অধ্যায় ৫

এক চলকবিশিষ্ট সমীকরণ (Equations in One Variable)

আমরা পূর্বের শ্রেণিতে চলক ও সমীকরণ কী তা জেনেছি এবং এদের ব্যবহার শিখেছি। এক চলকবিশিষ্ট সরল সমীকরণের সমাধান করতে শিখেছি এবং বাস্তবভিত্তিক সমস্যার সরল সমীকরণ গঠন করে তা সমাধান করা সম্পর্কে সম্যক জ্ঞান লাভ করেছি। এ অধ্যায়ে এক চলকবিশিষ্ট একঘাত ও দ্বিঘাত সমীকরণ এবং অভেদ সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে এবং বাস্তবভিত্তিক সমস্যার সমাধানে এদের ব্যবহার দেখানো হয়েছে।

এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা ---

- চলকের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সমীকরণ ও অভেদের পার্থক্য ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- একঘাত সমীকরণের সমাধান করতে পারবে।
- বাস্তবভিত্তিক সমস্যার একঘাত সমীকরণ গঠন করে সমাধান করতে পারবে।
- দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান করতে পারবে ও সমাধান সেট নির্ণয় করতে পারবে।
- বাস্তবভিত্তিক সমস্যার দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন করে সমাধান করতে পারবে।

চলক (Variable)

আমরা জানি, $x+3=5$ একটি সমীকরণ। এটি সমাধান করতে হলে আমরা অজ্ঞাত রাশি x এর মান বের করি। এখানে অজ্ঞাত রাশি x একটি চলক। আবার, $x+a=5$ সমীকরণটি সমাধান করতে হলে, আমরা x এর মান নির্ণয় করি, a এর মান নয়। এখানে x কে চলক ও a কে ধ্রুবক হিসাবে ধরা হয়। এক্ষেত্রে x এর মান a এর মাধ্যমে পাওয়া যাবে। তবে a এর মান নির্ণয় করতে হলে, আমরা লিখবো $a=5-x$; অর্থাৎ a এর মান x এর মাধ্যমে পাওয়া যাবে। এখানে a চলক ও x ধ্রুবক হিসাবে বিবেচিত। তবে বিশেষ কোনো নির্দেশনা না থাকলে প্রচলিত রীতি অনুযায়ী x কে চলক হিসাবে ধরা হয়। সাধারণত ইংরেজি বর্ণমালার ছোট হাতের শেষের দিকের অক্ষর x, y, z কে চলক হিসাবে এবং প্রথম দিকের অক্ষর a, b, c কে ধ্রুবক হিসেবে ব্যবহার করা হয়।

যে সমীকরণে একটি মাত্র অজ্ঞাত রাশি থাকে, তাকে এক চলকবিশিষ্ট সমীকরণ বা সরল সমীকরণ বলা হয়। যেমন, $x+3=5,\ x^2-5x+b=0,\ 2y^2+5y-3=0$ ইত্যাদি।

যদি একটি সেট $S=\{x : x\in R, 1\leq x\leq 10\}$ হয়, তবে x-এর মান 1 থেকে 10 পর্যন্ত যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হতে পারে। এখানে x একটি চলক। কাজেই আমরা বলতে পারি যে, যখন কোনো অক্ষর প্রতীক কোনো সেটের উপাদান বোঝায় তখন একে চলক বলে।

সমীকরণের ঘাত: কোনো সমীকরণের চলকের সর্বোচ্চ ঘাতকে সমীকরণটির ঘাত বলে। $x+1=5,\ 2x-1=x+5,\ y+7=2y-3$ সমীকরণগুলোর প্রত্যেকটির ঘাত 1; এগুলো এক চলকবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ।

আবার, $x^2+5x+6=0,\ y^2-y=12,\ 4x^2-2x=3-6x$ সমীকরণগুলোর প্রত্যেকটির ঘাত 2; এগুলো এক চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ। $2x^3-x^2-4x+4=0$ সমীকরণটি এক চলকবিশিষ্ট ত্রিঘাত সমীকরণ।

সমীকরণ ও অভেদ (Equation and Identity)

সমীকরণ: সমীকরণে সমান চিহ্নের দুইপক্ষে দুইটি বহুপদী থাকে, অথবা একপক্ষে (প্রধানত ডানপক্ষে) শূন্য থাকতে পারে। দুই পক্ষের বহুপদীর চলকের সর্বোচ্চ ঘাত সমান নাও হতে পারে। সমীকরণ সমাধান করে চলকের সর্বোচ্চ ঘাতের সমান সংখ্যক মান পাওয়া যাবে। এই মান বা মানগুলোকে বলা হয় সমীকরণটির মূল। এই মূল বা মূলগুলো দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হবে। একাধিক মূলের ক্ষেত্রে এগুলো সমান বা অসমান হতে পারে। যেমন, $x^2-5x+6=0$ সমীকরণটির মূল $2, 3$। আবার, $(x-3)^2=0$ সমীকরণে x এর মান 3 হলেও এর মূল $3, 3$।

অভেদ: সমান চিহ্নের দুইপক্ষে সমান ঘাতবিশিষ্ট দুইটি বহুপদী থাকে। চলকের সর্বোচ্চ ঘাতের সংখ্যার চেয়েও অধিক সংখ্যক মানের জন্য অভেদটি সিদ্ধ হবে। সমান চিহ্নের উভয় পক্ষের মধ্যে কোনো ভেদ নেই বলেই অভেদ। যেমন, $(x+1)^2-(x-1)^2=4x$ একটি অভেদ, এটি x এর সকল মানের জন্য সিদ্ধ হবে। তাই এই সমীকরণটি একটি অভেদ। প্রত্যেক বীজগণিতীয় সূত্র একটি অভেদ। যেমন $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\ (a-b)^2=a^2-2ab+b^2,\ a^2-b^2=(a+b)(a-b),\ (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ইত্যাদি অভেদ।

