অধ্যায় ৭

ব্যবহারিক জ্যামিতি (Practical Geometry)

পূর্বের শ্রেণিতে জ্যামিতির বিভিন্ন উপপাদ্য প্রমাণে ও অনুশীলনীতে চিত্র অঙ্কনের প্রয়োজন ছিল। সে সব চিত্র সূক্ষ্মভাবে অঙ্কন না করলে চলতো। কিন্তু কখনো কখনো জ্যামিতিক চিত্র সূক্ষ্মভাবে অঙ্কনের প্রয়োজন হয়। যেমন, একজন স্থপতি যখন কোনো বাড়ির নকশা করেন কিংবা প্রকৌশলী যখন যন্ত্রের বিভিন্ন অংশের চিত্র আঁকেন। এ ধরনের জ্যামিতিক অঙ্কনে শুধু স্কেল ও পেন্সিল কম্পাসের সাহায্য নেওয়া হয়। এর আগে আমরা স্কেল ও পেন্সিল কম্পাসের সাহায্যে ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ আঁকতে শিখেছি। এ অধ্যায়ে বিশেষ ধরনের ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ অঙ্কনের আলোচনা করা হবে।

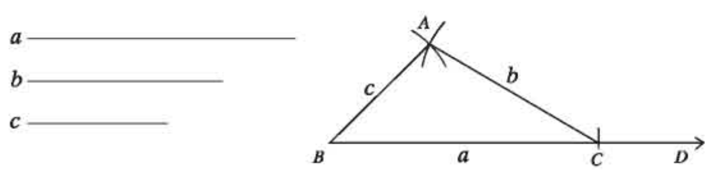
এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা ---

- চিত্রের সাহায্যে ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- প্রদত্ত উপাত্ত ব্যবহার করে ত্রিভুজ অঙ্কন করতে পারবে।
- প্রদত্ত উপাত্ত ব্যবহার করে চতুর্ভুজ, সামান্তরিক, ট্রাপিজিয়াম অঙ্কন করতে পারবে।

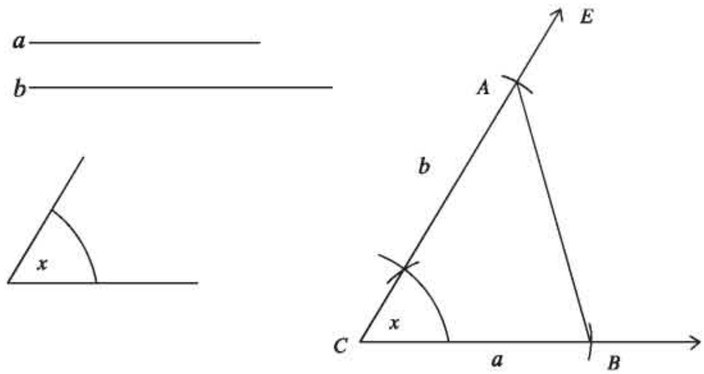
ত্রিভুজ অঙ্কন

প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ রয়েছে। তবে কোনো ত্রিভুজের আকার ও আকৃতি নির্দিষ্ট করার জন্য সবগুলো বাহু ও কোণের প্রয়োজন হয় না। যেমন, ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ বলে এর যেকোনো দুইটি কোণের মান দেওয়া থাকলে তৃতীয় কোণটির মান বের করা যায়। আবার, ত্রিভুজের সর্বসমতা সংক্রান্ত উপপাদ্যগুলো থেকে দেখা যায় যে, কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ অর্থাৎ ছয়টির মধ্যে কেবলমাত্র নিম্নলিখিত তিনটি অপর এক ত্রিভুজের অনুরূপ তিনটি অংশের সমান হলেই ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হয়। অর্থাৎ, এ তিনটি অংশ দ্বারা নির্দিষ্ট আকারের অনন্য ত্রিভুজ আঁকা যায়। সপ্তম শ্রেণিতে আমরা নিম্নবর্ণিত উপাত্ত থেকে ত্রিভুজ আঁকতে শিখেছি।

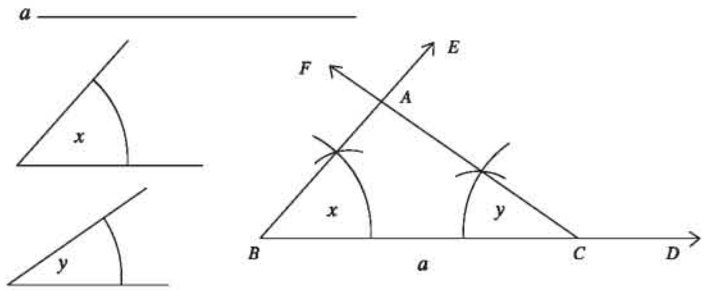
১. তিনটি বাহু



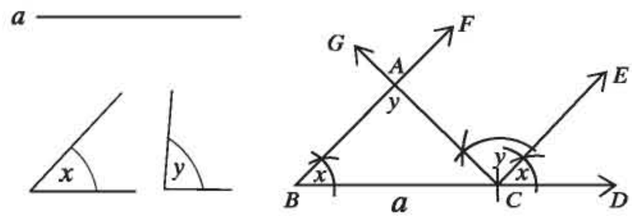
২. দুইটি বাহু ও এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ



