দশম অধ্যায়

অন্তরকলন বিদ্যা (Differential Calculus)

অপেক্ষক : f, g, y, u, v ।,
কোণাঙ্ক : x
বাস্তব সংখ্যা : a, b, c, d
স্বাভাবিক সংখ্যা : n
কোণ : α
বিপরীত অপেক্ষক : f^{-1}

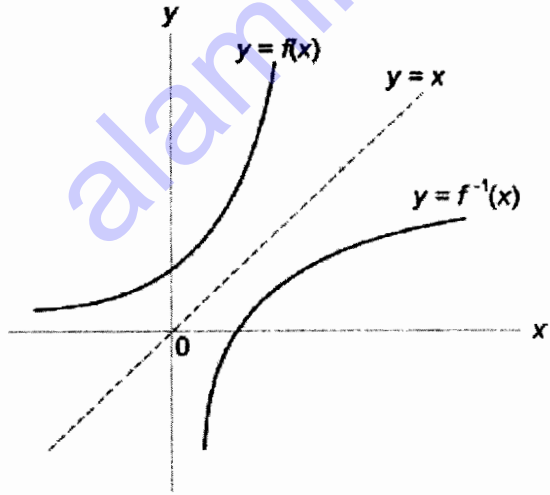
১০.১ অপেক্ষক এবং তাদের লেখ :

৭০০. যুগ্ম অপেক্ষক : $f(-x) = f(x)$

৭০১. অযুগ্ম অপেক্ষক : $f(-x) = -f(x)$

৭০২. পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক : $f(x + nT) = f(x)$

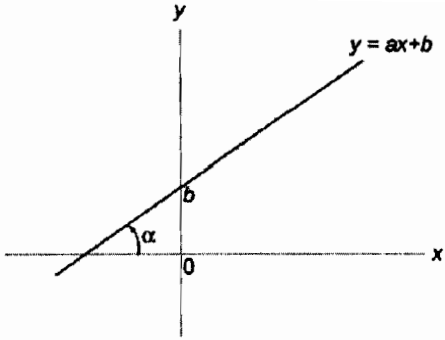
৭০৩. বিপরীত অপেক্ষক : যে কোন অপেক্ষক $y = f(x)$ এর জন্য $x = g(y)$ অথবা $y = f^{-1}(x)$ একটি বিপরীত অপেক্ষক হবে।



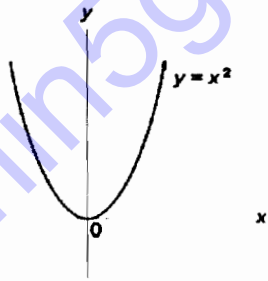
৭০৪. সংযোজক অপেক্ষক : $y = f(u), u = g(x), y = (g(x))$

৭০৫. রৈখিক অপেক্ষক : $y = ax + b, x \in R, a = \tan\alpha$

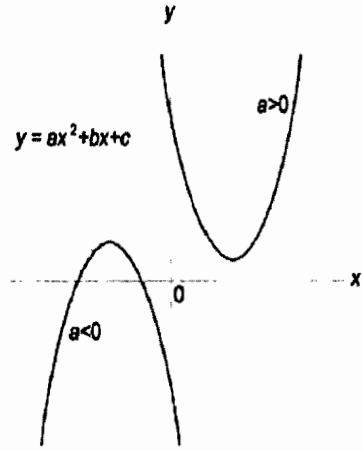
alamin5g



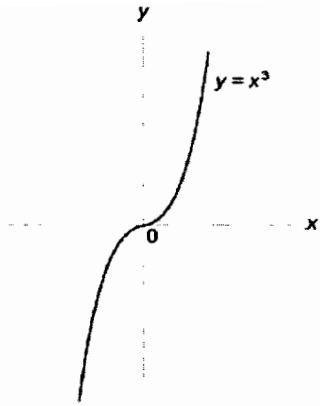
৭০৬. দ্বিঘাত অপেক্ষক : $y = x^2, x \in R.$