সকল সমীকরণ অভেদ নয়। অভেদে সমান $(=)$ চিহ্নের পরিবর্তে $\equiv$ চিহ্ন ব্যবহৃত হয়। তবে সকল অভেদই সমীকরণ বলে অভেদের ক্ষেত্রেও সাধারণত সমান চিহ্ন ব্যবহার করা হয়।

সমীকরণ ও অভেদের পার্থক্য নিচে দেওয়া হলো:

২০২২

সমীকরণ	অভেদ
১। সমান চিহ্নের দুই পক্ষে দুইটি বহুপদী থাকতে পারে অথবা এক পক্ষে শূন্য থাকতে পারে।	১। দুই পক্ষে দুইটি বহুপদী থাকে।
২। উভয় পক্ষের বহুপদীর মাত্রা অসমান হতে পারে।	২। উভয় পক্ষে বহুপদীর মাত্রা সমান থাকে।
৩। চলকের এক বা একাধিক মানের জন্য সমতাটি সত্য হয়।	৩। চলকের মূল সেটের সকল মানের জন্য সাধারণত সমতাটি সত্য হয়।
৪। চলকের মানের সংখ্যা সর্বাধিক মাত্রার সমান হতে পারে।	৪। চলকের অসংখ্য মানের জন্য সমতাটি সত্য।
৫। সকল সমীকরণ অভেদ নয়।	৫। সকল বীজগণিতীয় অভেদই সমীকরণ।

কাজ:

ক) নিচের সমীকরণগুলোর কোনটির ঘাত কত ও মূল কয়টি?

(১) $3x + 1 = 5$ (২) $\frac{2y}{5} - \frac{y-1}{3} = \frac{3y}{2}$

খ) তিনটি অভেদ লেখ।

একঘাত সমীকরণের সমাধান (Solving Linear Equations)

সমীকরণ সমাধানের ক্ষেত্রে কয়েকটি নিয়ম প্রয়োগ করতে হয়। এই নিয়মগুলো জানা থাকলে সমীকরণের সমাধান নির্ণয় সহজতর হয়। নিয়মগুলো হলো:

১. সমীকরণের উভয়পক্ষে একই সংখ্যা বা রাশি যোগ করলে পক্ষদ্বয় সমান থাকে।

২. সমীকরণের উভয়পক্ষ থেকে একই সংখ্যা বা রাশি বিয়োগ করলে পক্ষদ্বয় সমান থাকে।

৩. সমীকরণের উভয়পক্ষকে একই সংখ্যা বা রাশি দ্বারা গুণ করলে পক্ষদ্বয় সমান থাকে।

৪. সমীকরণের উভয়পক্ষকে অশূন্য একই সংখ্যা বা রাশি দ্বারা ভাগ করলে পক্ষদ্বয় সমান থাকে।

উপরের ধর্মগুলোকে বীজগণিতীয় রাশির মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়:

যদি $x = a$ এবং $c \neq 0$ হয় তাহলে,

$(i)\ x + c = a + c$ $(ii)\ x - c = a - c$ $(iii)\ xc = ac$ $(iv)\ \frac{x}{c} = \frac{a}{c}$

এছাড়া যদি a, b ও c তিনটি রাশি হয় তবে, $a = b + c$ হলে, $a - b = c$ হবে এবং $a + c = b$ হলে, $a = b - c$ হবে।

এই নিয়মটি পক্ষান্তর বিধি হিসাবে পরিচিত এবং এই বিধি প্রয়োগ করে বিভিন্ন সমীকরণ সমাধান করা হয়।

কোনো সমীকরণের পদগুলো ভগ্নাংশ আকারে থাকলে, লবগুলোতে চলকের ঘাত 1 এবং হরগুলো ধ্রুবক হলে, সেগুলো একঘাত সমীকরণ।

উদাহরণ ১. সমাধান কর: $\frac{5x}{7}-\frac{4}{5}=\frac{x}{5}-\frac{2}{7}$

সমাধান: $\frac{5x}{7}-\frac{4}{5}=\frac{x}{5}-\frac{2}{7}$ বা, $\frac{5x}{7}-\frac{x}{5}=\frac{4}{5}-\frac{2}{7}$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\frac{25x-7x}{35}=\frac{28-10}{35}$ বা, $\frac{18x}{35}=\frac{18}{35}$

বা, $18x=18$ বা, $x=1$

$\therefore$ সমাধান $x=1$

এখন, আমরা এমন সমীকরণের সমাধান করবো যা দ্বিঘাত সমীকরণের আকারে থাকে। এ সকল সমীকরণ সরলীকরণের মাধ্যমে সমতুল সমীকরণে রূপান্তর করে $ax=b$ আকারের একঘাত সমীকরণে পরিণত করা হয়। আবার, হরে চলক থাকলেও সরলীকরণ করে একঘাত সমীকরণে রূপান্তর করা হয়।

উদাহরণ ২. সমাধান কর: $(y-1)(y+2)=(y+4)(y-2)$

সমাধান: $(y-1)(y+2)=(y+4)(y-2)$

বা, $y^2-y+2y-2=y^2+4y-2y-8$

বা, $y-2=2y-8$

বা, $y-2y=-8+2$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $-y=-6$

বা, $y=6$

$\therefore$ সমাধান $y=6$

উদাহরণ ৩. সমাধান কর ও সমাধান সেট লেখ: $\frac{6x+1}{15}-\frac{2x-4}{7x-1}=\frac{2x-1}{5}$

