অধ্যায় ১২

দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ

(Simple Simultaneous Equations in Two Variables)

গাণিতিক সমস্যা সমাধানের জন্য বীজগণিতের সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ বিষয় হলো সমীকরণ। ষষ্ঠ ও সপ্তম শ্রেণিতে আমরা সরল সমীকরণের ধারণা পেয়েছি এবং কীভাবে এক চলকবিশিষ্ট সরল সমীকরণ সমাধান করতে হয় তা জেনেছি। অষ্টম শ্রেণিতে সরল সমীকরণ প্রতিস্থাপন ও অপনয়ন পদ্ধতিতে এবং লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করেছি। কীভাবে বাস্তবভিত্তিক সমস্যার সরল সহসমীকরণ গঠন করে সমাধান করা হয় তাও শিখেছি। এ অধ্যায়ে সরল সহসমীকরণের ধারণা সম্প্রসারণ করা হয়েছে ও সমাধানের আরো নতুন পদ্ধতি সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে। এ ছাড়াও এ অধ্যায়ে লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান ও বাস্তবভিত্তিক সমস্যার সহসমীকরণ গঠন ও সমাধান সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে।

এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা ---

- দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণের সঙ্গতি যাচাই করতে পারবে।
- দুই চলকবিশিষ্ট দুইটি সমীকরণের পরস্পর নির্ভরশীলতা যাচাই করতে পারবে।
- সমাধানের আড়গুণন পদ্ধতি ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- বাস্তবভিত্তিক গাণিতিক সমস্যার সহসমীকরণ গঠন করে সমাধান করতে পারবে।
- লেখচিত্রের সাহায্যে দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ সমাধান করতে পারবে।

সরল সহসমীকরণ

সরল সহসমীকরণ বলতে দুই চলকবিশিষ্ট দুইটি সরল সমীকরণকে বুঝায় যখন এদের একত্রে উপস্থাপন করা হয় এবং চলক দুইটি একই বৈশিষ্ট্যের হয়। আবার এরূপ দুইটি সমীকরণকে একত্রে সরল সমীকরণজোটও বলে। অষ্টম শ্রেণিতে আমরা এরূপ সমীকরণজোটের সমাধান করেছি ও বাস্তবভিত্তিক সমস্যার সহসমীকরণ গঠন করে সমাধান করতে শিখেছি। এ অধ্যায়ে এ সম্পর্কে আরো বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে।

প্রথমে আমরা $2x + y = 12$ সমীকরণটি বিবেচনা করি। এটি একটি দুই চলকবিশিষ্ট সরল সমীকরণ। সমীকরণটিতে বামপক্ষে x ও y এর এমন মান পাওয়া যাবে কি যাদের প্রথমটির দ্বিগুণের সাথে দ্বিতীয়টির

২০২২

যোগফল ডানপক্ষের 12 এর সমান হয়, অর্থাৎ ঐ মান দুইটি দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়?

এখন, $2x + y = 12$ সমীকরণটি থেকে নিচের ছকটি পূরণ করি:

x এর মান	y এর মান	বামপক্ষ $(2x + y)$ এর মান	ডানপক্ষ
-2	16	$-4 + 16 = 12$	12
0	12	$0 + 12 = 12$	12
3	6	$6 + 6 = 12$	12
5	2	$10 + 2 = 12$	12
$\dots$	$\dots$	$\dots = 12$	12

সমীকরণটির অসংখ্য সমাধান আছে। তার মধ্যে চারটি সমাধান: $(-2, 16)$, $(0, 12)$, $(3, 6)$, $(5, 2)$।

আবার, অন্য একটি সমীকরণ $x - y = 3$ নিয়ে নিচের ছকটি পূরণ করি:

x এর মান	y এর মান	বামপক্ষ $(x - y)$ এর মান	ডানপক্ষ
-2	-5	$-2 + 5 = 3$	3
0	-3	$0 + 3 = 3$	3
3	0	$3 - 0 = 3$	3
5	2	$5 - 2 = 3$	3
$\dots$	$\dots$	$\dots = 3$	3

সমীকরণটির অসংখ্য সমাধান আছে। তার মধ্যে চারটি সমাধান: $(-2, -5)$, $(0, -3)$, $(3, 0)$, $(5, 2)$।

যদি আলোচ্য সমীকরণ দুইটিকে একত্রে জোট হিসেবে ধরা হয়, তবে একমাত্র $(5, 2)$ দ্বারা উভয় সমীকরণ যুগপৎ সিদ্ধ হয়। আর অন্য কোনো মান দ্বারা উভয় সমীকরণ যুগপৎ সিদ্ধ হবে না।

অতএব, সমীকরণজোট $2x + y = 12$ এবং $x - y = 3$ এর সমাধান: $(x, y) = (5, 2)$

কাজ: $x - 2y + 1 = 0$ ও $2x + y - 3 = 0$ সমীকরণদ্বয়ের প্রত্যেকটির পাঁচটি করে সমাধান লিখ যেন তন্মধ্যে সাধারণ সমাধানটিও থাকে।

দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণের সমাধান যোগ্যতা

ক) পূর্বের আলোচিত সমীকরণজোট $\left.\begin{aligned} 2x + y &= 12 \\ x - y &= 3 \end{aligned}\right\}$ এর অনন্য (একটি মাত্র) সমাধান পাওয়া গেছে। এরূপ সমীকরণজোটকে সমঞ্জস (consistent) বলা হয়। সমীকরণ দুইটির x ও y এর সহগ তুলনা করে (সহগের অনুপাত নিয়ে) পাই, $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1}$, সমীকরণজোটটির একটি সমীকরণকে অন্যটির মাধ্যমে প্রকাশ করা যায় না। এ জন্য এরূপ সমীকরণকে পরস্পর অনির্ভরশীল (independent) সমীকরণজোট বলা হয়।

সমঞ্জস ও পরস্পর অনির্ভরশীল সমীকরণজোটের ক্ষেত্রে অনুপাতগুলো সমান নয়। এক্ষেত্রে ধ্রুবকপদ তুলনা করার প্রয়োজন হয় না।

খ) এখন আমরা $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 6 \\ 4x - 2y = 12 \end{array}\right\}$ সমীকরণজোটটি বিবেচনা করি। এই দুইটি সমীকরণ সমাধান করা যাবে কি?

