অধ্যায় ১৩

সসীম ধারা (Finite Series)

প্রাত্যহিক জীবনে 'ক্রম' বহুল প্রচলিত একটি শব্দ। যেমন - দোকানের তাকে ভোগ্যপণ্য সাজাতে, নাটক ও অনুষ্ঠানের ঘটনাবলী সাজাতে, গুদামঘরে সুন্দরভাবে দ্রব্যাদি রাখতে ক্রমের ধারণা ব্যবহৃত হয়। আবার অনেক কাজ সহজে এবং দৃষ্টিনন্দনভাবে সম্পাদন করতে আমরা বড় হতে ছোট, শিশু হতে বৃদ্ধ, হালকা হতে ভারী ইত্যাদি বিভিন্ন ধরনের ক্রম ব্যবহার করি। এই ক্রমের ধারণা হতেই বিভিন্ন প্রকার গাণিতিক ধারার উদ্ভব হয়েছে। এই অধ্যায়ে অনুক্রম ও ধারার মধ্যে সম্পর্ক ও এতদ সংক্রান্ত বিষয়বস্তু উপস্থাপন করা হয়েছে।

এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা ---

- অনুক্রম ও ধারা বর্ণনা করতে ও এদের পার্থক্য নিরূপণ করতে পারবে।
- সমান্তর ধারা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সমান্তর ধারার নির্দিষ্টতম পদ ও নির্দিষ্ট সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয়ের সূত্র গঠন করতে পারবে এবং সূত্র প্রয়োগ করে গাণিতিক সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের ও ঘনের সমষ্টি নির্ণয় করতে পারবে।
- ধারার বিভিন্ন সূত্র প্রয়োগ করে গাণিতিক সমস্যার সমাধান করতে পারবে।
- গুণোত্তর ধারার নির্দিষ্টতম পদ ও নির্দিষ্ট সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয়ের সূত্র গঠন করতে পারবে এবং সূত্র প্রয়োগ করে গাণিতিক সমস্যার সমাধান করতে পারবে।

অনুক্রম (Sequence)

নিচের সম্পর্কটি লক্ষ করি:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \cdots & 2n & \cdots \end{array}$$

এখানে প্রত্যেক স্বাভাবিক সংখ্যা n তার দ্বিগুণ সংখ্যা $2n$ এর সাথে সম্পর্কিত। অর্থাৎ স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $\{1, 2, 3, \cdots\}$ থেকে একটি নিয়মের মাধ্যমে যোগবোধক জোড় সংখার সেট $\{2, 4, 6, \cdots\}$ পাওয়া যায়। এই সাজানো জোড়সংখ্যার সেটটি একটি অনুক্রম। সুতরাং, কতকগুলো রাশি একটা বিশেষ নিয়মে ক্রমান্বয়ে এমনভাবে সাজানো হয় যে প্রত্যেক রাশি তার পূর্বের পদ ও পরের পদের সাথে কীভাবে সম্পর্কিত তা জানা যায়। এভাবে সাজানো রাশিগুলোর সেটকে অনুক্রম (Sequence) বলা হয়।

উপরের সম্পর্কটিকে ফাংশন বলে এবং $f(n) = 2n$ লিখা হয়। এই অনুক্রমের সাধারণ পদ $2n$। যেকোনো অনুক্রমের পদসংখ্যা অসীম। অনুক্রমটি সাধারণ পদের সাহায্যে লিখার পদ্ধতি হলো $\{2n\},\ n = 1, 2, 3, \cdots$ বা, $\{2n\}_{n=1}^{+\infty}$ বা, $\{2n\}$।

অনুক্রমের প্রথম রাশিকে প্রথম পদ, দ্বিতীয় রাশিকে দ্বিতীয় পদ, তৃতীয় রাশিকে তৃতীয় পদ ইত্যাদি বলা হয়। $1, 3, 5, 7, \cdots$ অনুক্রমের প্রথম পদ $= 1$, দ্বিতীয় পদ $= 3$, ইত্যাদি। নিচে অনুক্রমের চারটি উদাহরণ দেওয়া হলো:

$1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$

$1, 3, 5, \cdots, 2n - 1, \cdots$

$1, 4, 9, \cdots, n^2, \cdots$

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$

কাজ:

ক) নিচে ছয়টি অনুক্রমের সাধারণ পদ দেওয়া আছে। অনুক্রমগুলো লিখ:

(১) $\frac{1}{n}$	(২) $\frac{n-1}{n+1}$	(৩) $\frac{1}{2^n}$
(৪) $\frac{1}{2^{n-1}}$	(৫) $(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$	(৬) $(-1)^{n-1}\frac{n}{2n+1}$

খ) তোমরা প্রত্যেকে একটি করে অনুক্রমের সাধারণ পদ লিখে অনুক্রমটি লিখ।

ধারা (Series)

কোনো অনুক্রমের পদগুলো পরপর $+$ চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করলে একটি ধারা (Series) পাওয়া যায়। যেমন, $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots$ একটি ধারা। ধারাটির পরপর দুইটি পদের পার্থক্য সমান। আবার $2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$ একটি ধারা। এর পরপর দুইটি পদের অনুপাত সমান। সুতরাং, যেকোনো ধারার পরপর দুইটি পদের মধ্যে সম্পর্কের উপর নির্ভর করে ধারাটির বৈশিষ্ট্য। ধারাগুলোর মধ্যে গুরুত্বপূর্ণ দুইটি ধারা হলো সমান্তর ধারা ও গুণোত্তর ধারা।