সমাধান: $\frac{6x+1}{15}-\frac{2x-4}{7x-1}=\frac{2x-1}{5}$

বা, $\frac{6x+1}{15}-\frac{2x-1}{5}=\frac{2x-4}{7x-1}$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\frac{6x+1-6x+3}{15}=\frac{2x-4}{7x-1}$

বা, $\frac{4}{15}=\frac{2x-4}{7x-1}$

বা, $15(2x-4)=4(7x-1)$ [আড়গুণন করে]

বা, $30x - 60 = 28x - 4$

বা, $30x - 28x = 60 - 4$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $2x = 56$ বা, $x = 28$

$\therefore$ সমাধান $x = 28$

এবং সমাধান সেট $S = \{28\}$

উদাহরণ ৪. সমাধান কর: $\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-5}$

সমাধান: $\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-5}$

বা, $\frac{x-4+x-3}{(x-3)(x-4)} = \frac{x-5+x-2}{(x-2)(x-5)}$

বা, $\frac{2x-7}{x^2-7x+12} = \frac{2x-7}{x^2-7x+10}$

দুই পক্ষের ভগ্নাংশ দুইটির মান সমান। আবার, দুই পক্ষের লব সমান, কিন্তু হর অসমান। এক্ষেত্রে লবের মান একমাত্র শূন্য হলেই দুই পক্ষ সমান হবে।

$\therefore 2x - 7 = 0$ বা, $2x = 7$ বা, $x = \frac{7}{2}$

$\therefore$ সমাধান $x = \frac{7}{2}$

কাজ: $(\sqrt{5}+1)x + 4 = 4\sqrt{5}$ হলে, দেখাও যে, $x = 6 - 2\sqrt{5}$

একঘাত সমীকরণের ব্যবহার

বাস্তব জীবনে বিভিন্ন ধরনের সমস্যার সমাধান করতে হয়। এই সমস্যা সমাধানের অধিকাংশ ক্ষেত্রেই গাণিতিক জ্ঞান, দক্ষতা ও যুক্তির প্রয়োজন হয়। বাস্তব ক্ষেত্রে গাণিতিক জ্ঞান ও দক্ষতার প্রয়োগে একদিকে যেমন সমস্যার সুষ্ঠু সমাধান হয়, অন্যদিকে তেমনি প্রাত্যহিক জীবনে গণিতের মাধ্যমে সমস্যার সমাধান পাওয়া যায় বিধায়, শিক্ষার্থীরা গণিতের প্রতি আকৃষ্ট হয়। এখানে প্রাত্যহিক জীবনের বিভিন্ন সমস্যাকে সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ করে তার সমাধান করা হবে।

বাস্তবভিত্তিক সমস্যা সমাধানে অজ্ঞাত সংখ্যা নির্ণয়ের জন্য এর পরিবর্তে চলক ধরে নিয়ে সমস্যায় প্রদত্ত শর্তানুসারে সমীকরণ গঠন করা হয়। তারপর সমীকরণটি সমাধান করলেই চলকটির মান, অর্থাৎ অজ্ঞাত সংখ্যাটি পাওয়া যায়।

উদাহরণ ৫. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোনো সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্কটি দশক স্থানীয় অঙ্ক অপেক্ষা 2 বেশি। অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যাবে তা প্রদত্ত সংখ্যার দ্বিগুণ অপেক্ষা 6 কম হবে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, দশক স্থানীয় অঙ্কটি x অতএব, একক স্থানীয় অঙ্কটি হবে $x+2$

$\therefore$ সংখ্যাটি $10x+(x+2)$ বা, $11x+2$

অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে পরিবর্তিত সংখ্যাটি হবে $10(x+2)+x$ বা, $11x+20$

প্রশ্নমতে, $11x+20=2(11x+2)-6$

বা, $11x+20=22x+4-6$

বা, $22x-11x=20+6-4$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $11x=22$

বা, $x=2$

$\therefore$ সংখ্যাটি $11x+2=11\times2+2=24$

$\therefore$ প্রদত্ত সংখ্যাটি 24

উদাহরণ ৬. একটি শ্রেণির প্রতিবেঞ্চে 4 জন করে ছাত্র বসালে 3 টি বেঞ্চ খালি থাকে। আবার, প্রতিবেঞ্চে 3 জন করে ছাত্র বসালে 6 জন ছাত্রকে দাঁড়িয়ে থাকতে হয়। ঐ শ্রেণির ছাত্র সংখ্যা কত?

সমাধান: মনে করি, শ্রেণিটির ছাত্র সংখ্যা x

যেহেতু প্রতিবেঞ্চে 4 জন করে বসালে 3 টি বেঞ্চ খালি থাকে, সেহেতু ঐ শ্রেণির বেঞ্চের সংখ্যা $=\frac{x}{4}+3$

আবার, যেহেতু প্রতিবেঞ্চে 3 জন করে বসালে 6 জনকে দাঁড়িয়ে থাকতে হয়, সেহেতু ঐ শ্রেণির বেঞ্চের সংখ্যা $=\frac{x-6}{3}$

যেহেতু শ্রেণির বেঞ্চের সংখ্যা একই থাকবে,

সুতরাং $\frac{x}{4}+3=\frac{x-6}{3}$ বা, $\frac{x+12}{4}=\frac{x-6}{3}$

বা, $4x-24=3x+36$ বা, $4x-3x=36+24$

বা, $x=60$

$\therefore$ ঐ শ্রেণির ছাত্র সংখ্যা 60

উদাহরণ ৭. কবির সাহেব তাঁর 56000 টাকার কিছু টাকা বার্ষিক 12% মুনাফায় ও বাকি টাকা বার্ষিক 10% মুনাফায় বিনিয়োগ করলেন। এক বছর পর তিনি মোট 6400 টাকা মুনাফা পেলেন। তিনি 12% মুনাফায় কত টাকা বিনিয়োগ করেছেন?