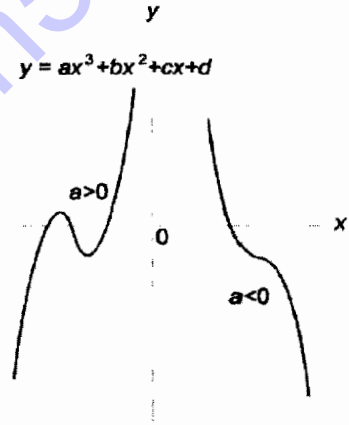
৭০৭. $y = ax^2 + bx + c, x \in R$



alamin5g



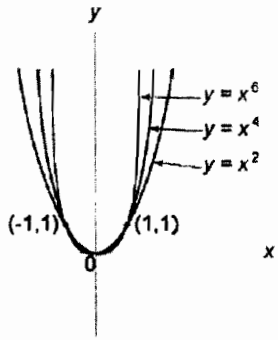
৭০৮. ঘনক অপেক্ষক : $y = x^3, x \in R$

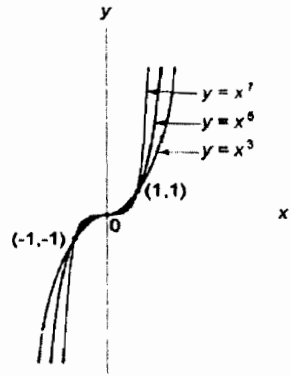


৭০৯. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, x \in R.$

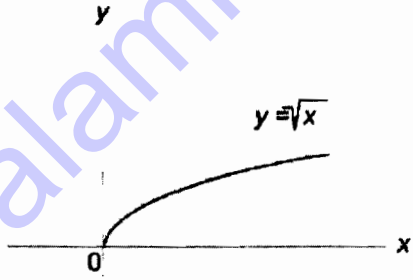
alamin5g

৭১০. ঘাত অপেক্ষক : $y = x^n, n \in N$





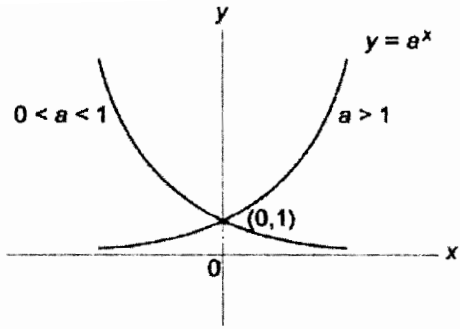
৭১১. বর্গমূল অপেক্ষক : $y = \sqrt{x}, x \in [0, \infty)$



৭১২. সূচক অপেক্ষক : $y = a^x, a > 0, a \neq 1,$

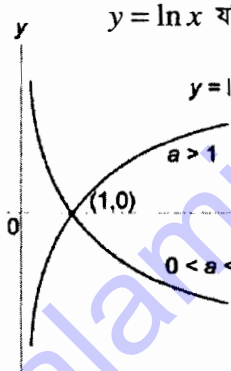
$y = e^x$ যদি $a = e, e = 2.71828182846...$

alamin5g

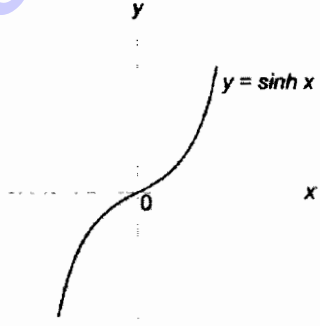


৭১৩. লগারিদমীক অপেক্ষক : $y = \log_a x, x \in (0,\infty), a > 0, a \neq 1,$

$y = \ln x$ যদি $a = e, x > 0$

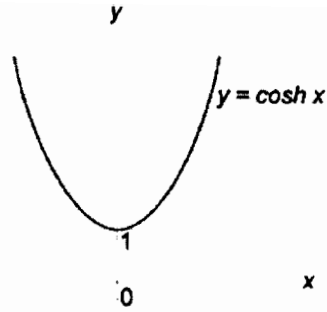


৭১৪. পরাবৃত্তীয় সাইন অপেক্ষক : $y = \sinh x, \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, x \in R.$