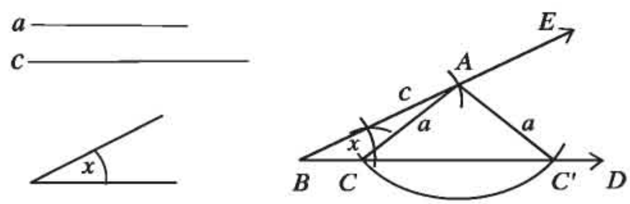
৩. দুইটি কোণ ও এদের সংলগ্ন বাহু



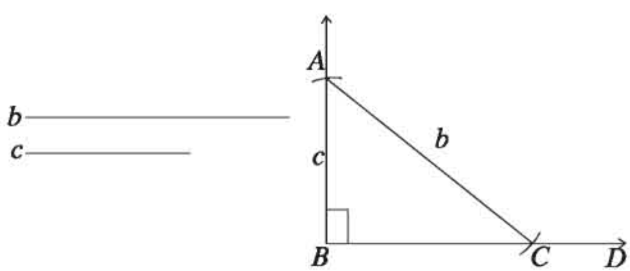
৪. দুইটি কোণ ও একটির বিপরীত বাহু



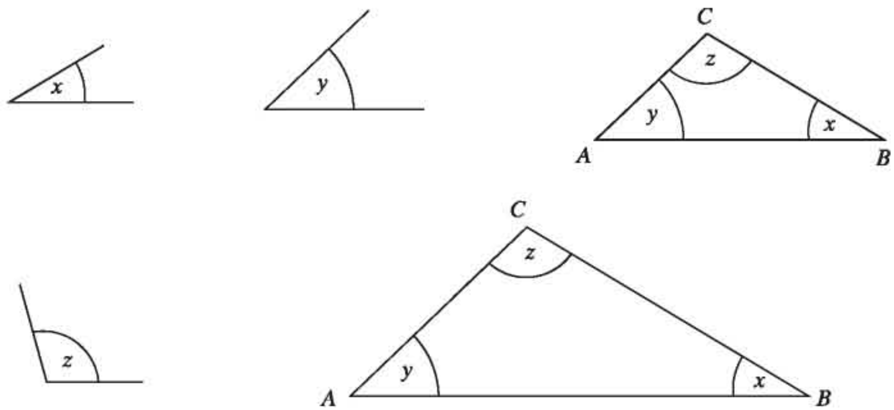
৫. দুইটি বাহু ও এদের একটির বিপরীত কোণ



৬. সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর একটি বাহু



লক্ষণীয় যে, উপরের প্রত্যেক ক্ষেত্রে ত্রিভুজের তিনটি অংশ নির্দিষ্ট করা হয়েছে। কিন্তু যেকোনো তিনটি অংশ নির্দিষ্ট করলেই ত্রিভুজটি নির্দিষ্ট হয় না। যেমন, ত্রিভুজের তিনটি কোণ দেওয়া থাকলে বিভিন্ন আকারের অসংখ্য ত্রিভুজ আঁকা যায় (যাদের সদৃশ ত্রিভুজ বলা হয়)।



অনেক সময় ত্রিভুজ আঁকার জন্য এমন তিনটি উপাত্ত দেওয়া থাকে, যাদের সাহায্যে বিভিন্ন অঙ্কনের মাধ্যমে ত্রিভুজটি নির্ধারণ করা যায়। এরূপ কয়েকটি সম্পাদ্য নিচে বর্ণনা করা হলো।

সম্পাদ্য ১. ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

মনে করি, কোনো ত্রিভুজের ভূমি a, ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ $\angle x$ এবং অপর দুই বাহুর সমষ্টি s দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

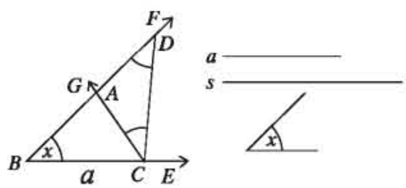
অঙ্কন:

১. যেকোনো একটি রশ্মি BE থেকে ভূমি a এর সমান করে BC রেখাংশ কেটে নিই। BC রেখাংশের B বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle CBF$ আঁকি।

২. BF রশ্মি থেকে s এর সমান BD অংশ কাটি।

৩. C, D যোগ করি। C বিন্দুতে DC রেখাংশের যে পাশে B বিন্দু আছে সেই পাশে $\angle BDC$ এর সমান $\angle DCG$ আঁকি।

৪. CG রশ্মি BD কে A বিন্দুতে ছেদ করে।



তাহলে, $\triangle ABC$ ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ: $\triangle ACD$ এ $\angle ADC = \angle ACD$ [অঙ্কন অনুসারে]

$\therefore AC = AD$

এখন, $\triangle ABC$ এ $\angle ABC = \angle x, BC = a$ [অঙ্কন অনুসারে]

এবং $BA + AC = BA + AD = BD = s$।

অতএব, $\triangle ABC$ ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

বিকল্প পদ্ধতি: মনে করি, কোনো ত্রিভুজের ভূমি a, ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ $\angle x$ এবং অপর দুই বাহুর সমষ্টি s দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

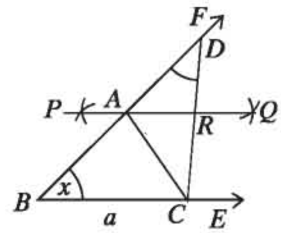
অঙ্কন:

১. যেকোনো একটি রশ্মি BE থেকে ভূমি a এর সমান করে BC রেখাংশ কেটে নিই। রেখাংশের B বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle CBF$ আঁকি।

২. BF রশ্মি থেকে s এর সমান BD অংশ কাটি।

৩. C, D যোগ করি। CD এর লম্বদ্বিখণ্ডক PQ আঁকি।

৪. PQ রশ্মি BD রশ্মিকে A এবং CD কে R বিন্দুতে ছেদ করে। A, C যোগ করি।



তাহলে, $\triangle ABC$ ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ: $\triangle ACR$ এবং $\triangle ADR$ এ $CR = DR$, $AR = AR$ এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle ARC =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle ARD$ [সমকোণ]

$\triangle ACR \cong \triangle ADR$।

$\therefore AC = AD$

এখন, $\triangle ABC$ এ $\angle ABC = \angle x, BC = a$ [অঙ্কন অনুসারে]

এবং $BA + AC = BA + AD = BD = s$।

অতএব, $\triangle ABC$ ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

সম্পাদ্য ২. ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন একটি সূক্ষ্মকোণ ও অপর দুই বাহুর অন্তর দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