সমান্তর ধারা (Arithmetic Series)

কোনো ধারার যেকোনো পাশাপাশি দুইটি পদের পার্থক্য সব সময় সমান হলে, সেই ধারাটিকে সমান্তর ধারা বলে।

উদাহরণ ১. $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$ একটি ধারা। এই ধারাটির প্রথম পদ 1, দ্বিতীয় পদ 3, তৃতীয় পদ 5 ইত্যাদি।

এখানে, দ্বিতীয় পদ $-$ প্রথম পদ $= 3 - 1 = 2,$

তৃতীয় পদ $-$ দ্বিতীয় পদ $= 5 - 3 = 2,$ চতুর্থ পদ $-$ তৃতীয় পদ $= 7 - 5 = 2,$

পঞ্চম পদ $-$ চতুর্থ পদ $= 9 - 7 = 5,$ ষষ্ঠ পদ $-$ পঞ্চম পদ $= 11 - 9 = 2$

সুতরাং, ধারাটি একটি সমান্তর ধারা।

এই ধারায় প্রাপ্ত দুইটি পদের বিয়োগফলকে সাধারণ অন্তর বলা হয়। উল্লেখিত ধারার সাধারণ অন্তর 2। ধারাটির পদ সংখ্যা নির্দিষ্ট। এ জন্য এটি একটি সসীম বা সান্ত ধারা (Finite Series)। উল্লেখ্য, সমান্তর ধারার পদসংখ্যা নির্দিষ্ট না হলে একে অসীম বা অনন্ত ধারা (Infinite Series) বলে। যেমন, $1 + 4 + 7 + 10 + \cdots$ একটি অসীম ধারা। সমান্তর ধারায় সাধারণত প্রথম পদকে a দ্বারা এবং সাধারণ অন্তরকে d দ্বারা প্রকাশ করা হয়। তাহলে সংজ্ঞানুসারে, প্রথম পদ a হলে, দ্বিতীয় পদ $a + d$, তৃতীয় পদ $a + 2d$ ইত্যাদি। সুতরাং, ধারাটি হবে, $a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots$।

সমান্তর ধারার সাধারণ পদ নির্ণয়

মনে করি, যেকোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ a ও সাধারণ অন্তর d। তাহলে ধারাটির

প্রথম পদ $= a = a + (1 - 1)d$

দ্বিতীয় পদ $= a + d = a + (2 - 1)d$

তৃতীয় পদ $= a + 2d = a + (3 - 1)d$

চতুর্থ পদ $= a + 3d = a + (4 - 1)d$

$\cdots \; \cdots \; \cdots$

$\cdots \; \cdots \; \cdots$

$\therefore n$ তম পদ = $a + (n - 1)d$

এই n তম পদকেই সমান্তর ধারার সাধারণ পদ বলা হয়। কোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ a, সাধারণ অন্তর d জানা থাকলে n তম পদে $n = 1, 2, 3, 4, \cdots$ বসিয়ে পর্যায়ক্রমে ধারাটির প্রত্যেকটি পদ নির্ণয় করা যায়।

মনে করি, একটি সমান্তর ধারার প্রথম পদ 3 এবং সাধারণ অন্তর 2। অতএব, ধারাটির n তম পদ $= 3 + (n - 1) \times 2 = 2n + 1$।

কাজ: কোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ 5 এবং সাধারণ অন্তর 7 হলে, ধারাটির প্রথম ছয়টি পদ, 22 তম পদ, r তম এবং $(2p + 1)$ তম পদ নির্ণয় কর।

উদাহরণ ২. $5 + 8 + 11 + 14 + \cdots$ ধারাটির কোন পদ 383?

২০২২

সমাধান: ধারাটির প্রথম পদ $a = 5$, সাধারণ অন্তর $d = 8 - 5 = 11 - 8 = 14 - 11 = 3$

$\therefore$ ইহা একটি সমান্তর ধারা।

মনে করি, ধারাটির n তম পদ = 383

আমরা জানি, n তম পদ = $a+(n-1)d$

$\therefore a+(n-1)d=383$

বা, $5+(n-1)3=383$

বা, $5+3n-3=383$

বা, $3n=383-5+3$

বা, $3n=381$

বা, $n=\dfrac{381}{3}$

বা, $n=127$

$\therefore$ প্রদত্ত ধারার 127 তম পদ = 383।

সমান্তর ধারার n সংখ্যক পদের সমষ্টি

মনে করি, যেকোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ a, শেষ পদ p, সাধারণ অন্তর d, পদ সংখ্যা n এবং ধারাটির n সংখ্যক পদের সমষ্টি S_n।

ধারাটিকে প্রথম পদ হতে শেষ পদ এবং বিপরীতক্রমে শেষ পদ হতে প্রথম পদ লিখে পাওয়া যায়

$$S_n=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(p-2d)+(p-d)+p\ldots(1)$$

