4}{2.4.6.8}+....,|x|\le 1$

১১৭৭. $\sqrt[3]{1+x}=1+\frac{x}{3}-\frac{1.2x^2}{3.6}+\frac{1.2.3x^3}{3.6.9}-\frac{1.2.5.8x^4}{3.6.9.12}+....,|x|\le 1$

১৩.১১ ফুরিয়ার শ্রেণী :

পূর্ণ অপেক্ষক : $f(x)$

ফুরিয়ার সহগ : a_0,a_n,b_n

সমগ্র সংখ্যা : n

১১৭৮. $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

১১৭৯. $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$

১১৮০. $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$

১৩.১২ বিণ্যাস ও সমাবেশ :

বিণ্যাস : ${}^nP_m$ সমাবেশ : ${}^nC_m$ সমগ্রসংখ্যা : n,m

১১৮১. গৌণিক (Factorial) : $n!=1.2.3...(n-2)(n-1)n$, $0!=1$

১১৮২. ${}^nP_n=n!$

১১৮৩. ${}^nP_m=\frac{n!}{(n-m)!}$

১১৮৪. দ্বিপদ সহগ : ${}^nC_m=\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$

১১৮৫. ${}^nC_m={}^nC_{n-m}$

১১৮৬. ${}^nC_m+{}^nC_{m+1}={}^{n+1}C_{m+1}$

১১৮৭. ${}^nC_0+{}^nC_1+{}^nC_2+...+{}^nC_n=2^n$

alamin5g