এখানে, ১ম সমীকরণটির উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করলে ২য় সমীকরণটি পাওয়া যাবে। আবার, ২য় সমীকরণের উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করলে ১ম সমীকরণটি পাওয়া যাবে। অর্থাৎ, সমীকরণ দুইটি পরস্পর নির্ভরশীল।

আমরা জানি, ১ম সমীকরণটির অসংখ্য সমাধান আছে। কাজেই, ২য় সমীকরণটিরও ঐ একই অসংখ্য সমাধান আছে। এরূপ সমীকরণজোটকে সমঞ্জস ও পরস্পর নির্ভরশীল (dependent) সমীকরণজোট বলে। এরূপ সমীকরণজোটের অসংখ্য সমাধান আছে।

এখানে, সমীকরণ দুইটির x ও y এর সহগ এবং ধ্রুবক পদ তুলনা করে পাই, $\dfrac{2}{4} = \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{6}{12}\left(= \dfrac{1}{2}\right)$

অর্থাৎ, সমঞ্জস ও পরস্পর নির্ভরশীল সমীকরণজোটের ক্ষেত্রে অনুপাতগুলো সমান হয়।

গ) এবারে আমরা $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 12 \\ 4x + 2y = 5 \end{array}\right\}$ সমীকরণজোটটি সমাধান করার চেষ্টা করি।

এখানে, ১ম সমীকরণটির উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে পাই, $4x + 2y = 24$

২য় সমীকরণটি, $4x + 2y = 5$

বিয়োগ করে পাই, $0 = 19$ যা অসম্ভব।

কাজেই বলতে পারি, এ ধরনের সমীকরণজোট সমাধান করা সম্ভব নয়। এরূপ সমীকরণজোট অসমঞ্জস (inconsistent) ও পরস্পর অনির্ভরশীল। এরূপ সমীকরণজোটের কোনো সমাধান নেই।

এখানে সমীকরণ দুইটির x ও y এর সহগ এবং ধ্রুবক পদ তুলনা করে পাই, $\dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \neq \dfrac{12}{5}$

অর্থাৎ, অসমঞ্জস ও পরস্পর অনির্ভরশীল সমীকরণজোটের ক্ষেত্রে চলকের সহগের অনুপাতগুলো ধ্রুবকের অনুপাতের সমান নয়।

সাধারণভাবে, $\left.\begin{array}{r} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array}\right\}$ সমীকরণজোটটি নিয়ে নিচের ছকের মাধ্যমে দুইটি সরল সমীকরণের সমাধান যোগ্যতার শর্ত উল্লেখ করা হলো: ২০২২

	সমীকরণজোট	সহগ ও ধ্রুবক পদ তুলনা	সমঞ্জস/ অসমঞ্জস	পরস্পর নির্ভরশীল/ অনির্ভরশীল	সমাধান আছে (কয়টি)/নেই
(i)	$a_1x + b_1y = c_1$ $a_2x + b_2y = c_2$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	সমঞ্জস	অনির্ভরশীল	আছে (একটিমাত্র)
(ii)	$a_1x + b_1y = c_1$ $a_2x + b_2y = c_2$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	সমঞ্জস	নির্ভরশীল	আছে (অসংখ্য)
(iii)	$a_1x + b_1y = c_1$ $a_2x + b_2y = c_2$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	অসমঞ্জস	অনির্ভরশীল	নেই

এখন, যদি কোনো সমীকরণজোটে উভয় সমীকরণে ধ্রুবক পদ না থাকে, অর্থাৎ, $c_1 = c_2 = 0$ হয়, তবে ছকের

(i) অনুযায়ী $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ হলে, সমীকরণজোট সর্বদা সমঞ্জস ও পরস্পর অনির্ভরশীল। সেক্ষেত্রে একটিমাত্র (অনন্য) সমাধান থাকবে।

(ii) অনুযায়ী $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ হলে, সমীকরণজোট সমঞ্জস ও পরস্পর নির্ভরশীল। সেক্ষেত্রে অসংখ্য সমাধান থাকবে।

উদাহরণ ১. নিচের সমীকরণজোটগুলো সমঞ্জস/অসমঞ্জস, নির্ভরশীল/অনির্ভরশীল কি না ব্যাখ্যা কর এবং এদের সমাধানের সংখ্যা নির্দেশ কর।

ক) $x + 3y = 1$, $2x + 6y = 2$

খ) $2x - 5y = 3$, $x + 3y = 1$

গ) $3x - 5y = 7$, $6x - 10y = 15$

সমাধান:

ক) প্রদত্ত সমীকরণজোট: $\left.\begin{array}{r} x + 3y = 1 \\ 2x + 6y = 2 \end{array}\right\}$

x এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{1}{2}$

y এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{3}{6}$ বা $\frac{1}{2}$

ধ্রুবক পদদ্বয়ের অনুপাত $\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

অতএব, সমীকরণজোটটি সমঞ্জস ও পরস্পর নির্ভরশীল। সমীকরণজোটটির অসংখ্য সমাধান আছে।

২০২২

খ) প্রদত্ত সমীকরণজোট: $\left.\begin{array}{l} 2x-5y=3 \\ x+3y=1 \end{array}\right\}$

x এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{2}{1}$

y এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{-5}{3}$

আমরা পাই, $\frac{2}{1} \neq \frac{-5}{3}$

$\therefore$ সমীকরণজোটটি সমঞ্জস ও পরস্পর অনির্ভরশীল। সমীকরণজোটটির একটিমাত্র (অনন্য) সমাধান আছে।

গ) প্রদত্ত সমীকরণজোট: $\left.\begin{array}{l} 3x-5y=7 \\ 6x-10y=15 \end{array}\right\}$

x এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{3}{6}$ বা $\frac{1}{2}$

y এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{-5}{-10}$ বা $\frac{1}{2}$

ধ্রুবক পদদ্বয়ের অনুপাত $\frac{7}{15}$

আমরা পাই, $\frac{3}{6} = \frac{-5}{-10} \neq \frac{7}{15}$

$\therefore$ সমীকরণজোটটি অসমঞ্জস ও পরস্পর অনির্ভরশীল। সমীকরণজোটটির কোনো সমাধান নেই।

কাজ: $x-2y+1=0,\ 2x+y-3=0$ সমীকরণজোটটি সমঞ্জস কি না, পরস্পর নির্ভরশীল কি না যাচাই কর এবং সমীকরণজোটটির কয়টি সমাধান থাকতে পারে তা নির্দেশ কর।

অনুশীলনী ১২.১

নিচের সরল সহসমীকরণগুলো সমঞ্জস/অসমঞ্জস, পরস্পর নির্ভরশীল/অনির্ভরশীল কি না যুক্তিসহ উল্লেখ কর এবং এগুলোর সমাধানের সংখ্যা নির্দেশ কর:

১. $x-y=4$
$x+y=10$

২. $2x+y=3$
$4x+2y=6$

৩. $x-y-4=0$
$3x-3y-10=0$

৪. $3x+2y=0$
$6x+4y=0$

৫. $3x+2y=0$
$9x-6y=0$

৬. $5x-2y-16=0$
$3x-\frac{6}{5}y=2$

৭. $-\frac{1}{2}x + y = -1$
$x - 2y = 2$

৮. $-\frac{1}{2}x - y = 0$
$x - 2y = 0$

৯. $-\frac{1}{2}x + y = -1$
$x + y = 5$

১০. $ax - cy = 0$
$cx - ay = c^2 - a^2$

সরল সহসমীকরণের সমাধান

আমরা শুধু সমঞ্জস ও পরস্পর অনির্ভরশীল সরল সহসমীকরণের সমাধান সম্পর্কে আলোচনা করবো। এরূপ সমীকরণজোটের একটিমাত্র (অনন্য) সমাধান আছে।