এবং $$S_n=p+(p-d)+(p-2d)+\cdots+(a+2d)+(a+d)+a\ldots(2)$$

যোগ করে, $$2S_n=(a+p)+(a+p)+(a+p)+\cdots+(a+p)+(a+p)+(a+p)$$

বা, $2S_n=n(a+p)$ [$\because$ ধারাটির পদ সংখ্যা n]

$\therefore S_n=\dfrac{n}{2}(a+p)\ \ldots(3)$

আবার, n তম পদ $=p=a+(n-1)d$। p এর মান (3) এ বসিয়ে পাই,

$S_n=\dfrac{n}{2}[a+\{a+(n-1)d\}]$

অর্থাৎ, $S_n=\dfrac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}\ \ldots(4)$

কোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ a, শেষ পদ p এবং পদ সংখ্যা n জানা থাকলে, (3) নং সূত্রের সাহায্যে ধারাটির সমষ্টি নির্ণয় করা যায়। কিন্তু প্রথম পদ a, সাধারণ অন্তর d, পদ সংখ্যা n জানা থাকলে, (4) নং সূত্রের সাহায্যে ধারাটির সমষ্টি নির্ণয় করা যায়।

২০২২

প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি নির্ণয়

মনে করি, n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি S_n

অর্থাৎ, $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$

ধারাটিকে প্রথম পদ হতে এবং বিপরীতক্রমে শেষ পদ হতে লিখে পাওয়া যায়

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \ldots (1)$$

$$\text{এবং } S_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1 \ldots (2)$$

যোগ করে, $2S_n = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)$ [n সংখ্যক পদ]

বা, $2S_n = n(n+1)$

$\therefore S_n = \dfrac{n(n+1)}{2} \ldots (3)$

উদাহরণ ৩. প্রথম 50 টি স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল নির্ণয় কর।

সমাধান: আমরা (3) নং সূত্র ব্যবহার করে পাই,

$S_{50} = \dfrac{50(50+1)}{2} = 25 \times 51 = 1275$

$\therefore$ প্রথম 50 টি স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল 1275।

উদাহরণ 8. $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 99 =$ কত?

সমাধান: ধারাটির প্রথম পদ $a = 1$, সাধারণ অন্তর $d = 2 - 1 = 1$ এবং শেষ পদ $p = 99$।

$\therefore$ ইহা একটি সমান্তর ধারা।

মনে করি, ধারাটির n তম পদ = 99

আমরা জানি, সমান্তর ধারার n তম পদ = $a + (n-1)d$

$\therefore a + (n-1)d = 99$

বা, $1 + (n-1)1 = 99$

বা, $1 + n - 1 = 99$

$\therefore n = 99$

(4) নং সূত্র হতে, সমান্তর ধারার প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি, $S_n = \dfrac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

সুতরাং, ধারাটির 99 টি পদের সমষ্টি $S_{99} = \dfrac{99}{2}\{2 \times 1 + (99-1) \times 1\} = \dfrac{99}{2}(2 + 98)$

$= \dfrac{99 \times 100}{2} = 99 \times 50 = 4950$

২০২২

বিকল্প পদ্ধতি: (3) নং সূত্র হতে, $S_n = \frac{n}{2}(a+p)$

$\therefore S_{99} = \frac{99}{2}(1+99) = \frac{99 \times 100}{2} = 4950$

উদাহরণ ৫. $7 + 12 + 17 + \cdots$ ধারাটির প্রথম 30 টি পদের সমষ্টি কত?

সমাধান: ধারাটির প্রথম পদ $a = 7$, সাধারণ অন্তর $d = 12 - 7 = 5$

$\therefore$ ইহা একটি সমান্তর ধারা। এখানে পদ সংখ্যা $n = 30$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি,

$S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

তাহলে, প্রথম 30 টি পদের সমষ্টি $S_{30} = \frac{30}{2}\{2 \cdot 7 + (30-1)5\} = 15(14 + 29 \times 5)$

$= 15(14 + 145) = 15 \times 159 = 2385$

উদাহরণ ৬. রশিদ তার বেতন থেকে প্রথম মাসে 1200 টাকা সঞ্চয় করেন এবং পরবর্তী প্রতিমাসে এর পূর্ববর্তী মাসের তুলনায় 100 টাকা বেশি সঞ্চয় করেন।

ক) সমস্যাটিকে n সংখ্যক পদ পর্যন্ত ধারায় প্রকাশ কর।

খ) তিনি 18 তম মাসে কত টাকা এবং প্রথম 18 মাসে মোট কত টাকা সঞ্চয় করেন?

গ) তিনি কত বছরে মোট 106200 টাকা সঞ্চয় করেন?