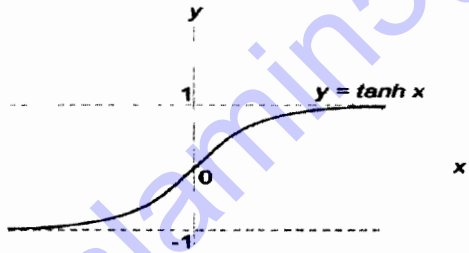
৭১৫. পরাবৃত্তীয় কোসাইন অপেক্ষক : $y = \cosh x, \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in R.$

alamin5g



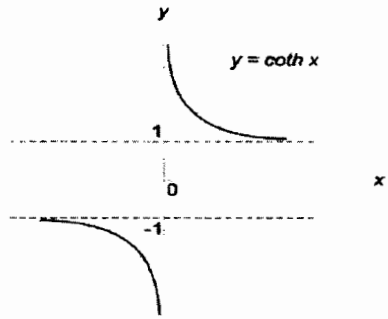
৭১৬. পরাবৃত্তীয় ট্যানজেন্ট অপেক্ষক :

$$y = \tanh x, y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, x \in R.$$



৭১৭. পরাবৃত্তীয় কটজেন্ট অপেক্ষক :

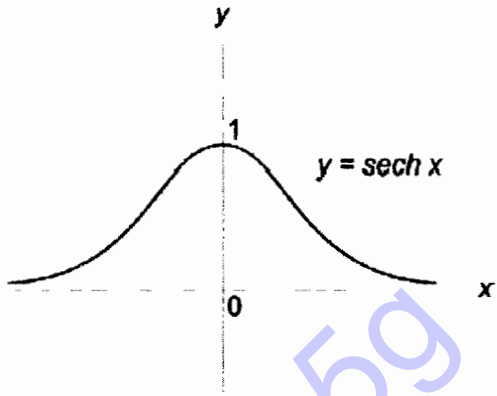
$$y = \coth x, y = \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, x \in R, x \neq 0$$



alamin5g

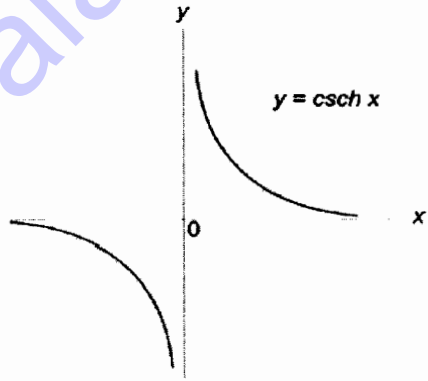
৭১৮. পরাবৃত্তীয় সেকসেন্ট অপেক্ষক :

$$y = \text{sec}hx, y = \text{sec}hx = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, x \in R.$$



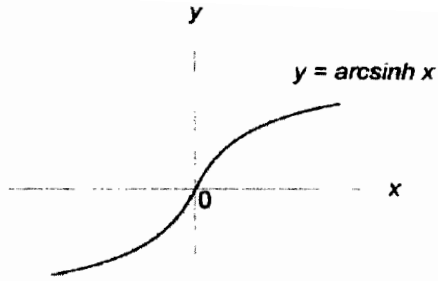
৭১৯. পরাবৃত্তীয় কোসেন্ট অপেক্ষক :

$$y = \text{cosec}hx, y = \text{cosec}hx = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}, x \in R, x \neq 0.$$

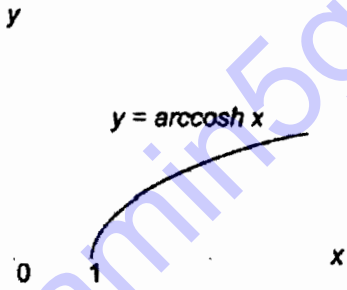


৭২০. বিপরীত পরাবৃত্তীয় সাইন অপেক্ষক : $y = \arcsin hx, x \in R.$

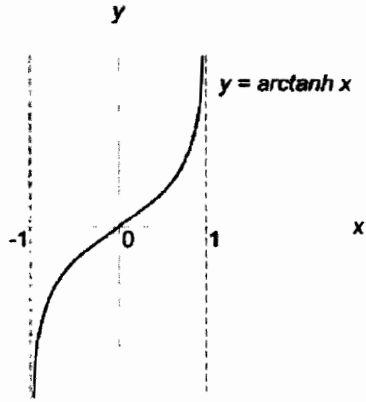
alamin5g



৭২১. বিপরীত পরাবৃত্তীয় কোসাইন অপেক্ষক : $y = \arccos hx, x \in [1, \infty)$.