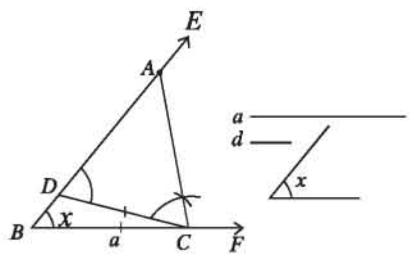
মনে করি, কোনো ত্রিভুজের ভূমি a, ভূমি সংলগ্ন সূক্ষ্মকোণ $\angle x$ এবং অপর দুই বাহুর অন্তর d দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন:

১. যেকোনো একটি রশ্মি BF থেকে ভূমি a এর সমান করে BC রেখাংশ কেটে নিই। BC রেখাংশের B বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle CBE$ আঁকি।

২. BE রশ্মি থেকে d এর সমান BD অংশ কেটে নিই।

৩. C, D যোগ করি। DC রেখাংশের যে পাশে E বিন্দু আছে সেই পাশে C বিন্দুতে $\angle EDC$ এর সমান $\angle DCA$ আঁকি।



CA রশ্মি BE রশ্মিকে A বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, $\triangle ABC$ ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ: অঙ্কন অনুসারে, $\triangle ACD$ এ $\angle ACD = \angle ADC$

২০২২

$\therefore AD = AC$

সুতরাং দুই বাহুর অন্তর, $AB - AC = AB - AD = BD = d$

এখন, $\triangle ABC$ এ $BC = a$, $AB - AC = d$ এবং $\angle ABC = \angle x$

সুতরাং, $\triangle ABC$ ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

কাজ:

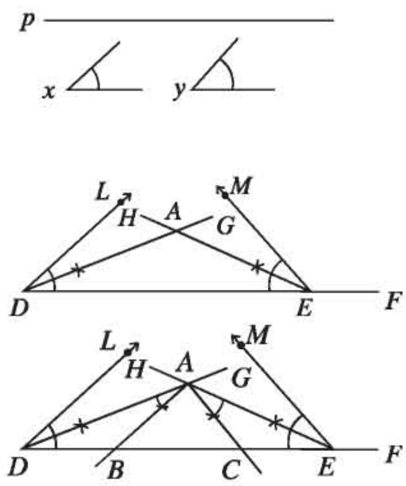
ক) প্রদত্ত কোণ সূক্ষ্মকোণ না হলে, উপরের পদ্ধতিতে অঙ্কন করা সম্ভব নয়। কেন? এ ক্ষেত্রে ত্রিভুজটি আঁকার কোনো উপায় বের কর।

খ) ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন একটি সূক্ষ্মকোণ ও অপর দুই বাহুর অন্তর দেওয়া আছে। বিকল্প পদ্ধতিতে ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

সম্পাদ্য ৩. ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন দুইটি কোণ ও পরিসীমা দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

মনে করি, একটি ত্রিভুজের পরিসীমা p এবং ভূমি সংলগ্ন দুইটি কোণ $\angle x$ ও $\angle y$ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন:



১. যেকোনো একটি রশ্মি DF থেকে পরিসীমা p এর সমান করে DE অংশ কেটে নিই। D ও E বিন্দুতে DE রেখাংশের একই পাশে $\angle x$ এর সমান $\angle EDL$ এবং $\angle y$ এর সমান $\angle DEM$ আঁকি।

২. কোণ দুইটির দ্বিখণ্ডক DG ও EH আঁকি।

৩. মনে করি, DG ও EH রশ্মিদ্বয় পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দুতে $\angle ADE$ এর সমান $\angle DAB$ এবং $\angle AED$ এর সমান $\angle EAC$ আঁকি।

৪. AB এবং AC রশ্মিদ্বয় DE রেখাংশকে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, $\triangle ABC$ ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ: $\triangle ABD$ এ $\angle ADB = \angle DAB$ [অঙ্কন অনুসারে]

$\therefore AB = DB$

আবার, $\triangle ACE$ এ $\angle AEC = \angle EAC$

$\therefore CA = CE$

সুতরাং $\triangle ABC$ এ $AB + BC + CA = DB + BC + CE = DE = p$

২০২২

$\angle ABC = \angle ADB + \angle DAB = \frac{1}{2}\angle x + \frac{1}{2}\angle x = \angle x$

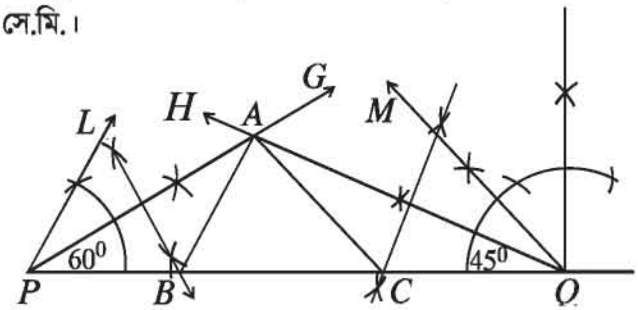
এবং $\angle ACB = \angle AEC + \angle EAC = \frac{1}{2}\angle y + \frac{1}{2}\angle y = \angle y$

সুতরাং $\triangle ABC$ ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

কাজ:

ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন দুইটি সূক্ষ্মকোণ ও পরিসীমা দেওয়া আছে। বিকল্প পদ্ধতিতে ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

উদাহরণ ১. একটি ত্রিভুজ ABC আঁক, যার $\angle B = 60°$, $\angle C = 45°$ এবং পরিসীমা $AB + BC + CA = 11$ সে.মি.।



অঙ্কন: নিচের ধাপসমূহ অনুসরণ করি:

১. রেখাংশ $PQ = 11$ সে.মি. আঁকি।

২. PQ রেখাংশের একই পাশে P এবং Q বিন্দুতে যথাক্রমে $\angle QPL = 60°$ ও $\angle PQM = 45°$ কোণ আঁকি।

৩. কোণ দুইটির দ্বিখণ্ডক PG ও QH আঁকি। মনে করি, PG ও QH রশ্মিদ্বয় পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

৪. PA, QA রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডক আঁকি যা PQ রেখাংশকে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে ছেদ করে।