২০২২

সমাধান: মনে করি, কবির সাহেব 12% মুনাফায় x টাকা বিনিয়োগ করেছেন।

$\therefore$ তিনি 10% মুনাফায় বিনিয়োগ করেছেন $(56000 - x)$ টাকা।

এখন, x টাকার 1 বছরের মুনাফা $x \times \frac{12}{100}$ টাকা বা, $\frac{12x}{100}$ টাকা।

আবার, $(56000 - x)$ টাকার 1 বছরের মুনাফা $(56000 - x) \times \frac{10}{100}$ টাকা বা, $\frac{10(56000 - x)}{100}$ টাকা।

প্রশ্নমতে, $\frac{12x}{100} + \frac{10(56000 - x)}{100} = 6400$

বা, $12x + 560000 - 10x = 640000$

বা, $2x = 640000 - 560000$

বা, $2x = 80000$

বা, $x = 40000$

$\therefore$ কবির সাহেব 12% মুনাফায় 40000 টাকা বিনিয়োগ করেছেন।

কাজ: সমীকরণ গঠন করে সমাধান কর:

ক) $\frac{3}{5}$ ভগ্নাংশটির লব ও হরের প্রত্যেকের সাথে কোন সংখ্যাটি যোগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{4}{5}$ হবে?

খ) দুইটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের অন্তর 151 হলে, সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

গ) 120 টি এক টাকার মুদ্রা ও দুই টাকার মুদ্রায় মোট 180 টাকা হলে, কোন প্রকারের মুদ্রার সংখ্যা কয়টি?

অনুশীলনী ৫.১

সমাধান কর (১ - ৮):

১. $\frac{ay}{b} - \frac{by}{a} = a^2 - b^2$

২. $(z+1)(z-2) = (z-4)(z+2)$

৩. $\frac{4}{2x+1} + \frac{9}{3x+2} = \frac{25}{5x+4}$

৪. $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+4} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}$

৫. $\frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b} = \frac{a+b}{x-a-b}$

২০২২

৬. $\dfrac{x-a}{b}+\dfrac{x-b}{a}+\dfrac{x-3a-3b}{a+b}=0$

৭. $\dfrac{x-a}{a^2-b^2}=\dfrac{x-b}{b^2-a^2}$

৮. $(3+\sqrt{3})z+2=5+3\sqrt{3}$

সমাধান সেট নির্ণয় কর (৯ - ১৪):

৯. $2x+\sqrt{2}=3x-4-3\sqrt{2}$

১০. $\dfrac{z-2}{z-1}=2-\dfrac{1}{z-1}$

১১. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2}{x-1}$

১২. $\dfrac{m}{m-x}+\dfrac{n}{n-x}=\dfrac{m+n}{m+n-x}$

১৩. $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+5}=\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+4}$

১৪. $\dfrac{2t-6}{9}+\dfrac{15-2t}{12-5t}=\dfrac{4t-15}{18}$

সমীকরণ গঠন করে সমাধান কর (১৫ - ২৫):

১৫. একটি সংখ্যা অপর একটি সংখ্যার $\dfrac{2}{5}$ গুণ। সংখ্যা দুইটির সমষ্টি 98 হলে, সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

১৬. একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের লব ও হরের অন্তর 1; লব থেকে 2 বিয়োগ ও হরের সাথে 2 যোগ করলে যে ভগ্নাংশ পাওয়া যাবে তা $\dfrac{1}{6}$ এর সমান। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

১৭. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 9; অঙ্ক দুইটি স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যাবে তা প্রদত্ত সংখ্যা হতে 45 কম হবে। সংখ্যাটি কত?

১৮. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার দশক স্থানীয় অঙ্ক একক স্থানীয় অঙ্কের দ্বিগুণ। দেখাও যে, সংখ্যাটি অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির সাতগুণ।

১৯. একজন ক্ষুদ্র ব্যবসায়ী 5600 টাকা বিনিয়োগ করে এক বছর পর কিছু টাকার উপর 5% এবং অবশিষ্ট টাকার উপর 4% লাভ করলেন। মোট 256 টাকা লাভ করলে, তিনি কত টাকার উপর 5% লাভ করলেন?

২০. একটি বালিকা বিদ্যালয়ের একটি শ্রেণিকক্ষে প্রতিবেঞ্চে 6 জন করে ছাত্রী বসালে 2 টি বেঞ্চ খালি থাকে। কিন্তু প্রতি বেঞ্চে 5 জন করে ছাত্রী বসালে 6 জন ছাত্রীকে দাঁড়িয়ে থাকতে হয়। ঐ শ্রেণির বেঞ্চের সংখ্যা কয়টি?

২০২২

২১. একটি লঞ্চে যাত্রী সংখ্যা 47। মাথাপিছু কেবিনের ভাড়া ডেকের ভাড়ার দ্বিগুণ। ডেকের ভাড়া মাথাপিছু 30 টাকা এবং মোট ভাড়া প্রাপ্তি 1680 টাকা হলে, কেবিনের যাত্রী সংখ্যা কত?

২২. মোট 120 টি পঁচিশ পয়সার মুদ্রা ও পঞ্চাশ পয়সার মুদ্রায় মোট 35 টাকা হলে, কোন প্রকারের মুদ্রার সংখ্যা কয়টি?

২৩. একটি গাড়ি ঘণ্টায় 60 কি.মি. বেগে কিছু পথ এবং ঘণ্টায় 40 কি.মি. বেগে অবশিষ্ট পথ অতিক্রম করলো। গাড়িটি মোট 5 ঘণ্টায় 240 কি.মি. পথ অতিক্রম করলে, ঘণ্টায় 60 কি.মি. বেগে কতদূর গিয়েছে?