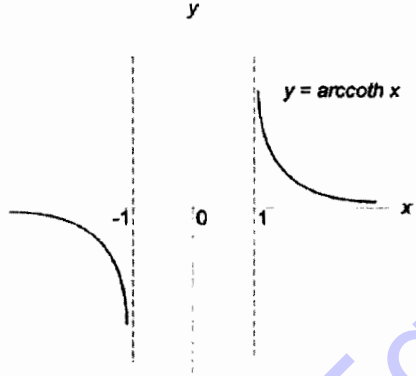
৭২২. বিপরীত পরাবৃত্তীয় ট্যানজেন্ট অপেক্ষক : $y = \arctan hx, x \in (-1,1)$.



alamin5g

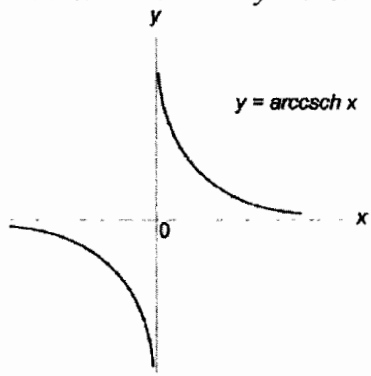
৭২৩. বিপরীত পরাবৃত্তীয় কটজেন্ট অপেক্ষক :

$$y = arc\coth x, x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty).$$



৭২৪. বিপরীত পরাবৃত্তীয় সেকসেন্ট অপেক্ষক : $y = arc\,\mathrm{sech}\, x, x \in (0,1]$

৭২৫. বিপরীত পরাবৃত্তীয় কোসেন্ট অপেক্ষক : $y = \mathrm{arccosech} x, x \in R, x \neq 0.$



১০.২ অপেক্ষকের সীমা :

অপেক্ষক : $f(x), g(x)$

alamin59

কোণাঙ্ক : x

বাস্তব ধ্রুবক : a, k

৭২৬. $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$

৭২৭. $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x)$

৭২৮. $\lim_{x\to a}[f(x).g(x)]=\lim_{x\to a}f(x).\lim_{x\to a}g(x)$

৭২৯. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}$ যদি $\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$

৭৩০. $\lim_{x\to a}[kf(x)]=k\lim_{x\to a}f(x)$

৭৩১. $\lim_{x\to a}f(g(x))=f\left(\lim_{x\to a}g(x)\right)$

৭৩২. $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ যদি অপেক্ষক $f(x)$ ধারাবাহিকভাবে $x=a$ হয়।

৭৩৩. $\lim_{x\to a}\frac{\sin x}{x}=1$ ৭৩৪. $\lim_{x\to a}\frac{\tan x}{x}=1$

৭৩৫. $\lim_{x\to a}\frac{\sin^{-1}x}{x}=1$ ৭৩৬. $\lim_{x\to a}\frac{\tan^{-1}x}{x}=1$

৭৩৭. $\lim_{x\to a}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ ৭৩৮. $\lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

৭৩৯. $\lim_{x\to a}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k$ ৭৪০. $\lim_{x\to a}a^x=1$

১০.৩ অন্তরকলজের সংজ্ঞা ও ধর্ম :

অপেক্ষক : f, g, y, u, v

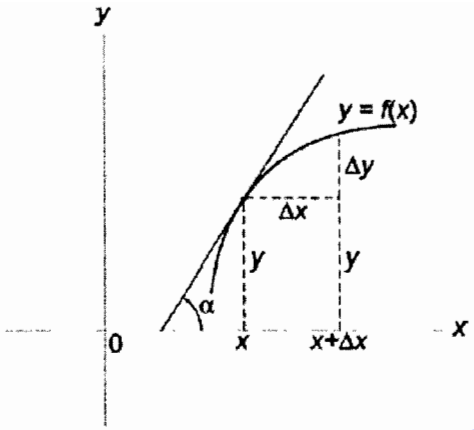
স্বাধীন চলক : x

বাস্তব ধ্রুবক : k

কোণ : α

৭৪১. $y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$

alamin5g



alamin59

৭৪২. $\frac{dy}{dx} = \tan\alpha$ ৭৪৩. $\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

৭৪৪. $\frac{d(u-v)}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$ ৭৪৫. $\frac{d(ku)}{dx} = k\frac{du}{dx}$

