দ্বাদশ অধ্যায়

অন্তরকল সমীকরণ (Differential Equations)

এক চল বিশিষ্ট অপেক্ষক : $y, p, q, u, g, h, G, H, r, z$

কোণাঙ্ক (স্বাধীন চল) : x, y

দ্বিচল বিশিষ্ট অপেক্ষক : $f(x,y), M(x,y), N(x,y)$

প্রথম অন্তরকলজ : $y', u', \dot{y}, \frac{dy}{dt}, \ldots$

দ্বিতীয় অন্তরকলজ : $y''.\ddot{y}, \frac{d^2I}{dt^2}, \ldots.$

আংশিক অন্তরকলজ : $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots.$

সাধারণ সংখ্যা : n

বিশেষ সমাধান : y_1, y_p

বাস্তব সংখ্যা : $k, t, C, C_1, C_2, p, q, \alpha, \beta$

বৈশিস্ট্য সমীকরণের বর্গমূল : λ_1, λ_2 সময় : t

তাপমাত্রা : T, S জনমিতি অপেক্ষক : $P(t)$

বস্তুর ভর : m স্প্রিং এর stiffness : k

সাম্য অবস্থা থেকে স্থানচুত্যি : y কোণাঙ্কের স্থানচুত্যি : A

কম্পাঙ্ক : ω স্যাত স্যাঁতে সহগ : γ

দশা কোণের স্থান চুত্যি : δ কৌণিক স্থান চুত্যি : θ

পেন্ডুলামের দৈর্ঘ্য : L মাধ্যাকর্ষীয় ত্বরণ : g

তড়িৎ প্রবাহ : I রোধ : R

আবেশ : L ধারক : C

১২.১ প্রথম ক্রমের সাধারণ অন্তরকল সমীকরণ :

১১০৬. $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$ এর সাধারণ সমাধান হলো

$$y = \frac{\int u(x)q(x)dx + C}{u(x)} \quad \text{যেখানে } u(x) = \exp\left(\int p(x)dx\right)$$

alamin5g

১১০৭. $\frac{dy}{dx}f(x,y)=g(x)h(y)$ এর সাধারণ সমাধান হলো

$\int\frac{dy}{h(y)}=\int g(x)dx+C$ অথবা, $H(y)=G(x)+C$

১১০৮. $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n$ এবং $\frac{dz}{dx}+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x)$

১১০৯. Riccati সমীকরণ : $\frac{dy}{dx}=p(x)+q(x)y+r(x)y^2$ এবং

$\frac{dz}{dx}=-[q(x)+2y_1r(x)]z-r(x)$

১১১০. যদি $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ হয় তাহলে $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ এর সাধারণ সমাধান হলো $\int M(x,y)dx+\int N(x,y)dy=C$

১১১১. তেজস্ক্রিয় ক্ষয় : $\frac{dy}{dt}=-ky$ এর সমাধান হলো, $y(t)=y_0e^{-kt}$, যেখানে $y_0=y(0)$ ।

১১১২. ঠান্ডাকরণের নিউটনের সূত্র : $\frac{dT}{dt}=-k(T-S)$ এর সমাধান হলো, $T(t)=S+(T_0-S)e^{-kt}$, যেখানে $T_0=T(0)$ এবং সময় $t=0$ ।

১১১৩. জনমিতির গতিবিদ্যা : $\frac{dP}{dt}=kP\left(1-\frac{P}{M}\right)$ এর অন্তরকলন সমীকরণের সমাধান হলো $P(t)=\frac{MP_0}{P_0+(M-P_0)e^{-kt}}$, যেখানে $P_0=P(0)$ এবং সময় $t=0$ ।

১২.২ দ্বিক্রমের সাধারণ অন্তরকল সমীকরণ :

১১১৪. $y''+py'-qy=0$ বা, $\lambda^2+p\lambda+q=0$ এর সাধারণ সমীকরণ হলো $y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$ যেখানে C_1,C_2 হলো ধ্রুবক ।
যদি λ_1,λ_2 জটিল সংখ্যা হয় তাহলে $\lambda_1=\alpha+\beta i,\lambda_2=\alpha-\beta i$, যখন $\alpha=-\frac{p}{2},\beta=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$, তাহলে সাধারণ সমীকরণ হলো
$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

alamin59

১১১৫. $y'' + py' + qy = f(x)$ এর সাধারণ সমীকরণ হলো $y = y_p + y_h$

১১১৬. y বর্জিত অন্তরকলজ সমীকরণ হলো $y'' = f(x, y')$ যদি $u = y'$ হয় তাহলে $u' = f(x,u)$ হবে প্রথম ক্রমের অন্তরকলজ সমীকরণ ।

১১১৭. x বর্জিত অন্তরকলজ সমীকরণ হলো $y'' = f(y, y')$ যদি $u = y'$ হয় তাহলে $y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = u\frac{du}{dy}$, তাহলে পাই, $u\frac{du}{dy} = f(y,u)$ যা প্রথম ক্রমের অন্তরকলজ সমীকরণ ।

১১১৮. সাধারণ পেণ্ডুলামের সমীকরণ : $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$, θ ক্ষুদ্র পরিবর্তনের জন্য সাধারণ সমীকরণটি হলো $\theta(t) = \theta_{max}\sin\sqrt{\frac{g}{L}}t$, যেখানে পর্যায় $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

১১১৯. RLC সার্কিট :. $L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = V'(t) = \omega E_0\cos(\omega t)$, যেখানে I হলো RLC সার্কিটে তড়িৎ প্রবাহ এবং $V(t) = E_0\sin(\omega t)$ হলো এ.সি. ভোল্টেজের উৎস।

সাধারণ সমাধান হলো $I(t) = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t} + A\sin(\omega t - \varphi)$, যেখানে

$$r_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L}, A = \frac{\omega E_0}{\sqrt{\left(L\omega^2 - \frac{1}{C}\right)^2 + R^2\omega^2}},$$

$\varphi = \arctan\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)$, যেখানে C_1, C_2 হলো ধ্রুবক।

১২.৩ কিছু আংশিক অন্তরকলন সমীকরণ :

১১২০. ল্যাপলসের সমীকরণ : $\frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2u}{\partial y^2} = 0$

১১২১. তাপের সমীকরণ : $\frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$

১১২২. তরঙ্গের সমীকরণ : $\frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2u}{\partial t^2}$

alamin59