২৪. ঢাকার নিউমার্কেট থেকে গাবতলির দূরত্ব 12 কি.মি.। সজল নিউমার্কেট থেকে রিক্সায় ঘণ্টায় 6 কি.মি. বেগে এবং কাজল একই স্থান থেকে পায়ে হেঁটে ঘণ্টায় 4 কি.মি. বেগে গাবতলির দিকে রওনা হলো। সজল গাবতলি পৌঁছে সেখানে 30 মিনিট বিশ্রাম নিয়ে আবার নিউমার্কেটের দিকে একই বেগে রওনা হলো। তারা নিউমার্কেট থেকে কতদূরে মিলিত হবে?

২৫. একটি স্টিমারে যাত্রী সংখ্যা 376 জন। ডেকের যাত্রীর সংখ্যা কেবিনের যাত্রীর সংখ্যার তিনগুণ। ডেকের যাত্রীর মাথাপিছু ভাড়া 60 টাকা এবং মোট ভাড়া প্রাপ্তি 33840 টাকা।

ক) ডেকের যাত্রী সংখ্যাকে x ধরে সমীকরণ তৈরি কর।

খ) ডেকের যাত্রী ও কেবিনের যাত্রীর সংখ্যা কত?

গ) কেবিনের মাথাপিছু ভাড়া কত?

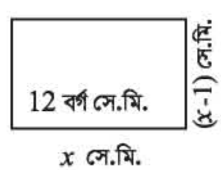
এক চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ
(Quadratic Equations in One Variable)

$ax^2 + bx + c = 0$ [যেখানে, a, b, c ধ্রুবক এবং $a \neq 0$] আকারের সমীকরণকে এক চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ বলা হয়। দ্বিঘাত সমীকরণের বামপক্ষ একটি দ্বিমাত্রিক বহুপদী। সমীকরণের ডানপক্ষ শূন্য ধরা হয়।

12 বর্গ সে.মি. ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য x সে.মি. ও প্রস্থ $(x-1)$ সে.মি.।

$\therefore$ আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল = $x(x-1)$ বর্গ সে.মি.

প্রশ্নমতে, $x(x-1) = 12$ বা $x^2 - x - 12 = 0$



সমীকরণটিতে একটি চলক x এবং x এর সর্বোচ্চ ঘাত 2। এরূপ সমীকরণ হলো দ্বিঘাত সমীকরণ। যে সমীকরণে চলকের সর্বোচ্চ ঘাত 2, তাকে দ্বিঘাত সমীকরণ বলে।

২০২৫

আমরা অষ্টম শ্রেণিতে x^2+px+q এবং ax^2+bx+c আকারের এক চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত রাশির উৎপাদকে বিশ্লেষণ করেছি। এখানে আমরা $x^2+px+q=0$ এবং $ax^2+bx+c=0$ আকারের দ্বিঘাত সমীকরণের বামপক্ষকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে চলকের মান নির্ণয়ের মাধ্যমে এরূপ সমীকরণ সমাধান করবো।

উৎপাদকে বিশ্লেষণ পদ্ধতিতে বাস্তব সংখ্যার একটি গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম প্রয়োগ করা হয়। ধর্মটি নিম্নরূপ:

যদি দুইটি রাশির গুণফল শূন্য হয়, তবে রাশিদ্বয়ের যেকোনোটি অথবা উভয় রাশি শূন্য হবে। অর্থাৎ, দুইটি রাশি a ও b এর গুণফল $ab=0$ হলে, $a=0$ বা, $b=0$, অথবা $a=0$ এবং $b=0$ হবে।

উদাহরণ ৮. সমাধান কর: $(x+2)(x-3)=0$

সমাধান: $(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x+2=0$ অথবা $x-3=0$

$x+2=0$ হলে, $x=-2$

আবার, $x-3=0$ হলে, $x=3$

$\therefore$ সমাধান $x=-2$ অথবা $x=3$

উদাহরণ ৯. সমাধান সেট নির্ণয় কর: $y^2=\sqrt{3}y$

সমাধান: $y^2=\sqrt{3}y$

বা, $y^2-\sqrt{3}y=0$ [পক্ষান্তর করে ডানপক্ষ শূন্য করা হয়েছে]

বা, $y(y-\sqrt{3})=0$

$\therefore y=0$ অথবা $y-\sqrt{3}=0$

আবার, $y-\sqrt{3}=0$ হলে, $y=\sqrt{3}$

$\therefore$ সমাধান সেট $\{0,\sqrt{3}\}$

উদাহরণ ১০. সমাধান কর ও সমাধান সেট লেখ: $x-4=\dfrac{x-4}{x}$

সমাধান: $x-4=\dfrac{x-4}{x}$

বা, $x(x-4)=x-4$ [আড়গুণন করে]

বা, $x(x-4)-(x-4)=0$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $(x-4)(x-1)=0$

$\therefore x-4=0$ অথবা $x-1=0$

$x-4=0$ হলে, $x=4$

আবার, $x-1=0$ হলে, $x=1$

$\therefore$ সমাধান সেট $\{1,4\}$

উদাহরণ ১১. সমাধান কর: $\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^2-5\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)+6=0$

সমাধান: $\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^2-5\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)+6=0\ldots(1)$

ধরি, $\dfrac{x+a}{x-a}=y$

$\therefore (1)$ হতে পাই, $y^2-5y+6=0$

বা, $y^2-2y-3y+6=0$

বা, $y(y-2)-3(y-2)=0$

বা, $(y-2)(y-3)=0$

$\therefore y-2=0$ হলে, $y=2$

অথবা $y-3=0$ হলে, $y=3$

এখন, $y=2$ হলে,

$\dfrac{x+a}{x-a}=\dfrac{2}{1}$ [y এর মান বসিয়ে]

বা, $x+a=2(x-a)$ [আড়গুণন করে]

বা, $x+a=2x-2a$

বা, $2x-x=a+2a$

বা, $x=3a$

আবার, $y=3$ হলে,

$\dfrac{x+a}{x-a}=\dfrac{3}{1}$

বা, $x+a=3(x-a)$ [আড়গুণন করে]

বা, $x+a=3x-3a$

বা, $3x-x=a+3a$

বা, $x=2a$

২০২২

$\therefore$ সমাধান $x=2a$ অথবা, $x=3a$

কাজ:

ক) $x^2 - 1 = 0$ সমীকরণটিকে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে a, b, c এর মান লেখ।

খ) $(x-1)^2$ সমীকরণটির ঘাত কত? এর মূল কয়টি ও কী কী?