৫. A, B এবং A, C যোগ করি।

তাহলে, $\triangle ABC$ ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

> **কাজ:**
>
> সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন একটি বাহু এবং অতিভুজ ও অপর বাহুর অন্তর দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

উদাহরণ ২. একটি ত্রিভুজের ভূমি $a = 3$ সে.মি., ভূমি সংলগ্ন সূক্ষ্মকোণ 45° এবং অপর বাহু দুইটির সমষ্টি $s = 6$ সে.মি.।

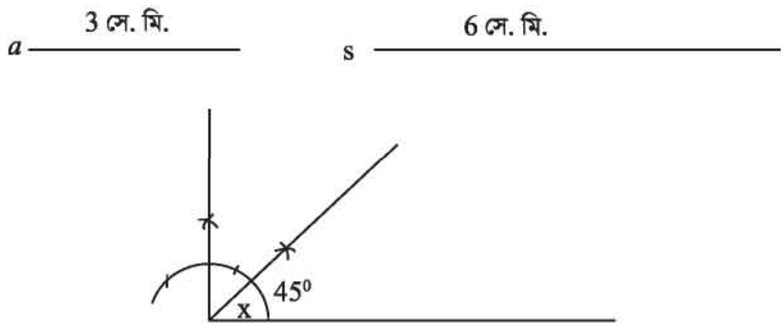
ক) উদ্দীপকের তথ্যগুলো চিত্রে প্রকাশ কর।

খ) ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। (অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক)

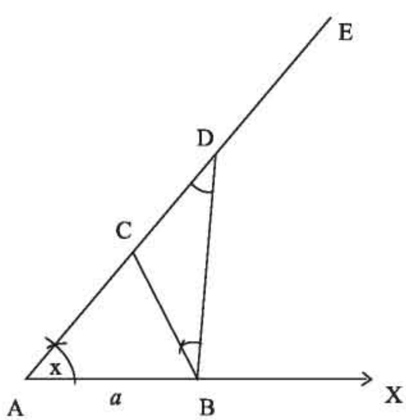
গ) একটি বর্গের পরিসীমা $2s$ হলে বর্গটি আঁক। (অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক)

সমাধান:

ক)

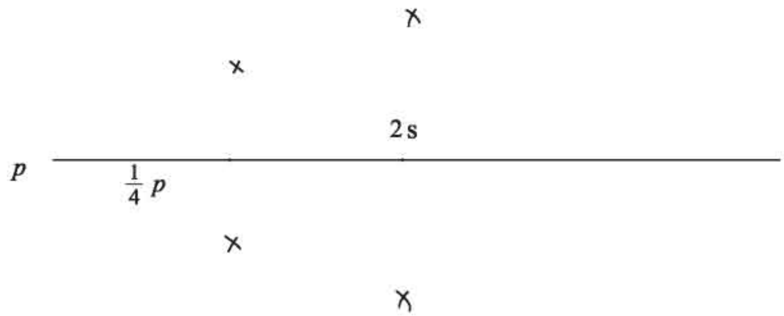


খ) AX যেকোনো রশ্মি থেকে $AB = a$ কাটি। A বিন্দুতে $\angle XAE = x$ আঁকি, AE থেকে $AD = s$ নেই। B, D যোগ করি। এবার B বিন্দুতে $\angle ADB$ এর সমান করে $\angle DBC$ আঁকি। BC রেখাংশ AD কে C বিন্দুতে ছেদ করে। $\therefore ABC$ উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

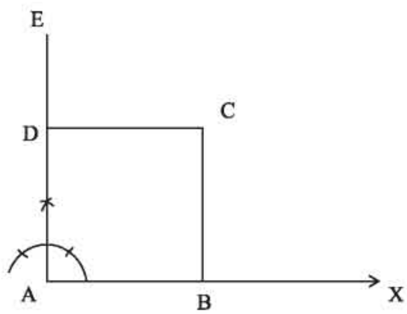


গ) মনে করি, একটি বর্গের পরিসীমা $p = 2s$ দেওয়া আছে, বর্গটি অঙ্কন করতে হবে।

২০২৫



AX যেকোনো রশ্মি থেকে $AB = \frac{1}{4}p$ কেটে নেই।
A বিন্দুতে $AE \perp AB$ আঁকি। AE থেকে $AD = AB$ কাটি।
এবার B ও D বিন্দুকে কেন্দ্র করে $\frac{1}{4}p$ এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে $\angle BAD$ এর অভ্যন্তরে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর C বিন্দুতে ছেদ করে।
B, C এবং C, D যোগ করি।
$\therefore ABCD$ উদ্দিষ্ট বর্গক্ষেত্র।



অনুশীলনী ৭.১

১. নিম্নে প্রদত্ত উপাত্ত নিয়ে ত্রিভুজ অঙ্কন কর:

ক) তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3 সে.মি., 3.5 সে.মি., 2.8 সে.মি.।

খ) দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি., 3 সে.মি. এবং অন্তর্ভুক্ত কোণ $60°$।

গ) দুইটি কোণ $60°$ ও $45°$ এবং এদের সংলগ্ন বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সে.মি.।

ঘ) দুইটি কোণ $60°$ ও $45°$ এবং $45°$ কোণের বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সে.মি.।

ঙ) দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4.5 সে.মি. ও 3.5 সে.মি. এবং দ্বিতীয় বাহুর বিপরীত কোণ $30°$।

চ) সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও একটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 সে.মি. ও 4 সে.মি.।

২. নিম্নে প্রদত্ত উপাত্ত নিয়ে ত্রিভুজ অঙ্কন কর:

ক) ভূমি 3.5 সে.মি., ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ $60°$ ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি 8 সে.মি.।

খ) ভূমি 5 সে.মি., ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ $45°$ ও অপর দুই বাহুর অন্তর 1 সে.মি.।

গ) ভূমি সংলগ্ন কোণ দুইটি যথাক্রমে $60°$ ও $45°$ ও পরিসীমা 12 সে.মি.।

৩. একটি ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন দুইটি কোণ এবং শীর্ষ থেকে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