এখানে, সমাধানের চারটি পদ্ধতির উল্লেখ করা হলো:

১. প্রতিস্থাপন পদ্ধতি ২. অপনয়ন পদ্ধতি ৩. আড়গুণন পদ্ধতি ও ৪. লৈখিক পদ্ধতি।

আমরা অষ্টম শ্রেণিতে প্রতিস্থাপন ও অপনয়ন পদ্ধতিতে সমাধান কীভাবে করতে হয় জেনেছি। এ দুই পদ্ধতির একটি করে উদাহরণ দেওয়া হলো:

উদাহরণ ২. প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাধান কর:

$$2x + y = 8$$
$$3x - 2y = 5$$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়

$$2x + y = 8 \ldots (1)$$
$$3x - 2y = 5 \ldots (2)$$

সমীকরণ (1) হতে পাই, $y = 8 - 2x \ldots (3)$

সমীকরণ (2) এ y এর মান $8 - 2x$ বসিয়ে পাই,

$3x - 2(8 - 2x) = 5$

বা, $3x - 16 + 4x = 5$

বা, $7x = 5 + 16$

বা, $7x = 21$

বা, $x = 3$

২০২২

x এর মান সমীকরণ (3) এ বসিয়ে পাই,

$y = 8 - 2 \times 3$

বা, $y = 8 - 6$

বা, $y = 2$

$\therefore$ সমাধান $(x, y) = (3, 2)$

প্রতিস্থাপন পদ্ধতি (Substitution method): সুবিধামত একটি সমীকরণ থেকে একটি চলকের মান অপর চলকের মাধ্যমে প্রকাশ করে প্রাপ্ত মান অপর সমীকরণে বসালে এক চলকবিশিষ্ট সমীকরণ পাওয়া যায়। অত:পর সমীকরণটি সমাধান করে চলকটির মান পাওয়া যায়। এই মান প্রদত্ত সমীকরণের যে কোনোটিতে বসানো যেতে পারে। তবে যেখানে একটি চলককে অপর চলকের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়েছে সেখানে বসালে সমাধান সহজ হয়। এখান থেকে অপর চলকের মান পাওয়া যায়।

উদাহরণ ৩. অপনয়ন পদ্ধতিতে সমাধান কর:

$$2x + y = 8$$
$$3x - 2y = 5$$

দ্রষ্টব্য: প্রতিস্থাপন ও অপনয়ন পদ্ধতির পার্থক্য বুঝাতেই উদাহরণ ২ এর সমীকরণদ্বয়ই উদাহরণ ৩ এ নেয়া হলো।

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়

$$2x + y = 8 \ldots (1)$$
$$3x - 2y = 5 \ldots (2)$$

সমীকরণ (1) এর উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে, $4x + 2y = 16 \ldots (3)$

সমীকরণ (2) ও (3) যোগ করে পাই,

$7x = 21$

বা, $x = 3$

x এর মান সমীকরণ (1) এ বসিয়ে পাই,

$2 \times 3 + y = 8$

বা, $y = 8 - 6$

বা, $y = 2$

$\therefore$ সমাধান $(x, y) = (3, 2)$

অপনয়ন পদ্ধতি (Elimination method): সুবিধামত একটি সমীকরণকে বা উভয় সমীকরণকে এরূপ সংখ্যা দিয়ে গুণ করতে হবে যেন গুণনের পর উভয় সমীকরণের যেকোনো একটি চলকের ২০২২

সহগের পরমমান সমান হয়। এরপর প্রয়োজনমত সমীকরণ দুইটিকে যোগ বা বিয়োগ করলে সহগ সমানকৃত চলকটি অপনীত বা অপসারিত হয়। তারপর সমীকরণটি সমাধান করলে বিদ্যমান চলকটির মান পাওয়া যায়। ঐ মান সুবিধামত প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের যেকোনোটিতে বসালে অপর চলকটির মান পাওয়া যায়।

আড়গুণন পদ্ধতি (Cross multiplication method):

আড়গুণন পদ্ধতিকে বজ্রগুণন পদ্ধতিও বলে।

নিচের সমীকরণ দুইটি বিবেচনা করি:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \ldots (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \ldots (2)$$

সমীকরণ (1) কে b_2 দিয়ে ও সমীকরণ (2) কে b_1 দিয়ে গুণ করে পাই,

$$a_1b_2x + b_1b_2y + b_2c_1 = 0 \ldots (3)$$

$$a_2b_1x + b_1b_2y + b_1c_2 = 0 \ldots (4)$$

সমীকরণ (3) থেকে সমীকরণ (4) বিয়োগ করে পাই,

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x + b_2c_1 - b_1c_2 = 0$$

বা, $(a_1b_2 - a_2b_1)x = b_1c_2 - b_2c_1$

বা, $\dfrac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \dfrac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \ldots (5)$

আবার, সমীকরণ (1) কে a_2 দিয়ে ও সমীকরণ (2) কে a_1 দিয়ে গুণ করে পাই,

$$a_1a_2x + a_2b_1y + c_1a_2 = 0 \ldots (6)$$

$$a_1a_2x + a_1b_2y + c_2a_1 = 0 \ldots (7)$$

সমীকরণ (6) থেকে সমীকরণ (7) বিয়োগ করে পাই,

$$(a_2b_1 - a_1b_2)y + c_1a_2 - c_2a_1 = 0$$

বা, $-(a_1b_2 - a_2b_1)y = -(c_1a_2 - c_2a_1)$

বা, $\dfrac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \dfrac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \ldots (8)$

সমীকরণ (5) ও (8) থেকে পাই,

$$\boxed{\dfrac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \dfrac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \dfrac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}}$$

x ও y এর এরূপ সম্পর্ক থেকে এদের মান নির্ণয়ের কৌশলকে আড়গুণন পদ্ধতি বলে।

২০২২

x ও y এর উল্লেখিত সম্পর্ক থেকে পাই,

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \text{ বা, } x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

আবার, $\dfrac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \dfrac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, বা, $y = \dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সমাধান: $(x, y) = \left(\dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)$

লক্ষ করি:

সমীকরণ	x ও y এর মধ্যে সম্পর্ক	মনে রাখার চিত্র
$a_1x+b_1y+c_1=0$ $a_2x+b_2y+c_2=0$	$\dfrac{x}{b_1c_2-b_2c_1} = \dfrac{y}{c_1a_2-c_2a_1} = \dfrac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$	$x \quad y \quad 1$ $a_1 \mid b_1 \quad c_1 \quad a_1 \quad b_1$ $a_2 \mid b_2 \quad c_2 \quad a_2 \quad b_2$