দ্বিঘাত সমীকরণের ব্যবহার

আমাদের দৈনন্দিন জীবনের অনেক সমস্যা এক চলকবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ ও দ্বিঘাত সমীকরণে রূপান্তর করে সহজে সমাধান করা যায়। এখানে, বাস্তবভিত্তিক সমস্যায় প্রদত্ত শর্ত থেকে দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন করে সমাধান করার কৌশল দেখানো হলো।

উদাহরণ ১২. একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের হর, লব অপেক্ষা 4 বেশি। ভগ্নাংশটি বর্গ করলে যে ভগ্নাংশ পাওয়া যাবে তার হর, লব অপেক্ষা 40 বেশি হবে। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, ভগ্নাংশটির লব x এবং হর $x+4$

সুতরাং ভগ্নাংশটি $\dfrac{x}{x+4}$

ভগ্নাংশটির বর্গ $= \left(\dfrac{x}{x+4}\right)^2 = \dfrac{x^2}{(x+4)^2} = \dfrac{x^2}{x^2+8x+16}$

এখানে, লব $= x^2$ এবং হর $= x^2 + 8x + 16$

প্রশ্নমতে, $x^2 + 8x + 16 = x^2 + 40$

বা, $8x + 16 = 40$

বা, $8x = 40 - 16$

বা, $8x = 24$

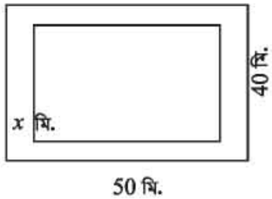
বা, $x = 3$

$\therefore x + 4 = 3 + 4 = 7$

$\therefore \dfrac{x}{x+4} = \dfrac{3}{7}$

$\therefore$ ভগ্নাংশটি $\dfrac{3}{7}$

উদাহরণ ১৩. 50 মিটার দৈর্ঘ্য এবং 40 মিটার প্রস্থবিশিষ্ট একটি আয়তাকার বাগানের ভিতরের চারদিকে সমান চওড়া একটি রাস্তা আছে। রাস্তা বাদে বাগানের ক্ষেত্রফল 1200 বর্গমিটার হলে, রাস্তাটি কত মিটার চওড়া? ২০২২



সমাধান: মনে করি, রাস্তাটি x মিটার চওড়া।

রাস্তা বাদে বাগানটির দৈর্ঘ্য $(50-2x)$ মিটার এবং প্রস্থ $(40-2x)$ মিটার

$\therefore$ রাস্তা বাদে বাগানটির ক্ষেত্রফল = $(50-2x)\times(40-2x)$ বর্গমিটার।

প্রশ্নমতে, $(50-2x)\times(40-2x)=1200$

বা, $2000-80x-100x+4x^2=1200$

বা, $4x^2-180x+800=0$

বা, $x^2-45x+200=0$ [4 দিয়ে ভাগ করে]

বা, $x^2-5x-40x+200=0$

বা, $x(x-5)-40(x-5)=0$

বা, $(x-5)(x-40)=0$

$\therefore x-5=0$ অথবা $x-40=0$

$x-5=0$ হলে, $x=5$

$x-40=0$ হলে, $x=40$

কিন্তু রাস্তাটি বাগানটির প্রস্থ 40 মিটার থেকে কম চওড়া হবে।

$\therefore x\neq 40;\ \therefore x=5$

$\therefore$ রাস্তাটি 5 মিটার চওড়া।

উদাহরণ ১৪. শাহিক 240 টাকায় কতগুলো কলম কিনল। সে যদি ঐ টাকায় একটি কলম বেশি পেতো তবে প্রতিটি কলমের দাম গড়ে 1 টাকা কম পড়তো। সে কতগুলো কলম কিনল?

সমাধান: মনে করি, শাহিক 240 টাকায় মোট x টি কলম কিনেছিল। এতে প্রতিটি কলমের দাম পড়ে $\frac{240}{x}$ টাকা।

সে যদি 240 টাকায় $(x+1)$ টি কলম পেতো তবে প্রতিটি কলমের দাম পড়তো $\frac{240}{x+1}$ টাকা।

প্রশ্নমতে, $\frac{240}{x+1}=\frac{240}{x}-1$

বা, $\dfrac{240}{x+1} = \dfrac{240-x}{x}$

বা, $240x = (x+1)(240-x)$ [আড়গুণন করে]

বা, $240x = 240x + 240 - x^2 - x$

বা, $x^2 + x - 240 = 0$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $x^2 + 16x - 15x - 240 = 0$

বা, $x(x+16) - 15(x+16) = 0$

বা, $(x+16)(x-15) = 0$

$\therefore x + 16 = 0$, অথবা $x - 15 = 0$

$x + 16 = 0$ হলে, $x = -16$

$x - 15 = 0$ হলে, $x = 15$

কিন্তু কলমের সংখ্যা x ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore x \neq -16; \ \therefore x = 15$

$\therefore$ শাহিক 15 টি কলম কিনেছিল।

কাজ: সমীকরণ গঠন করে সমাধান কর:

ক) একটি স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সাথে ঐ সংখ্যাটি যোগ করলে যোগফল ঠিক পরবর্তী স্বাভাবিক সংখ্যার নয়গুণের সমান হবে। সংখ্যাটি কত?