৪. সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

৫. ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ, উচ্চতা ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

৬. সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

৭. ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন একটি স্থূলকোণ ও অপর দুই বাহুর অন্তর দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

চতুর্ভুজ অঙ্কন

আমরা দেখেছি যে, ত্রিভুজের তিনটি উপাত্ত দেওয়া থাকলে অনেক ক্ষেত্রেই ত্রিভুজটি নির্দিষ্টভাবে আঁকা সম্ভব। কিন্তু চতুর্ভুজের চারটি বাহু দেওয়া থাকলেই একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ আঁকা যায় না। নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ আঁকার জন্য পাঁচটি স্বতন্ত্র উপাত্ত প্রয়োজন হয়। নিম্নে বর্ণিত পাঁচটি উপাত্ত জানা থাকলে, নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ আঁকা যায়।

১. চারটি বাহু ও একটি কোণ

২. চারটি বাহু ও একটি কর্ণ

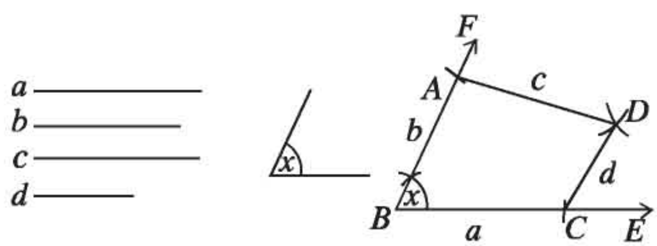
৩. তিনটি বাহু ও দুইটি কর্ণ

৪. তিনটি বাহু ও এদের অন্তর্ভুক্ত দুইটি কোণ

৫. দুইটি বাহু ও তিনটি কোণ।

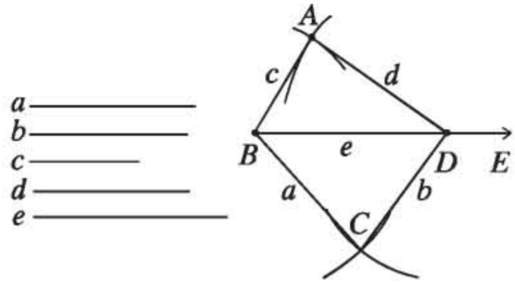
অষ্টম শ্রেণিতে উল্লেখিত উপাত্ত দিয়ে চতুর্ভুজ অঙ্কন বিষয়ে আলোচনা করা হয়েছে। অঙ্কনের কৌশল লক্ষ করে দেখা যায় কিছু ক্ষেত্রে সরাসরি চতুর্ভুজ আঁকা হয়। আবার কিছু ক্ষেত্রে ত্রিভুজ অঙ্কনের মাধ্যমে চতুর্ভুজ আঁকা হয়। যেহেতু কর্ণ চতুর্ভুজকে দুইটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে, সেহেতু উপাত্ত হিসাবে একটি বা দুইটি কর্ণ প্রদত্ত হলে ত্রিভুজ অঙ্কনের মাধ্যমে চতুর্ভুজ আঁকা সম্ভব হয়।

১. চারটি বাহু ও একটি কোণ

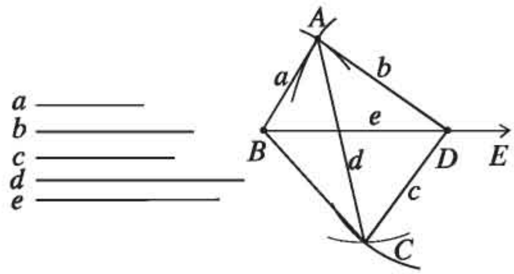


২০২২

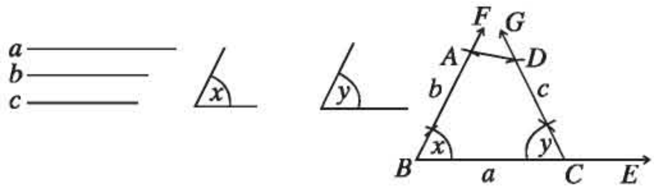
২. চারটি বাহু ও একটি কর্ণ



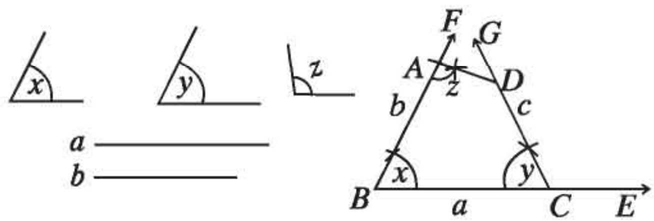
৩. তিনটি বাহু ও দুইটি কর্ণ



৪. তিনটি বাহু ও এদের অন্তর্ভুক্ত দুইটি কোণ



৫. দুইটি বাহু ও তিনটি কোণ।

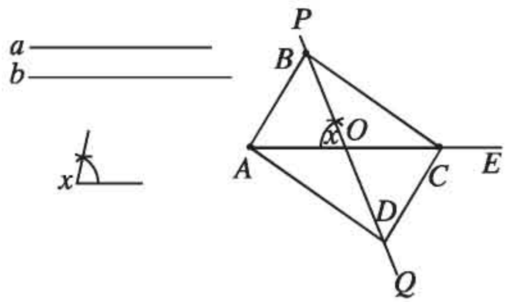


বিশেষ ধরনের চতুর্ভুজ অঙ্কনের জন্য অনেক সময় এমন উপাত্ত দেওয়া থাকে যা থেকে নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ আঁকার জন্য প্রয়োজনীয় পাঁচটি স্বতন্ত্র উপাত্ত পাওয়া যায়। তাহলে ঐ উপাত্তের সাহায্যেও চতুর্ভুজটি আঁকা যায়। যেমন, সামান্তরিকের দুইটি সংলগ্ন বাহু ও এদের অন্তর্ভুক্ত কোণটি দেওয়া থাকলে সামান্তরিকটি আঁকা যায়। এখানে তিনটি মাত্র উপাত্ত দেওয়া আছে। আবার বর্গের মাত্র একটি বাহু দেওয়া থাকলেই বর্গটি আঁকা যায়। কারণ, তাতে পাঁচটি উপাত্ত, যথা: বর্গের চার সমান বাহু ও এক কোণ (সমকোণ) নির্দিষ্ট হয়।