সমাধান:

ক) প্রশ্নানুসারে, ধারাটির প্রথম পদ $a = 1200$, সাধারণ অন্তর $d = 100$

$\therefore$ দ্বিতীয় পদ $= 1200 + 100 = 1300$

তৃতীয় পদ $= 1300 + 100 = 1400$

$\therefore n$ তম পদ $= a + (n-1)d = 1200 + (n-1)100 = 1100 + 100n$

$\therefore$ ধারাটি $1200 + 1300 + 1400 + \cdots + (1100 - 100n)$

খ) আমরা জানি, n তম পদ $= a + (n-1)d$

$\therefore$ 18 তম মাসে সঞ্চয় $= a + (18-1)d = 1200 + 17 \times 100 = 2900$ টাকা

আবার, প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $= \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

$\therefore$ প্রথম 18 মাসের সঞ্চয় $= \frac{18}{2}\{2 \times 1200 + (18-1) \times 100\}$ টাকা

$= 9(2400 + 1700) = 36900$ টাকা

গ) মনে করি, তিনি n মাসে 106200 টাকা সঞ্চয় করেন। ২০২২

প্রশ্নানুসারে, $\frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\} = 106200$

বা, $\frac{n}{2}\{2 \times 1200 + (n-1) \times 100\} = 106200$

বা, $n(2400 + 100n - 100) = 212400$

বা, $100n^2 + 2300n - 212400 = 0$

বা, $n^2 + 23n - 2124 = 0$

বা, $n^2 + 59n - 36n - 2124 = 0$

বা, $(n+59)(n-36) = 0$

অর্থাৎ, $n = -59$ অথবা $n = 36$

মাস কখনো ঋণাত্মক হতে পারেনা।

$\therefore$ নির্ণেয় সময়: 36 মাস বা 3 বছর।

অনুশীলনী ১৩.১

১. $13 + 20 + 27 + 34 + \cdots + 111$ ধারাটির পদ সংখ্যা কত?

ক) 10 খ) 13 গ) 15 ঘ) 20

২. $5 + 8 + 11 + 14 + \cdots + 62$ ধারাটি

(i) একটি সসীম ধারা (ii) একটি গুণোত্তর ধারা (iii) এর 19 তম পদ 59

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে ৩ - ৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

$7 + 13 + 19 + 25 + \cdots$ একটি ধারা।

৩. ধারাটির 15 তম পদ কোনটি?

ক) 85 খ) 91 গ) 97 ঘ) 104

৪. ধারাটির প্রথম 20 টি পদের সমষ্টি কত?

ক) 141 খ) 1210 গ) 1280 ঘ) 2560

৫. $2 - 5 - 12 - 19 - \cdots$ ধারাটির সাধারণ অন্তর এবং 12 তম পদ নির্ণয় কর।

৬. $8 + 11 + 14 + 17 + \cdots$ ধারাটির কোন পদ 392?

৭. $4 + 7 + 10 + 13 + \cdots$ ধারাটির কোন পদ 301?

২০২২

৮. কোনো সমান্তর ধারার m তম পদ n এবং n তম পদ m হলে, ধারাটির $(m+n)$ তম পদ কত?

৯. $1+3+5+7+\cdots$ ধারাটির n পদের সমষ্টি কত?

১০. $8+16+24+\cdots$ ধারাটির প্রথম 9 টি পদের সমষ্টি কত?

১১. $5+11+17+23+\cdots+59 =$ কত?

১২. $29+25+21+\cdots-23 =$ কত?

১৩. কোনো সমান্তর ধারার 12 তম পদ 77 হলে, এর প্রথম 23 টি পদের সমষ্টি কত?

১৪. একটি সমান্তর ধারার 16 তম পদ -20 হলে, এর প্রথম 31 টি পদের সমষ্টি কত?

১৫. $9+7+5+\cdots$ ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল -144 হলে, n এর মান নির্ণয় কর।

১৬. $2+4+6+8+\cdots$ ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি 2550 হলে, n এর মান নির্ণয় কর।

১৭. কোনো ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $n(n+1)$ হলে, ধারাটি নির্ণয় কর।

১৮. কোনো ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $n(n+1)$। ধারাটির 10 টি পদের সমষ্টি কত?

১৯. একটি সমান্তর ধারার প্রথম 12 পদের সমষ্টি 144 এবং প্রথম 20 পদের সমষ্টি 560 হলে, এর প্রথম 6 পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

২০. কোনো সমান্তর ধারার প্রথম m পদের সমষ্টি n এবং প্রথম n পদের সমষ্টি m হলে, এর প্রথম $(m+n)$ পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

২১. কোনো সমান্তর ধারায় p তম, q তম ও r তম পদ যথাক্রমে a, b, c হলে, দেখাও যে,

$a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0$।

২২. দেখাও যে, $1+3+5+7+\cdots+125 = 169+171+173+\cdots+209$।

২৩. এক ব্যক্তি 2500 টাকার একটি ঋণ কিছুসংখ্যক কিস্তিতে পরিশোধ করতে রাজী হন। প্রত্যেক কিস্তি পূর্বের কিস্তি থেকে 2 টাকা বেশি। যদি প্রথম কিস্তি 1 টাকা হয়, তবে কতগুলো কিস্তিতে ঐ ব্যক্তি তার ঋণ শোধ করতে পারবেন?