খ) 10 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের কেন্দ্র হতে একটি জ্যা এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য বৃত্তটির অর্ধ-জ্যা অপেক্ষা 2 সে.মি. কম। আনুমানিক চিত্র অঙ্কন করে জ্যাটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

উদাহরণ ১৫. একটি বিদ্যালয়ের নবম শ্রেণির একটি পরীক্ষায় x জন ছাত্রের গণিতে প্রাপ্ত মোট নম্বর 1950। একই পরীক্ষায় অন্য একজন নতুন ছাত্রের গণিতে প্রাপ্ত নম্বর 34 যোগ করায় প্রাপ্ত নম্বরের গড় 1 কমে গেল।

ক) পৃথকভাবে x জন ছাত্রের এবং নতুন ছাত্রসহ সকলের প্রাপ্ত নম্বরের গড় x এর মাধ্যমে লেখ।

খ) প্রদত্ত শর্তানুসারে সমীকরণ গঠন করে দেখাও যে, $x^2 + 35x - 1950 = 0$

গ) x এর মান বের করে উভয় ক্ষেত্রে নম্বরের গড় কত তা নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক) x জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বরের গড় = $\dfrac{1950}{x}$ ২০২২

নতুন ছাত্রের নম্বরসহ $(x+1)$ জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বরের গড় $= \dfrac{1950+34}{x+1} = \dfrac{1984}{x+1}$

খ) প্রশ্নমতে, $\dfrac{1950}{x} = \dfrac{1984}{x+1} + 1$

বা, $\dfrac{1950}{x} - \dfrac{1984}{x+1} = 1$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\dfrac{1950x + 1950 - 1984x}{x(x+1)} = 1$

বা, $x^2 + x = 1950x - 1984x + 1950$ [আড়গুণন করে]

বা, $x^2 + x = 1950 - 34x$

$\therefore x^2 + 35x - 1950 = 0$ [দেখানো হলো]

গ) $x^2 + 35x - 1950 = 0$

বা, $x^2 + 65x - 30x - 1950 = 0$

বা, $x(x+65) - 30(x+65) = 0$

বা, $(x+65)(x-30) = 0$

$\therefore x + 65 = 0$ অথবা $x - 30 = 0$

$x + 65 = 0$ হলে, $x = -65$

আবার, $x - 30 = 0$ হলে, $x = 30$

যেহেতু ছাত্রের সংখ্যা x ঋণাত্মক হতে পারে না,

সুতরাং, $x \neq -65$

$\therefore x = 30$

$\therefore$ প্রথম ক্ষেত্রে গড় = $\dfrac{1950}{30} = 65$ এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে গড় = $\dfrac{1984}{31} = 64$

অনুশীলনী ৫.২

১. x কে চলক ধরে $a^2x + b = 0$ সমীকরণটির ঘাত নিচের কোনটি?

ক) 3 খ) 2 গ) 1 ঘ) 0

২. নিচের কোনটি অভেদ?

ক) $(x+1)^2 + (x-1)^2 = 4x$ খ) $(x+1)^2 + (x-1)^2 = 2(x^2+1)$

গ) $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2ab$ ঘ) $(a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

৩. $(x-4)^2 = 0$ সমীকরণের মূল কয়টি?

ক) 1 টি খ) 2 টি গ) 3 টি ঘ) 4 টি

৪. $x^2 - x - 12 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় নিচের কোনটি?

ক) $3, 4$ খ) $3, -4$ গ) $-3, 4$ ঘ) $-3, -4$

৫. $3x^2 - x + 5 = 0$ সমীকরণে x এর সহগ কত?

ক) 3 খ) 2 গ) 1 ঘ) -1

৬. দুইটি বীজগাণিতিক রাশি x ও y এর গুণফল $xy = 0$ হলে

(i) $x = 0$ অথবা $y = 0$

(ii) $x = 0$ এবং $y \neq 0$

(iii) $x \neq 0$ এবং $y = 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) ii ও iii গ) i ও iii ঘ) i, ii ও iii

৭. $x^2 - (a+b)x + ab = 0$ সমীকরণের সমাধান সেট নিচের কোনটি?

ক) $\{a, b\}$ খ) $\{a, -b\}$ গ) $\{-a, b\}$ ঘ) $\{-a, -b\}$

দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার দশক স্থানীয় অঙ্ক একক স্থানীয় অঙ্কের দ্বিগুণ এবং একক স্থানীয় অঙ্ক x। এই তথ্যের আলোকে নিচের (৮ - ১০) প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও।

৮. সংখ্যাটি কত?

ক) $2x$ খ) $3x$ গ) $12x$ ঘ) $21x$

৯. অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে সংখ্যাটি কত হবে?

ক) $3x$ খ) $4x$ গ) $12x$ ঘ) $21x$

১০. $x = 2$ হলে, মূল সংখ্যার সাথে স্থান বিনিময়কৃত সংখ্যার পার্থক্য কত?