সম্পাদ্য ৪. সামান্তরিকের দুইটি কর্ণ ও এদের অন্তর্ভুক্ত একটি কোণ দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।

মনে করি, সামান্তরিকের কর্ণ দুইটি a ও b এবং কর্ণদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত একটি কোণ $\angle x$ দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন: যেকোনো রশ্মি AE থেকে a এর সমান AC রেখাংশ নিই। AC এর মধ্যবিন্দু O নির্ণয় করি। O বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle AOP$ আঁকি। OP এর বিপরীত রশ্মি OQ অঙ্কন করি। OP ও OQ রশ্মিদ্বয় থেকে $\frac{1}{2}b$ এর সমান যথাক্রমে OB ও OD রেখাংশদ্বয় নিই। A, B; A, D; C, B ও C, D যোগ করি।



তাহলে, $ABCD$ ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

প্রমাণ: $\triangle AOB$ ও $\triangle COD$ এ $OA = OC = \frac{1}{2}a,\ OB = OD = \frac{1}{2}b$ [অঙ্কনানুসারে]

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle AOB =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle COD$ [বিপ্রতীপ কোণ]

অতএব, $\triangle AOB \cong \triangle COD$

সুতরাং, $AB = CD$ এবং $\angle ABO = \angle CDO$; কিন্তু কোণ দুইটি একান্তর কোণ।

$\therefore AB$ ও CD সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে, AD ও BC সমান ও সমান্তরাল।

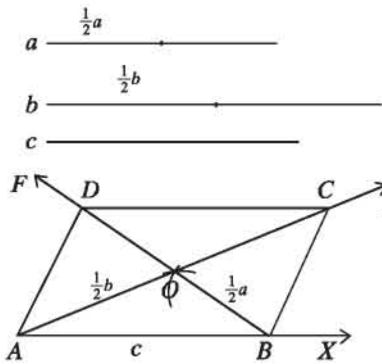
সুতরাং, $ABCD$ একটি সামান্তরিক যার কর্ণদ্বয় $AC = AO + OC = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = a$ ও $BD = BO + OD = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b = b$ এবং কর্ণ দুইটির অন্তর্ভুক্ত $\angle AOB = \angle x$

অতএব, $ABCD$ ই নির্ণেয় সামান্তরিক।

সম্পাদ্য ৫. সামান্তরিকের দুইটি কর্ণ ও একটি বাহু দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।

মনে করি সামান্তরিকের দুইটি কর্ণ a ও b এবং একটি বাহু c দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন: a ও b কর্ণদ্বয়কে সমান দুইভাগে বিভক্ত করি। যেকোনো রশ্মি AX থেকে c এর সমান AB নিই। A ও B কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে $\frac{a}{2}$ ও $\frac{b}{2}$ এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে AB এর একই পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। মনে করি, বৃত্তচাপ দুইটি পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। A, O ও B, O যোগ করি। AO কে AE বরাবর এবং BO কে BF বরাবর বর্ধিত করি। OE থেকে $\frac{a}{2} = OC$ এবং OF থেকে $\frac{b}{2} = OD$ নিই। A, D; D, C ও B, C যোগ করি।



তাহলে, $ABCD$ ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

প্রমাণ: $\triangle AOB$ ও $\triangle COD$ এ

$OA = OC = \frac{a}{2}; OB = OD = \frac{b}{2}$ [অঙ্কনানুসারে]

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle AOB$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle COD$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\therefore \triangle AOB \cong \triangle COD$।

$\therefore AB = CD$ এবং $\angle ABO = \angle ODC$; কিন্তু কোণ দুইটি একান্তর কোণ।

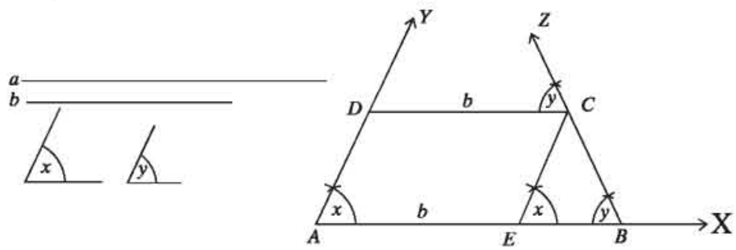
AB ও CD সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে, AD ও BC সমান ও সমান্তরাল।

অতএব, $ABCD$ ই নির্ণেয় সামান্তরিক।

উদাহরণ ৩. ট্রাপিজিয়ামের দুইটি সমান্তরাল বাহু এবং এদের মধ্যে বৃহত্তর বাহু সংলগ্ন দুইটি কোণ দেওয়া আছে। ট্রাপিজিয়ামটি আঁক।

মনে করি, ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয় a এবং b, যেখানে $a > b$ এবং বৃহত্তর বাহু a সংলগ্ন কোণদ্বয় $\angle x$ ও $\angle y$। ট্রাপিজিয়ামটি আঁকতে হবে।



অঙ্কন: যেকোনো রশ্মি AX থেকে $AB = a$ নিই। AB রেখাংশের A বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle BAY$ এবং B বিন্দুতে $\angle y$ এর সমান $\angle ABZ$ আঁকি।

এবার AB রেখাংশ থেকে $AE = b$ কেটে নিই। E বিন্দুতে $EC \parallel AY$ আঁকি যা BZ রশ্মিতে C বিন্দুতে ছেদ করে। এবার $CD \parallel BA$ আঁকি। CD রেখাংশ AY রশ্মিকে D বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, $ABCD$ ই উদ্দিষ্ট ট্রাপিজিয়াম।