দ্রষ্টব্য: প্রদত্ত উভয় সমীকরণের ধ্রুবক পদ ডানপক্ষে রেখেও আড়গুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করা যায়। তবে সেক্ষেত্রে চিহ্নের কিছু পরিবর্তন হবে। কিন্তু সমাধান একই পাওয়া যাবে।

কাজ:

$\left.\begin{array}{l} 4x - y - 7 = 0 \\ 3x + y = 0 \end{array}\right\}$ সমীকরণজোটকে

$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{array}\right\}$ সমীকরণজোটের আকারে প্রকাশ করলে

$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ এর মান বের কর।

উদাহরণ 8. আড়গুণন পদ্ধতিতে সমাধান কর:

$$6x - y = 1$$

$$3x + 2y = 13$$

সমাধান: পক্ষান্তর প্রক্রিয়ায় প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের ডানপক্ষ 0 (শূন্য) করে পাই,

$$6x - y - 1 = 0$$

$$3x + 2y - 13 = 0$$

সমীকরণদ্বয়কে যথাক্রমে

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$

এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a_1 = 6,\ b_1 = -1,\ c_1 = -1$

$a_2 = 3,\ b_2 = 2,\ c_2 = -13$

আড়গুণন পদ্ধতিতে পাই,

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

বা, $\dfrac{x}{(-1)\times(-13) - 2\times(-1)} = \dfrac{y}{(-1)\times 3 - (-13)\times 6} = \dfrac{1}{6\times 2 - 3\times(-1)}$

বা, $\dfrac{x}{13+2} = \dfrac{y}{-3+78} = \dfrac{1}{12+3}$

বা, $\dfrac{x}{15} = \dfrac{y}{75} = \dfrac{1}{15}$

সুতরাং, $\dfrac{x}{15} = \dfrac{1}{15}$ বা, $x = \dfrac{15}{15} = 1$

আবার, $\dfrac{y}{75} = \dfrac{1}{15}$ বা, $y = \dfrac{75}{15} = 5$

$\therefore$ সমাধান $(x, y) = (1, 5)$

$$\begin{array}{c|ccccc} & & x & y & 1 & \\ a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & & x & y & 1 & \\ 6 & -1 & -1 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & -13 & 3 & 2 \end{array}$$

উদাহরণ ৫. আড়গুণন পদ্ধতিতে সমাধান কর:

$$3x - 4y = 0$$
$$2x - 3y = -1$$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়

$3x - 4y = 0$
$2x - 3y = -1$

বা,

$3x - 4y + 0 = 0$
$2x - 3y + 1 = 0$

আড়গুণন পদ্ধতিতে পাই,

$$\frac{x}{-4\times 1 - (-3)\times 0} = \frac{y}{0\times 2 - 1\times 3} = \frac{1}{3\times(-3) - 2\times(-4)}$$

বা, $\frac{x}{-4+0}=\frac{y}{0-3}=\frac{1}{-9+8}$

বা, $\frac{x}{-4}=\frac{y}{-3}=\frac{1}{-1}$

		x	y	1	
3	-4	0	3	-4	
2	-3	1	2	-3	

বা, $\frac{x}{4}=\frac{y}{3}=\frac{1}{1}$

সুতরাং, $\frac{x}{4}=\frac{1}{1}$ বা, $x=4$

আবার, $\frac{y}{3}=\frac{1}{1}$ বা, $y=3$

$\therefore$ সমাধান $(x,y)=(4,3)$

উদাহরণ ৬. আড়গুণন পদ্ধতিতে সমাধান কর:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=8$$
$$\frac{5x}{4}-3y=-3$$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়কে $ax+by+c=0$ আকারে সাজিয়ে পাই,

$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=8$

বা, $\frac{3x+2y}{6}=8$

বা, $3x+2y-48=0$

আবার, $\frac{5x}{4}-3y=-3$

বা, $\frac{5x-12y}{4}=-3$

বা, $5x-12y+12=0$

$\therefore$ সমীকরণদ্বয়

$3x+2y-48=0$

$5x-12y+12=0$

আড়গুণন পদ্ধতিতে পাই,

$$\frac{x}{2\times 12-(-12)\times(-48)}=\frac{y}{(-48)\times 5-12\times 3}=\frac{1}{3\times(-12)-5\times 2}$$

বা, $\frac{x}{24-576}=\frac{y}{-240-36}=\frac{1}{-36-10}$

বা, $\frac{x}{-552}=\frac{y}{-276}=\frac{1}{-46}$

		x	y	1	
3	2	-48	3	2	
5	-12	12	5	-12	

২০২২

বা, $\frac{x}{552} = \frac{y}{276} = \frac{1}{46}$

সুতরাং, $\frac{x}{552} = \frac{1}{46}$ বা, $x = \frac{552}{46} = 12$

আবার, $\frac{y}{276} = \frac{1}{46}$ বা, $y = \frac{276}{46} = 6$

$\therefore$ সমাধান: $(x, y) = (12, 6)$

সমাধানের শুদ্ধি পরীক্ষা: প্রাপ্ত x ও y এর মান প্রদত্ত সমীকরণে বসিয়ে পাই,

১ম সমীকরণে, বামপক্ষ $= \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{12}{2} + \frac{6}{3} = 6 + 2 = 8 =$ ডানপক্ষ

২য় সমীকরণে, বামপক্ষ $= \frac{5x}{4} - 3y = \frac{5 \times 12}{4} - 3 \times 6 = 15 - 18 = -3 =$ ডানপক্ষ।

$\therefore$ সমাধান শুদ্ধ হয়েছে।

উদাহরণ ৭. আড়গুণন পদ্ধতিতে সমাধান কর: $ax - by = ab = bx - ay$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়,

$$\begin{aligned} ax - by &= ab \\ bx - ay &= ab \end{aligned} \qquad \text{বা,} \qquad \begin{aligned} ax - by - ab &= 0 \\ bx - ay - ab &= 0 \end{aligned}$$

আড়গুণন পদ্ধতিতে পাই,

$$\frac{x}{(-b) \times (-ab) - (-a)(-ab)} = \frac{y}{(-ab) \times b - (-ab) \times a} = \frac{1}{a \times (-a) - b \times (-b)}$$

বা, $\frac{x}{ab^2 - a^2b} = \frac{y}{-ab^2 + a^2b} = \frac{1}{-a^2 + b^2}$

বা, $\frac{x}{-ab(a-b)} = \frac{y}{ab(a-b)} = \frac{1}{-(a+b)(a-b)}$

$$\begin{array}{c|cccc} & x & & y & 1 \\ a & -b & -ab & a & -b \\ b & -a & -ab & b & -a \end{array}$$