৭৪৬. গুণফলের পদ্ধতি : $\frac{d(u.v)}{dx} = \frac{du}{dx}.v + u.\frac{dv}{dx}$

৭৪৭. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\frac{du}{dx}.v - u.\frac{dv}{dx}}{v^2}$

৭৪৮. $y = f(g(x)), u = g(x), \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$

৭৪৯. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ যেখানে $x(y)$, $y(x)$ এর বিপরীত অপেক্ষক ।

৭৫০. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{\frac{dy}{dx}}{y^2}$

৭৫১. $y = f(x), \ln y = \ln f(x), \frac{dy}{dx} = f(x).\frac{d}{dx}[\ln f(x)]$

১০.৪ অন্তরকলজের তালিকা :

স্বাধীন চলক : x

বাস্তব ধ্রুবক : C, a, b, c

সাধারণ সংখ্যা : n

৫২. $\frac{d}{dx}(C) = 0$

৭৫৩. $\frac{d}{dx}(x) = 1$

১৫৪. $\frac{d}{dx}(ax+b) = a$

৭৫৫. $\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c) = ax+b$

১৫৬. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

৭৫৭. $\frac{d}{dx}(x^{-n}) = -\frac{n}{x^{n+1}}$

৭৫৮. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$

৭৫৯. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

৭৬০. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

৭৬১. $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

৭৬২. $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1.$

৭৬৩. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a, a > 0, a \neq 1.$

৭৬৪. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

৭৬৫. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

৭৬৬. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

৭৬৭. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

৭৬৮. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\cos ec^2 x$

৭৬৯. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \tan x . \sec x$

৭৭০. $\frac{d}{dx}(\cos ecx) = -\cot x . \cos ecx$

৭৭১. $\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

alamin5g

৭৭২. $\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

৭৭৩. $\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$

৭৭৪. $\frac{d}{dx}(arc\cot x) = -\frac{1}{1+x^2}$

৭৭৫. $\frac{d}{dx}(arc\sec x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

৭৭৬. $\frac{d}{dx}(\arccos ecx) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

৭৭৭. $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$

৭৭৮. $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$

৭৭৯. $\frac{d}{dx}(\tanh x) = \frac{1}{\cosh^2 x} = \sec h^2 x$

৭৮০. $\frac{d}{dx}(\coth x) = -\frac{1}{\sinh^2 x} = -\cos ech^2 x$

৭৮১. $\frac{d}{dx}(\sec hx) = -\sec hx.\tanh x$

৭৮২. $\frac{d}{dx}(\cos echx) = -\cos cchx.\coth x$

৭৮৩. $\frac{d}{dx}(\arcsin hx) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

৭৮৪. $\frac{d}{dx}(\arccos hx) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

৭৮৫. $\frac{d}{dx}(\arctan hx) = \frac{1}{1-x^2}, |x| < 1$

৭৮৬. $\frac{d}{dx}(arc\coth x) = -\frac{1}{x^2-1}, |x| > 1$

alamin5g

৭৮৭. $\frac{d}{dx}(u^v) = vu^{v-1}.\frac{du}{dx} + u^v \ln u.\frac{dv}{dx}$

১০.৫ উচ্চক্রমের অন্তরকলজ :

অপেক্ষক : f, y, u, v

স্বাধীন চলক : x

স্বাভাবিক সংখ্যা : n

৭৮৮. $f'' = (f')' = \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$

৭৮৯. $f^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$

৭৯০. $(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$

৭৯১. $(u-v)^{(n)} = u^{(n)} - v^{(n)}$

৭৯২. লাইবনিৎজ-এর সূত্র : $(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$

$$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' = uv'''$$

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1.2}u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)}$$

৭৯৩. $(x^m)^{(n)} = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}$ ৭৯৪. $(x^n)^{(n)} = n!$

৭৯৫. $(\log_a x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a}$

৭৯৬. $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

৭৯৭. $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$ ৭৯৮. $(e^x)^{(n)} = e^x$

৭৯৯. $(a^{mx})^{(n)} = m^n a^{mx} \ln^n a$

৮০০. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

alamin5g

৮০১. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

১০.৬ অন্তরকলজের আবেদন :