২৪. কোন সমান্তর ধারার দুইটি নির্দিষ্ট পদ, l তম পদ l^2 এবং k তম পদ k^2।

ক) ধারাটির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d ধরে উদ্দীপকের আলোকে দুইটি সমীকরণ তৈরি কর।

খ) $(l+k)$ তম পদ নির্ণয় কর।

গ) প্রমাণ কর ধারাটির প্রথম $(l+k)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি $\frac{l+k}{2}(l^2+k^2+l+k)$ ২০২২

ধারার বিভিন্ন সূত্র

প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি নির্ণয়

মনে করি, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি S_n।

অর্থাৎ, $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

আমরা জানি,

$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = (r-1)^3$

বা, $r^3 - (r-1)^3 = 3r^2 - 3r + 1$

উপরের অভেদটিতে, $r = 1, 2, 3, \cdots, n$ বসিয়ে পাই,

$1^3 - 0^3 = 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1$

$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1$

$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1$

$\cdots \; \cdots \; \cdots$

$\cdots \; \cdots \; \cdots$

$n^3 - (n-1)^3 = 3 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 1$

যোগ করে পাই,

$n^3 - 0^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) - 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + (1 + 1 + 1 + \cdots + 1)$

বা, $n^3 = 3S_n - \dfrac{3n(n+1)}{2} + n \left[\because 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}\right]$

বা, $3S_n = n^3 + \dfrac{3n(n+1)}{2} - n$

$= \dfrac{2n^3 + 3n^2 + 3n - 2n}{2} = \dfrac{2n^3 + 3n^2 + n}{2} = \dfrac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2}$

$= \dfrac{n(2n^2 + 2n + n + 1)}{2} = \dfrac{n\{2n(n+1) + 1(n+1)\}}{2}$

বা, $3S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{2}$

$\therefore S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি নির্ণয়

মনে করি, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি S_n

অর্থাৎ, $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$

আমরা জানি, $(r+1)^2 - (r-1)^2 = (r^2+2r+1) - (r^2-2r+1) = 4r$

বা, $(r+1)^2 r^2 - r^2(r-1)^2 = 4r \cdot r^2 = 4r^3$ [উভয়পক্ষকে r^2 দ্বারা গুণ করে]

উপরের অভেদটিতে, $r = 1, 2, 3, \cdots, n$ বসিয়ে পাই,

$2^2 \cdot 1^2 - 1^2 \cdot 0^2 = 4 \cdot 1^3$

$3^2 \cdot 2^2 - 2^2 \cdot 1^2 = 4 \cdot 2^3$

$4^2 \cdot 3^2 - 3^2 \cdot 2^2 = 4 \cdot 3^3$

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$

$(n+1)^2 \cdot n^2 - n^2 \cdot (n-1)^2 = 4n^3$

যোগ করে পাই,

$(n+1)^2 \cdot n^2 - 1^2 \cdot 0^2 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3)$

বা, $(n+1)^2 \cdot n^2 = 4S_n$

বা, $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

$\therefore S_n = \left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

প্রয়োজনীয় সূত্র

১. $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

২. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

৩. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

বিশেষ দ্রষ্টব্য: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$

কাজ:

ক) প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক জোড় সংখ্যার সমষ্টি নির্ণয় কর।

খ) প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক বিজোড় সংখ্যার বর্গের সমষ্টি নির্ণয় কর।

গুণোত্তর ধারা (Geometric Series)

কোনো ধারার যেকোনো পদ ও এর পূর্ববর্তী পদের অনুপাত সব সময় সমান হলে অর্থাৎ, যেকোনো পদকে এর পূর্ববর্তী পদ দ্বারা ভাগ করে ভাগফল সর্বদা সমান পাওয়া গেলে, সে ধারাটিকে গুণোত্তর ধারা বলে এবং ভাগফলকে সাধারণ অনুপাত বলে। যেমন, $2+4+8+16+32$ ধারাটির প্রথম পদ 2, দ্বিতীয় পদ 4, তৃতীয় পদ 8, চতুর্থ পদ 16, পঞ্চম পদ 32। এখানে,

দ্বিতীয় পদের সাথে প্রথম পদের অনুপাত = $\frac{4}{2} = 2$

তৃতীয় পদের সাথে দ্বিতীয় পদের অনুপাত = $\frac{8}{4} = 2$

চতুর্থ পদের সাথে তৃতীয় পদের অনুপাত = $\frac{16}{8} = 2$

পঞ্চম পদের সাথে চতুর্থ পদের অনুপাত = $\frac{32}{16} = 2$।

সুতরাং, ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা। এই ধারায় যেকোনো পদ ও এর পূর্ববর্তী পদের অনুপাত সর্বদা সমান। উল্লেখিত ধারায় সাধারণ অনুপাত 2। ধারাটির পদ সংখ্যা নির্দিষ্ট। এ জন্য এটি একটি গুণোত্তর সসীম ধারা।

ভৌত ও জীব বিজ্ঞানের বিভিন্ন ক্ষেত্রে, ব্যাংক ও বীমা ইত্যাদি প্রতিষ্ঠানে এবং বিভিন্ন প্রকার প্রযুক্তি বিদ্যায় গুণোত্তর ধারার ব্যাপক প্রয়োগ আছে।

গুণোত্তর ধারার পদ সংখ্যা নির্দিষ্ট না থাকলে একে অনন্ত গুণোত্তর ধারা বলে।

গুণোত্তর ধারার প্রথম পদকে সাধারণত a দ্বারা এবং সাধারণ অনুপাতকে r দ্বারা প্রকাশ করা হয়। তাহলে সংজ্ঞানুসারে, প্রথম পদ a হলে, দ্বিতীয় পদ ar, তৃতীয় পদ ar^2 ইত্যাদি। সুতরাং ধারাটি হবে, $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$