প্রমাণ: অঙ্কনানুসারে, $AE \parallel CD$ এবং $AD \parallel EC$ সুতরাং $AECD$ একটি সামান্তরিক এবং $CD = AE = b$।

এখন, চতুর্ভুজ $ABCD$ এ $AB = a$, $CD = b$, $AB \parallel CD$ এবং $\angle BAD = \angle x$, $\angle ABC = \angle y$ [অঙ্কন অনুসারে]

অতএব, $ABCD$ ই নির্ণেয় ট্রাপিজিয়াম।

২০২২

কাজ: রম্বসের পরিসীমা ও একটি কোণ দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁক।

উদাহরণ ৪. ABC ত্রিভুজের $\angle B = 60^\circ,\ \angle C = 45^\circ$ এবং পরিসীমা $p = 13$ সে.মি.।

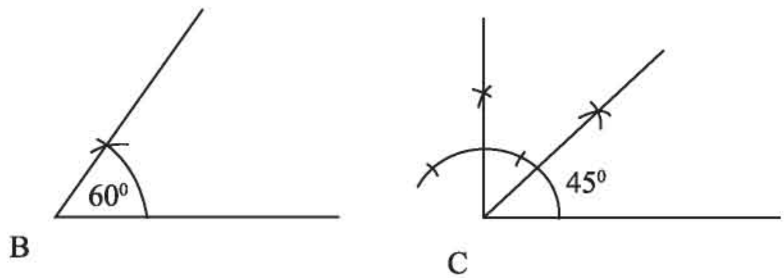
ক) স্কেল ও কম্পাস দিয়ে $\angle B$ ও $\angle C$ আঁক।

খ) ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। (অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক)

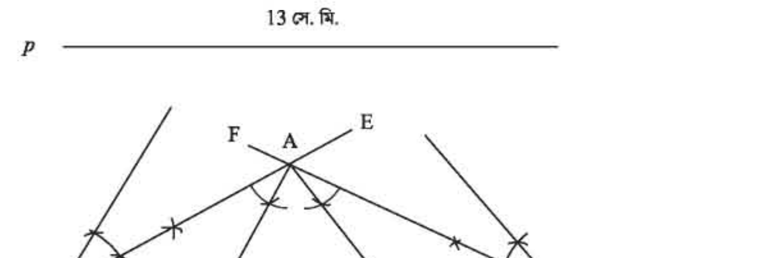
গ) একটি রম্বস আঁক যার বাহুর দৈর্ঘ্য $\frac{p}{3}$ এর সমান এবং একটি কোণ $\angle B$ এর সমান। (অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক)

সমাধান:

ক)



খ)

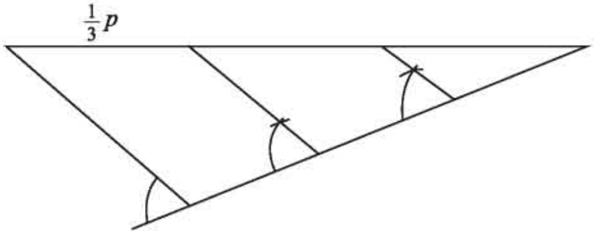


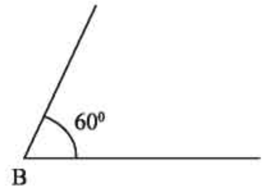
যেকোনো রশ্মি RX থেকে $RQ = p$ কেটে নেই। R বিন্দুতে $\frac{1}{2}\angle B$ এবং Q বিন্দুতে $\frac{1}{2}\angle C$ এর সমান করে যথাক্রমে $\angle ERX$ ও $\angle FQR$ আঁকি। ER ও FQ A বিন্দুতে ছেদ করে। এবার A বিন্দুতে ER এর যে পাশে $\angle ERX$ অবস্থিত সে ই পাশে $\angle RAB = \frac{1}{2}\angle B$ এবং FQ এর যে পাশে $\angle FQR$ অবস্থিত সে ই পাশে $\angle QAC = \frac{1}{2}\angle C$ আঁকি। AB ও AC রেখাংশ, RQ কে যথাক্রমে B C বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore ABC$ উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

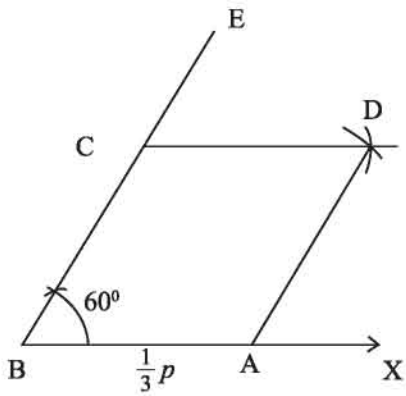
২০২২

গ) রম্বসের বাহুর দৈর্ঘ্য $\frac{1}{3}p$, একটি কোণ $\angle B = 60^\circ$ দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁকতে হবে।





BX যেকোনো রশ্মি থেকে $BA = \frac{1}{3}p$ কাটি। B বিন্দুতে $\angle ABE = 60^\circ$ আঁকি। BE থেকে $BC = AB$ নেই। আবার A ও C বিন্দুকে কেন্দ্র করে $\frac{1}{3}p$ এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে $\angle ABC$ এর অভ্যন্তরে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর D বিন্দুতে ছেদ করে। $A,\ D;\ C,\ D$ যোগ করি। $\therefore ABCD$ উদ্দিষ্ট রম্বস।



অনুশীলনী ৭.২

১. সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণ দুইটির পরিমাণ দেওয়া থাকলে নিম্নের কোন ক্ষেত্রে ত্রিভুজ অঙ্কন করা সম্ভব?

ক) 60° ও 36° খ) 40° ও 50°

গ) 30° ও 70° ঘ) 80° ও 20°

২. একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4 সে.মি. ও 9 সে.মি. হলে তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য কত সে.মি.?

ক) 4 খ) 5 গ) 6 ঘ) 13

৩. একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের প্রতিটির দৈর্ঘ্য 18 সে.মি. হলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত বর্গসে.মি.?