বা, $\frac{x}{ab(a-b)} = \frac{y}{-ab(a-b)} = \frac{1}{(a+b)(a-b)}$

সুতরাং, $\frac{x}{ab(a-b)} = \frac{1}{(a+b)(a-b)}$, বা, $x = \frac{ab(a-b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{ab}{a+b}$

আবার, $\frac{y}{-ab(a-b)} = \frac{1}{(a+b)(a-b)}$, বা, $y = \frac{-ab(a-b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{-ab}{a+b}$

$\therefore (x, y) = \left(\frac{ab}{a+b}, \frac{-ab}{a+b}\right)$

অনুশীলনী ১২.২

প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাধান কর (১ - ৩):

১. $7x - 3y = 31$
$9x - 5y = 41$

২. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$
$\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 1$

৩. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 2$
$ax + by = a^2 + b^2$

অপনয়ন পদ্ধতিতে সমাধান কর (৪ - ৬):

৪. $7x - 3y = 31$
$9x - 5y = 41$

৫. $7x - 8y = -9$
$5x - 4y = -3$

৬. $ax + by = c$
$a^2x + b^2y = c^2$

আড়গুণন পদ্ধতিতে সমাধান কর (৭ - ১৫):

৭. $2x + 3y + 5 = 0$
$4x + 7y + 6 = 0$

৮. $3x - 5y + 9 = 0$
$5x - 3y - 1 = 0$

৯. $x + 2y = 7$
$2x - 3y = 0$

১০. $4x + 3y = -12$
$2x = 5$

১১. $-7x + 8y = 9$
$5x - 4y = -3$

১২. $3x - y - 7 = 0$
$2x + y - 3 = 0$

১৩. $ax + by = a^2 + b^2$
$2bx - ay = ab$

১৪. $y(3 + x) = x(6 + y)$
$3(3 + x) = 5(y - 1)$

১৫. $(x + 2)(y - 3) = y(x - 1)$
$5x - 11y - 8 = 0$

লৈখিক পদ্ধতি (Graphical Method)

দুই চলকবিশিষ্ট একটি সরল সমীকরণে বিদ্যমান চলক x ও y এর সম্পর্ককে চিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। এই চিত্রকে ঐ সম্পর্কের লেখচিত্র বলে। এ জাতীয় সমীকরণের লেখচিত্রে অসংখ্য বিন্দু থাকে। এরূপ কয়েকটি বিন্দু স্থাপন করে এদের পরস্পর সংযুক্ত করলেই লেখচিত্র পাওয়া যায়।

সরল সহসমীকরণের প্রত্যেকটির অসংখ্য সমাধান রয়েছে। প্রত্যেকটি সমীকরণের লেখ একটি সরলরেখা। সরলরেখাটির প্রত্যেকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে। কোনো লেখ নির্দিষ্ট করতে তিন বা ততোধিক বিন্দু আবশ্যক। এখন আমরা নিচের সমীকরণজোটটি সমাধান করার চেষ্টা করবো:

$$2x + y = 3 \ldots (1)$$

$$4x + 2y = 6 \ldots (2)$$

সমীকরণ (1) থেকে পাই, $y = 3 - 2x$।

সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিম্নের ছকটি তৈরি করি:

x	-1	0	3
y	5	3	-3

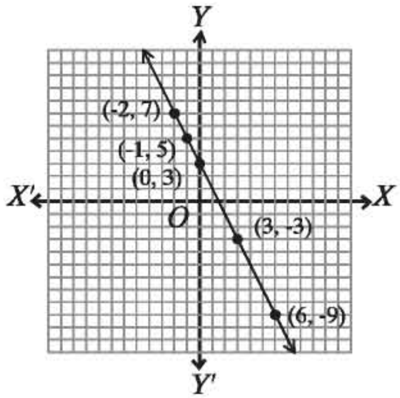
$\therefore$ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু $(-1, 5), (0, 3)$ ও $(3, -3)$।

আবার, সমীকরণ (2) থেকে পাই, $2y = 6 - 4x$ বা, $y = \dfrac{6 - 4x}{2}$

সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপে মান বের করি ও নিম্নের ছকটি তৈরি করি:

x	-2	0	6
y	7	3	-9

$\therefore$ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু $(-2, 7), (0, 3)$ ও $(6, -9)$।



মনে করি, ছক কাগজে XOX' ও YOY' যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু।
ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরি। এখন সমীকরণ (1) হতে প্রাপ্ত $(-1, 5), (0, 3)$ ও $(3, -3)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও এদের পরস্পর সংযুক্ত করি। লেখটি একটি সরলরেখা।
আবার, সমীকরণ (2) হতে প্রাপ্ত $(-2, 7), (0, 3)$ ও $(6, -9)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও এদের পরস্পর সংযুক্ত করি। এক্ষেত্রেও লেখটি একটি সরলরেখা।

তবে লক্ষ করি, সরলরেখা দুইটি পরস্পরের উপর সমাপতিত হয়ে একটি সরলরেখায় পরিণত হয়েছে। আবার, সমীকরণ (2) এর উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করলে সমীকরণ (1) পাওয়া যায়। এ কারণে সমীকরণদ্বয়ের লেখ পরস্পর সমাপতিত হয়েছে।

এখানে, $\left.\begin{aligned} 2x + y &= 3 \ldots (1) \\ 4x + 2y &= 6 \ldots (2) \end{aligned}\right\}$ সমীকরণজোটটি সমঞ্জস ও পরস্পর নির্ভরশীল। এরূপ সমীকরণজোটের অসংখ্যা সমাধান আছে এবং সমীকরণজোটটির লেখ একটি সরলরেখা।

এবার আমরা নিচের সমীকরণজোটটি সমাধান করার চেষ্টা করব:

$$2x - y = 4 \ldots (1)$$

$$4x - 2y = 12 \ldots (2)$$

সমীকরণ (1) থেকে পাই, $y = 2x - 4$।

সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিম্নের ছকটি তৈরি করি:

x	-1	0	4
y	-6	-4	4

$\therefore$ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু $(-1, -6), (0, -4), (4, 4)$।

২০২২

আবার, সমীকরণ (2) থেকে পাই,

$4x - 2y = 12$, বা, $2x - y = 6$ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $y = 2x - 6$

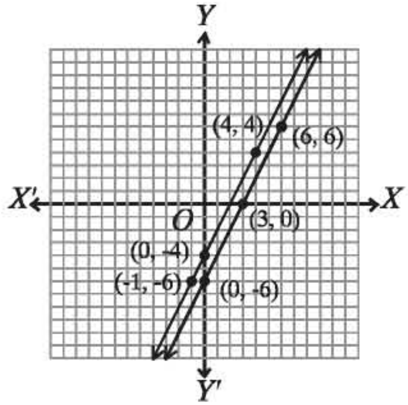
সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিম্নের ছকটি তৈরি করি:

x	0	3	6
y	-6	0	6

$\therefore$ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু $(0, -6), (3, 0), (6, 6)$।