কাজ: নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে গুণোত্তর ধারাগুলো লিখ:

ক) প্রথম পদ 4, সাধারণ অনুপাত 10

খ) প্রথম পদ 9, সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{3}$

গ) প্রথম পদ 7, সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{10}$

ঘ) প্রথম পদ 3, সাধারণ অনুপাত 1

ঙ) প্রথম পদ 1, সাধারণ অনুপাত $-\frac{1}{2}$

চ) প্রথম পদ 3, সাধারণ অনুপাত -1

২০২২

গুণোত্তর ধারার সাধারণ পদ

মনে করি, যেকোনো গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a, সাধারণ অনুপাত r, তাহলে ধারাটির

প্রথম পদ $= a = ar^{1-1}$ দ্বিতীয় পদ $= ar = ar^{2-1}$

তৃতীয় পদ$= ar^2 = ar^{3-1}$ চতুর্থ পদ$= ar^3 = ar^{4-1}$

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$

n তম পদ = ar^{n-1}

এই n তম পদকেই গুণোত্তর ধারার সাধারণ পদ বলা হয়। কোনো গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a ও সাধারণ অনুপাত r জানা থাকলে n তম পদে পর্যায়ক্রমে $r = 1, 2, 3, \cdots$ ইত্যাদি বসিয়ে ধারাটির যেকোনো পদ নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ ৭. $2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$ ধারাটির 10 তম পদ কত?

সমাধান: ধারাটির প্রথম পদ $a = 2$, সাধরণ অনুপাত $r = \frac{4}{2} = 2$

$\therefore$ প্রদত্ত ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা।

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n তম পদ = ar^{n-1}

$\therefore$ ধারাটির 10 তম পদ = $2 \times 2^{10-1} = 2 \times 2^9 = 1024$

উদাহরণ ৮. $128 + 64 + 32 + \cdots$ ধারাটির সাধারণ পদ কত?

সমাধান: প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ $a = 128$, সাধারণ অনুপাত $r = \frac{64}{128} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ ইহা একটি গুণোত্তর ধারা।

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার সাধারণ পদ = ar^{n-1}

সুতরাং, ধারাটির সাধারণ পদ = $128 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2^7}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1-7}} = \frac{1}{2^{n-8}}$

উদাহরণ ৯. একটি গুণোত্তর ধারার প্রথম ও দ্বিতীয় পদ যথাক্রমে 27 এবং 9 হলে, ধারাটির পঞ্চম পদ এবং দশম পদ নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ $a = 27$, দ্বিতীয় পদ $= 9$

তাহলে সাধারণ অনুপাত $r = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$

$\therefore$ পঞ্চম পদ = $ar^{5-1} = 27 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{27 \times 1}{27 \times 3} = \frac{1}{3}$ ২০২২

এবং দশম পদ = $ar^{10-1} = 27 \times \left(\frac{1}{3}\right)^9 = \frac{3^3}{3^3 \times 3^6} = \frac{1}{3^6} = \frac{1}{729}$

গুণোত্তর ধারার সমষ্টি নির্ণয়

মনে করি, গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a, সাধারণ অনুপাত r এবং পদ সংখ্যা n। যদি n সংখ্যক পদের সমষ্টি S_n হয়, তাহলে

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \ldots (1)$$

এবং $r \cdot S_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$ [(1) কে r দ্বারা গুণ করে] $\ldots (2)$

বিয়োগ করে, $S_n - rS_n = a - ar^n$

বা, $S_n(1-r) = a(1-r^n)$

$\therefore S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, যখন $r < 1$

আবার (2) থেকে (1) বিয়োগ করে পাই,

$rS_n - S_n = ar^n - a$

বা, $S_n(r-1) = a(r^n - 1)$

$\therefore S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$, যখন $r > 1$

লক্ষণীয়: সাধারণ অনুপাত $r = 1$ হলে প্রত্যেক পদ $= a$

সুতরাং, এক্ষেত্রে $S_n = a + a + a + \cdots n$ পদ পর্যন্ত $= an$

কাজ: ক তার ছেলেকে স্কুলে নেয়া-আনার জন্য এক ব্যক্তিকে ১লা এপ্রিল থেকে এক মাসের জন্য নিয়োগ করলেন। তার পারিশ্রমিক ঠিক করা হল - প্রথম দিন এক পয়সা, দ্বিতীয় দিন প্রথম দিনের দ্বিগুণ অর্থাৎ দুই পয়সা, তৃতীয় দিন দ্বিতীয় দিনের দ্বিগুণ অর্থাৎ চার পয়সা। এই নিয়মে পারিশ্রমিক দিলে সাপ্তাহিক ছুটির দিনসহ এক মাস পর ঐ ব্যক্তি কত টাকা পাবেন?

উদাহরণ ১০. $12 + 24 + 48 + \cdots + 768$ ধারাটির সমষ্টি কত?