ক) 18 খ) 20 গ) 34 ঘ) 36

সমাধান কর (১১ - ১৭):

১১. $(y+5)(y-5) = 24$

১২. $(\sqrt{2}x + 3)(\sqrt{3}x - 2) = 0$

১৩. $2(z^2 - 9) + 9z = 0$

১৪. $\dfrac{3}{2z+1} + \dfrac{4}{5z-1} = 2$

১৫. $\dfrac{x-2}{x+2} + \dfrac{6(x-2)}{x-6} = 1$

১৬. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{a}{x} = \dfrac{x}{b} + \dfrac{b}{x}$

২০২২

১৭. $\dfrac{x-a}{x-b}+\dfrac{x-b}{x-a}=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$

সমাধান সেট নির্ণয় কর (১৮ - ২২):

১৮. $\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x+1}=2$

১৯. $\dfrac{x+7}{x+1}+\dfrac{2x+6}{2x+1}=5$

২০. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{x+a+b}$

২১. $x+\dfrac{1}{x}=2$

২২. $\dfrac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^2-(x-1)^2}=2$

সমীকরণ গঠন করে সমাধান কর (২৩ - ৩৪):

২৩. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোনো সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 15 এবং এদের গুণফল 56; সংখ্যাটি কত?

২৪. একটি আয়তাকার ঘরের মেঝের ক্ষেত্রফল 192 বর্গমিটার। মেঝের দৈর্ঘ্য 4 মিটার কমালে ও প্রস্থ 4 মিটার বাড়ালে ক্ষেত্রফল অপরিবর্তিত থাকে। মেঝের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

২৫. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের দৈর্ঘ্য 15 সে.মি. ও অপর বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের অন্তর 3 সে.মি.। ঐ বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

২৬. একটি ত্রিভুজের ভূমি তার উচ্চতার দ্বিগুণ অপেক্ষা 6 সে.মি. বেশি। ত্রিভুজ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 810 বর্গ সে.মি. হলে, এর উচ্চতা কত?

২৭. একটি শ্রেণিতে যতজন ছাত্র-ছাত্রী পড়ে প্রত্যেকে তার সহপাঠীর সংখ্যার সমান টাকা চাঁদা দেওয়ায় মোট 420 টাকা চাঁদা উঠল। ঐ শ্রেণির ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা কত এবং প্রত্যেকে কত টাকা করে চাঁদা দিল?

২৮. একটি শ্রেণিতে যতজন ছাত্র-ছাত্রী পড়ে, প্রত্যেকে তত পয়সার চেয়ে আরও 30 পয়সা বেশি করে চাঁদা দেওয়াতে মোট 70 টাকা উঠল। ঐ শ্রেণির ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা কত?

২৯. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 7; অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায় তা প্রদত্ত সংখ্যা থেকে 9 বেশি।

ক) চলক x এর মাধ্যমে প্রদত্ত সংখ্যাটি ও স্থান বিনিময়কৃত সংখ্যাটি লেখ।

খ) সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

গ) প্রদত্ত সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয় যদি সেন্টিমিটারে কোনো আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্দেশ করে তবে ঐ আয়তক্ষেত্রটির কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। কর্ণটিকে কোনো বর্গের বাহু ধরে বর্গক্ষেত্রটির কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

২০২২

৩০. একটি সমকোণী ত্রিভুজের ভূমি ও উচ্চতা যথাক্রমে $(x-1)$ সে.মি. ও x সে.মি. এবং একটি বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য ত্রিভুজটির উচ্চতার সমান। আবার, একটি আয়তক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য $x+3$ সে.মি. ও প্রস্থ x সে.মি.।

ক) একটিমাত্র চিত্রের মাধ্যমে তথ্যগুলো দেখাও।

খ) ত্রিভুজক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 10 বর্গ সে.মি. হলে, এর উচ্চতা কত?

গ) ত্রিভুজক্ষেত্র, বর্গক্ষেত্র ও আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের ধারাবাহিক অনুপাত বের কর।

৩১. একটি জমির ক্ষেত্রফল 192 বর্গমিটার। জমিটির দৈর্ঘ্য 4 মিটার কমালে এবং প্রস্থ 4 মিটার বাড়ালে ক্ষেত্রফল অপরিবর্তিত থাকে। আবার জমিটির মাঝখানে 20 সে.মি. ব্যাস বিশিষ্ট একটি বৃত্ত আঁকা হলো। বৃত্তটির কেন্দ্র থেকে একটি জ্যা এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যা এর অর্ধেকের চেয়ে 2 সে.মি. কম।

ক) জমিটির দৈর্ঘ্যকে x এবং প্রস্থকে y ধরে তথ্যগুলোকে সমীকরণে প্রকাশ কর।

খ) জমিটির পরিসীমা নির্ণয় কর।

গ) বৃত্তটির জ্যা এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৩২. নাবিলের বয়স যখন শুভর বর্তমান বয়সের সমান ছিল তখন শুভর যে বয়স ছিল নাবিলের বর্তমান বয়স তার দ্বিগুণ। শুভর বয়স যখন নাবিলের বর্তমান বয়সের সমান হবে তখন তাদের দুইজনের বয়সের যোগফল 63 হলে প্রত্যেকের বর্তমান বয়স কত?

৩৩. বাসে ওঠার লাইনে সোহাগের পিছনে যতজন দাঁড়িয়ে আছে সামনে তার থেকে দুইজন বেশি দাঁড়িয়ে আছে। তার পিছনে যতজন দাঁড়িয়ে আছে সম্পূর্ণ লাইনে তার তিনগুণ যাত্রী। লাইনে কতজন যাত্রী দাঁড়িয়ে আছে?

৩৪. সবুজ 3 : 30 টার সময় বাসা থেকে ড্রয়িং ক্লাসে গেল। সে যখন স্কুল থেকে বাসায় ফিরেছিল তখনও মিনিটের কাঁটা খাড়া নিচের দিকে ছিল কিন্তু 3 : 30 টার তুলনায় দুইটি কাঁটার মধ্যে দূরত্ব 30 ডিগ্রি কম ছিল। সবুজ স্কুল থেকে বাসায় কখন ফিরেছিল?