মনে করি, ছক কাগজে XOX' ও YOY' যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে সমীকরণ (1) হতে প্রাপ্ত $(-1, -6), (0, -4)$ ও $(4, 4)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও এদের পরস্পর সংযুক্ত করি। লেখটি একটি সরলরেখা।

আবার, সমীকরণ (2) হতে প্রাপ্ত $(0, -6), (3, 0), (6, 6)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও এদের পরস্পর সংযুক্ত করি। এক্ষেত্রেও লেখটি একটি সরলরেখা।



চিত্রে লক্ষ করি, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের পৃথকভাবে প্রত্যেকটির অসংখ্য সমাধান থাকলেও জোট হিসেবে এদের সাধারণ সমাধান নেই। আরও লক্ষ করি যে, প্রদত্ত সমীকরণ দুইটির লেখচিত্র দুইটি পরস্পর সমান্তরাল সরলরেখা। অর্থাৎ, রেখা দুইটি কখনো একে অপরকে ছেদ করবে না। অতএব, এদের কোনো সাধারণ ছেদ বিন্দু পাওয়া যাবে না। এ ক্ষেত্রে আমরা বলি যে, এরূপ সমীকরণজোটের কোনো সমাধান নেই। আমরা জানি, এরূপ সমীকরণজোট অসমঞ্জস ও পরস্পর অনির্ভরশীল।

আমরা এখন লেখচিত্রের সাহায্যে সমঞ্জস ও পরস্পর অনির্ভরশীল সমীকরণজোট সমাধান করবো।

দুই চলকবিশিষ্ট দুইটি সমঞ্জস ও পরস্পর অনির্ভরশীল সরল সমীকরণের লেখ একটি বিন্দুতে ছেদ করে। ঐ ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা উভয় সমীকরণ সিদ্ধ হবে। ছেদবিন্দুটির স্থানাঙ্কই হবে সমীকরণদ্বয়ের সমাধান।

উদাহরণ ৮. সমাধান কর ও সমাধান লেখচিত্রে দেখাও:

$$2x + y = 8$$

$$3x - 2y = 5$$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়

$$2x + y - 8 = 0 \ldots (1)$$

$$3x - 2y - 5 = 0 \ldots (2)$$

আড়গুণন পদ্ধতিতে পাই,

২০২২

$$\frac{x}{1\times(-5)-(-2)\times(-8)}=\frac{y}{(-8)\times 3-(-5)\times 2}=\frac{1}{2(-2)-3\times 1}$$

বা, $\frac{x}{-5-16}=\frac{y}{-24+10}=\frac{1}{-4-3}$

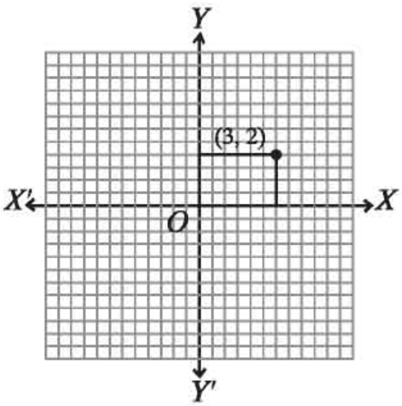
বা, $\frac{x}{-21}=\frac{y}{-14}=\frac{1}{-7}$

বা, $\frac{x}{21}=\frac{y}{14}=\frac{1}{7}$

$\therefore \frac{x}{21}=\frac{1}{7}$, বা, $x=\frac{21}{7}=3$

আবার, $\frac{y}{14}=\frac{1}{7}$, বা, $y=\frac{14}{7}=2$

$\therefore$ সমাধান: $(x, y)=(3, 2)$



মনে করি, XOX' ও YOY' যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি দুই বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(3, 2)$ বিন্দুটি স্থাপন করি।

উদাহরণ ৯. লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর:

$3x-y=3$

$5x+y=21$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়

$3x-y=3\ldots(1)$

$5x+y=21\ldots(2)$

সমীকরণ (1) থেকে পাই, $3x-y=3$, বা, $y=3x-3$

সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিম্নের ছকটি তৈরি করি:

x	-1	0	3
y	-6	-3	6

$\therefore$ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু $(-1,-6), (0,-3), (3,6)$

আবার, সমীকরণ (2) থেকে পাই, $5x+y=21$, বা, $y=21-5x$

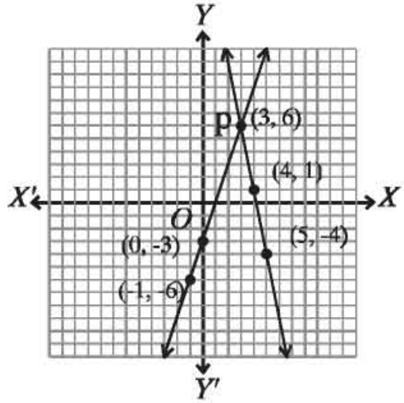
সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিম্নের ছকটি তৈরি করি:

২০২২

x	3	4	5
y	6	1	-4

$\therefore$ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু $(3,6),(4,1),(5,-4)$।

মনে করি, XOX' ও YOY' যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরি। এখন ছক কাগজে সমীকরণ (1) হতে প্রাপ্ত $(-1,-6),(0,-3),(3,6)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও এদের পরস্পর সংযুক্ত করি। লেখটি একটি সরলরেখা।



একইভাবে, সমীকরণ (2) হতে প্রাপ্ত $(3,6),(4,1),(5,-4)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও এদের পরস্পর সংযুক্ত করি। এক্ষেত্রেও লেখটি একটি সরলরেখা।

মনে করি, সরলরেখাদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে। চিত্র থেকে দেখা যায়, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(3,6)$

$\therefore$ সমাধান: $(x,y)=(3,6)$

উদাহরণ ১০. লৈখিক পদ্ধতিতে সমাধান কর:

$$2x+5y=-14$$

$$4x-5y=17$$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়

$$2x+5y=-14\ldots(1)$$

$$4x-5y=17\ldots(2)$$

সমীকরণ (1) থেকে পাই, $5y=-14-2x$, বা, $y=\dfrac{-2x-14}{5}$

সমীকরণটিতে x এর সুবিধামত কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিম্নের ছকটি তৈরি করি:

x	3	$\frac{1}{2}$	-2
y	-4	-3	-2

$\therefore$ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু $(3,-4),\left(\dfrac{1}{2},-3\right),(-2,-2)$।