সমাধান: প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ $a = 12$, সাধারণ অনুপাত $r = \frac{24}{12} = 2 > 1$।

$\therefore$ ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা।

মনে করি, ধারাটির n তম পদ $= 768$

আমরা জানি, n তম পদ = ar^{n-1}

$\therefore ar^{n-1} = 768$

২০২২

বা, $12 \times 2^{n-1} = 768$

বা, $2^{n-1} = \frac{768}{12} = 64$

বা, $2^{n-1} = 2^6$

বা, $n - 1 = 6$

$\therefore n = 7$

সুতরাং, ধারাটির সমষ্টি $= \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)}$, যখন $r > 1$

$= \frac{12(2^7 - 1)}{2-1} = 12 \times (128 - 1) = 12 \times 127 = 1524$

উদাহরণ ১১. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ ধারাটির প্রথম আটটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ $a = 1$, সাধারণ অনুপাত $r = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} < 1$।

$\therefore$ ইহা একটি গুণোত্তর ধারা। এখানে পদ সংখ্যা $n = 8$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n-সংখ্যক পদের সমষ্টি

$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$, যখন $r < 1$

সুতরাং, ধারাটির 8 টি পদের সমষ্টি $S_8 = \frac{1 \times \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8\right\}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{256}}{\frac{1}{2}}$

$= 2\left(\frac{256 - 1}{256}\right) = \frac{255}{128} = 1\frac{127}{128}$

উদাহরণ ১২. পলাশ সরকার 2005 সালের জানুয়ারি মাসে বার্ষিক 120000 টাকা বেতনে চাকুরীতে যোগদান করলেন। তার বেতন বৃদ্ধির পরিমাণ প্রতি বছর 5000 টাকা। প্রতি বছর তার বেতন থেকে 10% ভবিষ্যৎ তহবিল হিসেবে কর্তন করা হয়। তিনি বেতন থেকে বার্ষিক 12% চক্রবৃদ্ধি মুনাফা হারে বছর শেষে একটি ব্যাংকে 12000 টাকা জমা রাখেন। তিনি 2030 সালের 31 ডিসেম্বর চাকুরী থেকে অবসরে যাবেন।

ক) পলাশ সরকারের মূল বেতন কোন ধারাকে সমর্থন করে? ধারাটি লিখ।

খ) ভবিষ্যৎ তহবিল ব্যতিত সে বেতন হিসেবে চাকুরী জীবনে মোট কত টাকা পাবেন।

গ) 2031 সালের 31 ডিসেম্বর ঐ ব্যাংকে মুনাফাসহ তার মোট কত টাকা জমা হবে?

সমাধান:

ক) পলাশ সরকারের মূল বেতন সমান্তর ধারা সমর্থন করে।

ধারাটির প্রথম পদ $a = 120000$ এবং সাধারণ অন্তর $= 5000$

$\therefore$ দ্বিতীয় পদ $= 120000 + 5000 = 125000$

তৃতীয় পদ $= 125000 + 5000 = 130000$

$\therefore$ ধারাটি, $120000 + 125000 + 130000 + \cdots$

খ) 2005 সালের জানুয়ারি থেকে 2030 সালের 31 ডিসেম্বর পর্যন্ত মোট $(2030 - 2005 + 1)$ বা, 26 বছর ভবিষ্যৎ তহবিল ব্যতিত তাঁর বেতন বাবদ প্রাপ্য টাকার পরিমাণ

$(120000 - 120000$ এর $10\%) + (125000 - 125000$ এর $10\%) + (130000 - 130000$ এর $10\%) + \cdots$

$= (120000 - 12000) + (125000 - 12500) + (130000 - 13000) + \cdots$

$= 108000 + 112500 + 117000 + \cdots$

এক্ষেত্রে সৃষ্ট ধারাটি একটি সমান্তর ধারা, যার প্রথম পদ, $a = 108000$, সাধারণ অন্তর $d = 112500 - 108000 = 4500$ এবং পদ সংখ্যা $n = 26$

$\therefore$ 26 বছরে তাঁর প্রাপ্য মোট বেতনের পরিমাণ $= \frac{26}{2}\{2 \times 108000 + (26 - 1) \times 4500\}$ টাকা

$= 13(216000 + 112500) = 13 \times 328500 = 4270500$ টাকা

গ) 2005 সাল থেকে 2031 পর্যন্ত জমা করার মোট সময় $(2031 - 2005)$ বা 26 বছর

12000 টাকার 1 বছর শেষে জমা করেন $12000\left(1 + \frac{12}{100}\right) = 12000 \times 1.12$ টাকা

12000 টাকার 2 বছর শেষে জমা করেন $12000 \times (1.12)^2$ টাকা

12000 টাকার 3 বছর শেষে জমা করেন $12000 \times (1.12)^3$ টাকা

$\therefore$ 26 বছরে তাঁর জমাকৃত মোট টাকা $= 12000 \times 1.12 + 12000 \times (1.12)^2 + \cdots 26$ তম পদ পর্যন্ত $= 12000\{1.12 + (1.12)^2 + \cdots + (1.12)^{26}\}$

$$= 12000 \times 1.12 \times \frac{(1.12)^{26} - 1}{1.12 - 1} = 12000 \times 1.12 \times \frac{18.04}{0.12}$$

$= 2020488$ টাকা (প্রায়)

২০২২

অনুশীলনী ১৩.২

১. a, b, c ও d সমান্তর ধারার চারটি ক্রমিক পদ হলে নিচের কোনটি সঠিক?