অপেক্ষক : f, g, y

একটি বস্তুর অবস্থান : s

বেগ : v

ত্বরণ : w

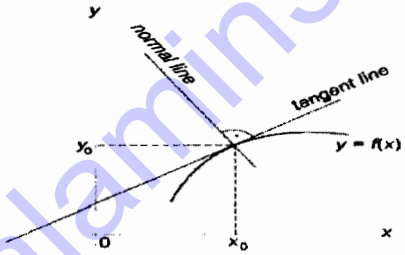
স্বাধীন চলক : x

সময় : t

স্বাভাবিক সংখ্যা : n

৮০২. ট্যানজেন্ট রেখা : $y - y_0 = f'(x_0(x - x_0)$ (নীচের চিত্রে দ্রষ্টব্য)

৮০৩. সাধারণ রেখা : $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ (নীচের চিত্রে দ্রষ্টব্য)



৮০৪. L'Hopital's-এর নিয়ম :

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ যদি } \lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$$

১০.৭ অন্তরকল :

অপেক্ষক : f, u, v

স্বাধীন চল : x

অপেক্ষকের অন্তরকলজ : $y'(x), f'(x)$

বাস্তব ধ্রুবক : C

অন্তরকল অপেক্ষক $y = f(x) : dy$

x এর অন্তরকল : dx

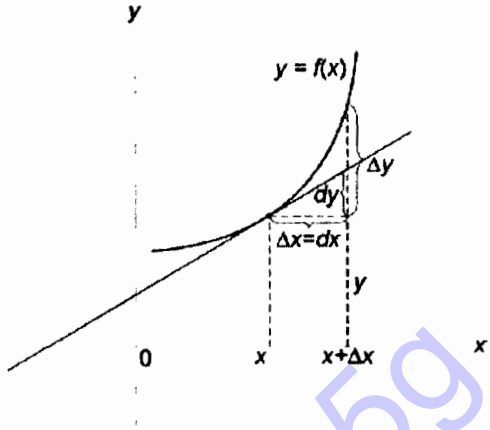
x এর ক্ষুদ্র পরিবর্তন : Δx

y এর ক্ষুদ্র পরিবর্তন : Δy

alamin59

৮০৫. $dy = y'dx$

৮০৬. $f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x$



৮০৭. y এর ক্ষুদ্র পরিবর্তনের জন্য $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

৮০৮. $d(u+v) = du + dv$ ৮০৯. $d(u-v) = du - dv$

৮১০. $d(Cu) = Cdu$ ৮১১. $d(uv) = vdu + udv$

৮১২. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

১০.৮ অন্তরকল প্রকারক :

স্থানাংক রেখায় একক ভেক্টর : $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

স্কেলার অপেক্ষক : $f(x,y,z), u(x_1, x_2, ..., x_n)$

স্কেলার ক্ষেত্রে নতিমাত্রা : $gard \;\; u, \nabla u$

দিক অন্তরকলজ : $\frac{\partial f}{\partial l}$

ভেক্টর অপেক্ষক : $\vec{F}(P,Q,R)$

ভেক্টর ক্ষেত্রের অপসরণ : $div \;\; \vec{F}, \nabla.\vec{F}$

ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল : $curl \;\; \vec{F}, \nabla \times \vec{F}$

ল্যাপলস অপেক্ষক : ∇^2

৮১৩. স্কেলার অপেক্ষকের নতিমাত্রা :

alamin5g

$$gard\ \ f=\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

$$gard\ \ u=\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},.....\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

৮১৪. দিক অন্তরকলজ : $\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma,$

যখন $\vec{l}(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma),\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

৮১৫. ভেক্টর ক্ষেত্রের অপসরণ : $div\ \vec{F}=\nabla.\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$

৮১৬. ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল : $curl\ \ \vec{F}=\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$

$$=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

৮১৭. ল্যাপলস অপেক্ষক : $\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

৮১৮. $div\ \ (curl\vec{F})=\nabla.(\nabla\times\vec{F})\equiv 0$

৮১৯. $curl\ \ (gradf)=\nabla\times(\nabla f)\equiv 0$

৮২০. $div\ (gradf)=\nabla.(\nabla f)=\nabla^2 f$

৮২১. $curl\ (curl\vec{F})=gard\ (div\vec{F})-\nabla^2\vec{F}=\nabla(\nabla.\vec{F})-\nabla^2\vec{F}$

alamin99