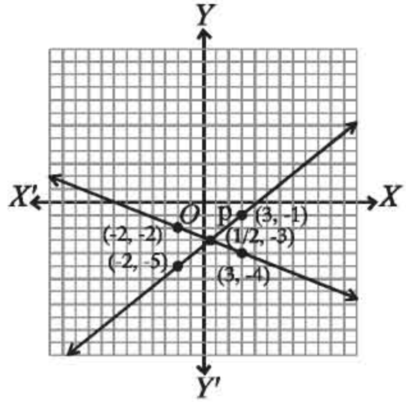
আবার, সমীকরণ (2) থেকে পাই, $5y=4x-17$, বা, $y=\dfrac{4x-17}{5}$

২০২২

সমীকরণটিতে x এর সুবিধামত কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিম্নের ছকটি তৈরি করি:

x	3	$\frac{1}{2}$	-2
y	-1	-3	-5

$\therefore$ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু $(3,-1), \left(\frac{1}{2},-3\right), (-2,-5)$



মনে করি, XOX' ও YOY' যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি দুই বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরি। এখন, ছক কাগজে সমীকরণ (1) থেকে প্রাপ্ত $(3,-4), \left(\frac{1}{2},-3\right), (-2,-2)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করে এদের পরপর সংযুক্ত করি। লেখটি একটি সরলরেখা।

একইভাবে, সমীকরণ (2) থেকে প্রাপ্ত $(3,-1), \left(\frac{1}{2},-3\right)$, $(-2,-5)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করে এদের পরপর সংযুক্ত করি। লেখটি একটি সরলরেখা।

মনে করি, সরলরেখাদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে। চিত্রে দেখা যায়, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{1}{2},-3\right)$

$\therefore$ সমাধান: $(x,y) = \left(\frac{1}{2},-3\right)$

উদাহরণ ১১. লেখের সাহায্যে সমাধান কর: $3-\frac{3}{2}x = 8-4x$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ $3-\frac{3}{2}x = 8-4x$

ধরি, $y = 3-\frac{3}{2}x = 8-4x$

$\therefore y = 3-\frac{3}{2}x \ldots (1)$

এবং $y = 8-4x \ldots (2)$

এখন, সমীকরণ (1) এ x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিম্নের ছকটি তৈরি করি:

x	-2	0	2
y	6	3	0

সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু $(-2,6), (0,3), (2,0)$

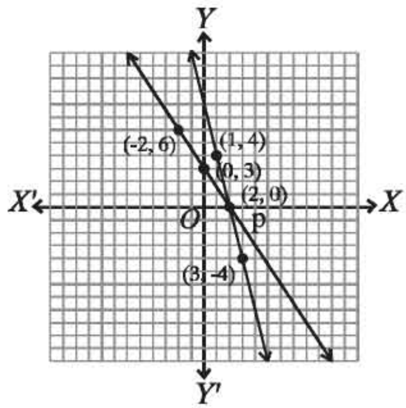
আবার, সমীকরণ (2) এ x-এর কয়েকটি মান নিয়ে y-এর অনুরূপ মান বের করি ও নিম্নের ছকটি তৈরি করি:

x	1	2	3
y	4	0	-4

$\therefore$ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু $(1,4),(2,0),(3,-4)$

মনে করি, XOX' ও YOY' যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরি। এখন, ছক কাগজে সমীকরণ (1) থেকে প্রাপ্ত $(-2,6),(0,3),(2,0)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও বিন্দুগুলো পরপর সংযুক্ত করি। তাহলে, লেখটি হবে একটি সরলরেখা।

একইভাবে, সমীকরণ (2) থেকে প্রাপ্ত $(1,4),(2,0),(3,-4)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করে এগুলো পরপর সংযুক্ত করি। তাহলে, লেখটি হবে একটি সরলরেখা।



মনে করি, সরলরেখাদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে। চিত্রে দেখা যায়, P ছেদবিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(2,0)$।

$\therefore$ সমাধান: $x = 2$

> **কাজ:** $2x - y - 3 = 0$ সমীকরণের লেখের উপর ছকের মাধ্যমে চারটি বিন্দু নির্ণয় কর। অত:পর ছক কাগজে নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের একক নিয়ে বিন্দুগুলো স্থাপন কর ও এদের পরস্পর সংযুক্ত কর। লেখটি কি সরলরেখা হয়েছে?

অনুশীলনী ১২.৩

লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর:

১. $3x + 4y = 14$
$4x - 3y = 2$

২. $2x - y = 1$
$5x + y = 13$

৩. $2x + 5y = 1$
$x + 3y = 2$

৪. $3x - 2y = 2$
$5x - 3y = 5$

৫. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2$
$2x + 3y = 13$

৬. $3x + y = 6$
$5x + 3y = 12$

৭. $3x + 2y = 4$
$3x - 4y = 1$

৮. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 3$
$x + \frac{y}{6} = 3$

৯. $3x + 2 = x - 2$

১০. $3x - 7 = 3 - 2x$

২০২২

বাস্তবভিত্তিক সমস্যার সহসমীকরণ গঠন ও সমাধান

দৈনন্দিন জীবনে এমন কিছু গাণিতিক সমস্যা আছে যা সমীকরণ গঠনের মাধ্যমে সমাধান করা সহজতর হয়। এ জন্য সমস্যার শর্ত বা শর্তাবলি থেকে দুইটি অজ্ঞাত রাশির জন্য দুইটি গাণিতিক প্রতীক, প্রধানত চলক x, y ধরা হয়। অজ্ঞাত রাশি দুইটির মান নির্ণয়ের জন্য দুইটি সমীকরণ গঠন করতে হয়। গঠিত সমীকরণদ্বয় সমাধান করলেই অজ্ঞাত রাশি দুইটির মান পাওয়া যায়।

উদাহরণ ১২. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোনো সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির সাথে 5 যোগ করলে যোগফল হবে সংখ্যাটির দশক স্থানীয় অঙ্কের তিনগুণ। আর সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যাবে, তা মূল সংখ্যাটি থেকে 9 কম হবে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, নির্ণেয় সংখ্যাটির দশক স্থানীয় অঙ্ক x এবং একক স্থানীয় অঙ্ক y। অতএব, সংখ্যাটি $10x + y$।

$\therefore$ ১ম শর্তানুসারে, $x + y + 5 = 3x \ldots (1)$

এবং ২য় শর্তানুসারে, $10y + x = (10x + y) - 9 \ldots (2)$

সমীকরণ (1) থেকে পাই, $y = 3x - x - 5$, বা, $y = 2x - 5 \ldots (3)$

আবার, সমীকরণ (2) থেকে পাই,

$10y - y + x - 10x + 9 = 0$

বা, $9y - 9x + 9 = 0$

বা, $y - x + 1 = 0$

বা, $2x - 5 - x + 1 = 0$ [(3) হতে y এর মান বসিয়ে পাই]

বা, $x = 4$

(3) এ x এর মান বসিয়ে পাই, $y = 2 \times 4 - 5 = 8 - 5 = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাটি হবে $10x + y = 10 \times 4 + 3 = 40 + 3 = 43$

উদাহরণ ১৩. আট বছর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের আটগুণ ছিল। দশ বছর পর পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হবে। বর্তমানে কার বয়স কত?