ক) $b = \frac{c+d}{2}$ খ) $a = \frac{b+c}{2}$ গ) $c = \frac{b+d}{2}$ ঘ) $d = \frac{a+c}{2}$

২. $n \in N$ এর জন্য

$(i)\ \sum i = \frac{n^2+n}{2}$

$(ii)\ \sum i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

$(iii)\ \sum i^3 = \frac{n^2(n^2+2n+1)}{4}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

নিচের ধারাটির ভিত্তিতে ৩ ও ৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\log 2 + \log 4 + \log 8 + \cdots$

৩. ধারাটির সাধারণ অন্তর কোনটি?

ক) 2 খ) 4 গ) $\log 2$ ঘ) $2\log 2$

৪. ধারাটির সপ্তম পদ কোনটি?

ক) $\log 32$ খ) $\log 64$ গ) $\log 128$ ঘ) $\log 256$

৫. $64 + 32 + 16 + 8 + \cdots$ ধারাটির অষ্টম পদ নির্ণয় কর।

৬. $3 + 9 + 27 + \cdots$ ধারাটির প্রথম চৌদ্দটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

৭. $128 + 64 + 32 + \cdots$ ধারাটির কোন পদ $\frac{1}{2}$?

৮. একটি গুণোত্তর ধারার পঞ্চম পদ $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ এবং দশম পদ $\frac{8\sqrt{2}}{81}$ হলে, ধারাটির তৃতীয় পদ কত?

৯. $\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \sqrt{2} - \cdots$ ধারাটির কোন পদ $8\sqrt{2}$?

১০. $5 + x + y + 135$ গুণোত্তর ধারাভুক্ত হলে, x এবং y এর মান নির্ণয় কর।

১১. $3 + x + y + z + 243$ গুণোত্তর ধারাভুক্ত হলে, x, y এবং z এর মান নির্ণয় কর।

১২. $2 - 4 + 8 - 16 + \cdots$ ধারাটির প্রথম সাতটি পদের সমষ্টি কত?

১৩. $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ ধারাটির $(2n+1)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

১৪. $\log 2 + \log 4 + \log 8 + \cdots$ ধারাটির প্রথম দশটি পদের সমষ্টি কত?

১৫. $\log 2 + \log 16 + \log 512 + \cdots$ ধারাটির প্রথম বারটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

১৬. $2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$ ধারাটির n সংখ্যক পদের সমষ্টি 254 হলে, n এর মান কত?

১৭. $2 - 2 + 2 - 2 + \cdots$ ধারাটির $(2n + 2)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি কত?

১৮. প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি 441 হলে, n এর মান নির্ণয় কর এবং ঐ সংখ্যাগুলোর সমষ্টি নির্ণয় কর।

১৯. প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি 225 হলে, n এর মান কত? ঐ সংখ্যাগুলোর বর্গের সমষ্টি কত?

২০. দেখাও যে, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 10^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + 10)^2$

২১. $\dfrac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3}{1 + 2 + 3 + \cdots + n} = 210$ হলে n এর মান কত?

২২. 1 মিটার দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি লৌহ দন্ডকে 10 টি টুকরায় বিভক্ত করা হলো যাতে টুকরাগুলোর দৈর্ঘ্য গুণোত্তর ধারা গঠন করে। যদি বৃহত্তম টুকরাটি ক্ষুদ্রতম টুকরার 10 গুণ হয়, তবে ক্ষুদ্রতম টুকরাটির দৈর্ঘ্যের মান আসন্ন মিলিমিটারে নির্ণয় কর।

২৩. একটি গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a, সাধারণ অনুপাত r, ধারাটির চতুর্থ পদ -2 এবং নবম পদ $8\sqrt{2}$

ক) উপরোক্ত তথ্যগুলোকে দুইটি সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ) ধারাটির 12 তম পদ নির্ণয় কর।

গ) ধারাটি নির্ণয় করে প্রথম 7 টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

২৪. কোন ধারার n তম পদ $2n - 4$

ক) ধারাটি নির্ণয় কর।

খ) ধারাটির 10 তম পদ এবং প্রথম 20 টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

গ) প্রাপ্ত ধারাটির প্রথম পদকে প্রথম পদ এবং সাধারণ অন্তরকে সাধারণ অনুপাত ধরে একটি নতুন ধারা তৈরি কর এবং সূত্র প্রয়োগ করে ধারাটির প্রথম 8 টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

২৫. দুপুর 1 টা 15 মিনিটে 1 জন এস.এস.সি পরীক্ষার ফলাফল জানতে পারল। 1 টা 20 মিনিটে জানল 8 জন, 1 টা 25 মিনিটে জানল 27 জন। এভাবে ফলাফল ছড়িয়ে পড়ল।

ক) উদ্দীপকের আলোকে প্যাটার্ন দুইটি লিখ।

খ) ঠিক 2 টা 10 মিনিটে কত জন এবং 2 টা 10 মিনিট পর্যন্ত মোট কত জন ফলাফল জানতে পারবে?

গ) কয়টার সময় 6175225 জন ফলাফল জানতে পারবে?