ক) 36 খ) 81 গ) 162 ঘ) 324

৪. নির্দিষ্ট একটি চতুর্ভুজ আঁকা সম্ভব যদি দেয়া থাকে -

(i) চারটি বাহু ও একটি কোণ

(ii) তিনটি বাহু ও এদের অন্তর্ভুক্ত দুইটি কোণ

(iii) দুইটি বাহু ও তিনটি কোণ

২০২২

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i খ) ii গ) i, ii ঘ) i, ii ও iii

৫. রম্বসের -

(i) চারটি বাহু পরস্পর সমান

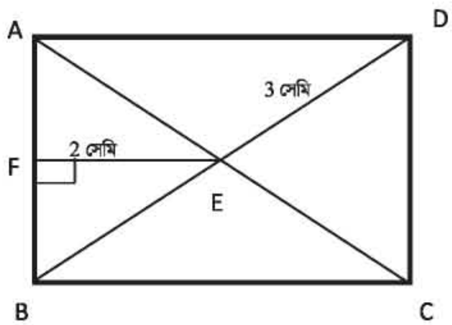
(ii) বিপরীত কোণ সমান

(iii) কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i, ii খ) i, iii গ) ii, iii ঘ) i, ii ও iii

চিত্রে $ABCD$ একটি আয়তক্ষেত্র, $EF = 2$ সে.মি. এবং $DE = 3$ সে.মি.। এই তথ্যের আলোকে (৬ - ৮) নং প্রশ্নের উত্তর দাওঃ



৬. BF এর দৈর্ঘ্য কত সে.মি.?

ক) 1 খ) $\sqrt{5}$ গ) $\sqrt{13}$ ঘ) 5

৭. AB কত সে.মি.?

ক) 2 খ) $2\sqrt{5}$ গ) $5\sqrt{2}$ ঘ) 10

৮. $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল কত বর্গসে.মি.?

ক) $8\sqrt{5}$ খ) 20 গ) $12\sqrt{5}$ ঘ) $32\sqrt{5}$

৯. নিম্নে প্রদত্ত উপাত্ত নিয়ে চতুর্ভুজ অঙ্কন কর:

ক) চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3 সে.মি., 3.5 সে.মি., 2.5 সে.মি. ও 3 সে.মি. এবং একটি কোণ $45°$।

খ) চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3.5 সে.মি, 4 সে.মি., 2.5 সে.মি. ও 3.5 সে.মি. এবং একটি কর্ণ 5 সে.মি.।

গ) তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3.2 সে.মি., 3 সে.মি., 3.5 সে.মি. এবং দুইটি কর্ণ 2.8 সে.মি. ও 4.5 সে.মি.।

ঘ) তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3 সে.মি., 3.5 সে.মি., 4 সে.মি. এবং দুইটি কোণ $60°$ ও $45°$।

১০. নিম্নে প্রদত্ত উপাত্ত নিয়ে সামান্তরিক অঙ্কন কর:

২০২২

ক) দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 4 সে.মি., 6.5 সে.মি. এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $45°$।

খ) একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি. এবং দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 5 সে.মি., 6.5 সে.মি.।

১১. $ABCD$ চতুর্ভুজের AB ও BC বাহু এবং $\angle B$, $\angle C$ ও $\angle D$ কোণ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁক।

১২. $ABCD$ চতুর্ভুজের কর্ণ দুইটির ছেদবিন্দু দ্বারা কর্ণ দুইটির চারটি খণ্ডিত অংশ এবং এদের অন্তর্ভুক্ত একটি কোণ যথাক্রমে $OA = 4$ সে.মি., $OB = 5$ সে.মি., $OC = 3.5$ সে.মি., $OD = 4.5$ সে.মি. ও $\angle AOB = 80°$ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁক।

১৩. রম্বসের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3.5 সে.মি. ও একটি কোণ $45°$; রম্বসটি আঁক।

১৪. রম্বসের একটি বাহু এবং একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁক।

১৫. রম্বসের দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁক।

১৬. বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা দেওয়া আছে। বর্গক্ষেত্রটি আঁক।

১৭. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 5 সে.মি. ও এক বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি.। উপরের তথ্যের আলোকে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

ক) ত্রিভুজটির অপর বাহুর দৈর্ঘ্য কত?

খ) ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। (অঙ্কনের চিহ্ন আবশ্যক)

গ) ত্রিভুজটির পরিসীমার সমান পরিসীমাবিশিষ্ট একটি বর্গ অঙ্কন কর। (অঙ্কনের চিহ্ন আবশ্যক)

১৮. $ABCD$ চতুর্ভুজের $AB = 4$ সে.মি., $BC = 5$, $\angle A = 85°$, $\angle B = 80°$ এবং $\angle C = 95°$। উপরের তথ্যের আলোকে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও।

ক) $\angle D$ এর মান নির্ণয় কর।

খ) প্রদত্ত তথ্য অনুযায়ী $ABCD$ চতুর্ভুজটি অঙ্কন কর। (অঙ্কনের চিহ্ন আবশ্যক)

গ) প্রদত্ত বাহু দুইটিকে একটি সামান্তরিকের বাহু এবং $\angle B = 80°$ ধরে সামান্তরিকটি অঙ্কন কর। (অঙ্কনের চিহ্ন আবশ্যক)

১৯. একটি ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি. ও 6 সে.মি. এবং বৃহত্তম বাহু সংলগ্ন দুইটি কোণ $\angle x = 60°$ এবং $\angle y = 50°$।

ক) প্রদত্ত তথ্যগুলো চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ) ট্রাপিজিয়ামটি আঁক। (অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক)

গ) উদ্দীপকের বাহু দুইটিকে সামান্তরিকের দুইটি কর্ণ ও $\angle y$ কে অন্তর্ভুক্ত কোণ বিবেচনা করে সামান্তরিকটি আঁক। (অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক)

২০২২