সমাধান: মনে করি, বর্তমানে পিতার বয়স x বছর ও পুত্রের বয়স y বছর।

$\therefore$ ১ম শর্তানুসারে, $x - 8 = 8(y - 8) \ldots (1)$

এবং ২য় শর্তানুসারে, $x + 10 = 2(y + 10) \ldots (2)$

(1) হতে পাই, $x - 8 = 8y - 64$

বা, $x = 8y - 64 + 8$

বা, $x = 8y - 56 \ldots (3)$

(2) হতে পাই, $x + 10 = 2y + 20$

বা, $8y - 56 + 10 = 2y + 20$ [(3) হতে x এর মান বসিয়ে]

বা, $8y - 2y = 20 + 56 - 10$

বা, $6y = 66$

বা, $y = 11$

(3) হতে পাই, $x = 8 \times 11 - 56 = 88 - 56 = 32$

$\therefore$ বর্তমানে পিতার বয়স 32 বছর ও পুত্রের বয়স 11 বছর।

উদাহরণ ১৪. একটি আয়তাকার বাগানের প্রস্থের দ্বিগুণ, দৈর্ঘ্য অপেক্ষা 10 মিটার বেশি এবং বাগানটির পরিসীমা 100 মিটার। বাগানটির সীমানার বাইরে চারদিকে 2 মিটার চওড়া রাস্তা আছে। রাস্তাটি ইট দিয়ে তৈরি করতে প্রতি বর্গ মিটারে 110 টাকা খরচ হয়।

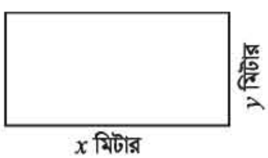
ক) বাগানটির দৈর্ঘ্য x মিটার ও প্রস্থ y মিটার ধরে সমীকরণজোট গঠন কর।

খ) বাগানটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

গ) রাস্তাটি ইট দিয়ে তৈরি করতে মোট কত খরচ হবে?

সমাধান:

ক) আয়তাকার বাগানটির দৈর্ঘ্য x মিটার ও প্রস্থ y মিটার।



$\therefore$ ১ম শর্তানুসারে, $2y = x + 10 \ldots (1)$

এবং ২য় শর্তানুসারে, $2(x + y) = 100 \ldots (2)$

খ) সমীকরণ (2) হতে পাই, $2x + 2y = 100$

বা, $2x + x + 10 = 100$ [(1) হতে $2y$ এর মান বসিয়ে]

বা, $3x = 90$

বা, $x = 30$

$\therefore (1)$ হতে পাই, $2y = 30 + 10$ [x এর মান বসিয়ে]

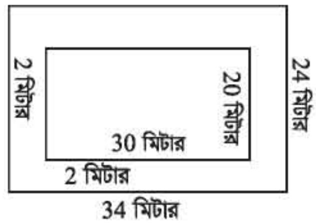
২০২২

বা, $2y = 40$

বা, $y = 20$

$\therefore$ বাগানটির দৈর্ঘ্য 30 মিটার ও প্রস্থ 20 মিটার।

গ) রাস্তাসহ বাগানের দৈর্ঘ্য = $(30 + 4)$ মি. $= 34$ মি.
এবং রাস্তাসহ বাগানের প্রস্থ = $(20 + 4)$ মি. $= 24$ মি.
$\therefore$ রাস্তার ক্ষেত্রফল = রাস্তাসহ বাগানের ক্ষেত্রফল - বাগানের ক্ষেত্রফল



= $(34 \times 24 - 30 \times 20)$ বর্গমিটার।
= $(816 - 600)$ বর্গমিটার।
= 216 বর্গমিটার।

$\therefore$ ইট দিয়ে রাস্তা তৈরি করার খরচ = (216×110) টাকা = 23760 টাকা

উদাহরণ ১৫. ঘড়ির ঘণ্টা ও মিনিটের কাঁটা কতবার একটির উপরে আরেকটি বসে? সময়গুলো নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, x টা y মিনিটে ঘণ্টা ও মিনিটের কাঁটা একটি আরেকটির উপরে বসে। মনে রাখতে হবে x (সুবিধার্থে $x = 0, 1, \cdots 11$ যেখানে 0 প্রকৃতপক্ষে 12 বোঝাবে) পূর্ণসংখ্যা হলেও y কিন্তু পূর্ণসংখ্যা নাও হতে পারে। আমরা জানি মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটার তুলনায় 12 গুণ বেশি দ্রুত চলে। x টার সময় ঘণ্টার কাঁটা ঠিক x লেখার উপরে এবং মিনিটের কাঁটা 12 এর উপরে ছিল। y মিনিটে ঘণ্টার কাঁটা $\frac{y}{12}$ এবং মিনিটের কাঁটা y ঘর অতিক্রম করবে। তাই

$5x + \frac{y}{12} = y$

বা, $y - \frac{y}{12} = 5x$

বা, $\frac{11}{12}y = 5x$

$\therefore y = \frac{60}{11}x$

এবার আমরা x এর সম্ভাব্য মানগুলো বসিয়ে দেখি।

$x = 0$ হলে $y = 0$ মিনিট অর্থাৎ 12 টা।

$x = 1$ হলে 1 টা $5\frac{5}{11}$ মিনিট।

$x = 2$ হলে 2 টা $10\frac{10}{11}$ মিনিট।

$\cdots \cdots \cdots$

$x = 11$ হলে 11 টা 60 মিনিট বা 12 টা।

প্রথম ও শেষ সময় দুইটি একই সময় বলে কাঁটা দুইটি 11 বার মিলিত হবে এবং সময়গুলো হলো x টা $\frac{60}{11}x$ মিনিট।

কাজ: ABC ত্রিভুজে $\angle B = 2x^\circ$, $\angle C = x^\circ$, $\angle A = y^\circ$ এবং $\angle A = \angle B + \angle C$ হলে, x ও y এর মান নির্ণয় কর।

অনুশীলনী ১২.৪

১. নিচের কোন শর্তে $ax+by+c=0$ ও $px+qy+r=0$ সমীকরণজোটটি সমঞ্জস ও পরস্পর অনির্ভরশীল হবে?

ক) $\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q}$ খ) $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$ গ) $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}$ ঘ) $\frac{a}{p} = \frac{b}{q}$

২. $x+y=4,\ x-y=2$ হলে (x,y) এর মান নিচের কোনটি?

ক) $(2,4)$ খ) $(4,2)$ গ) $(3,1)$ ঘ) $(1,3)$

৩. $x+y=6$ ও $2x=4$ হলে, y মান কত?

ক) 2 খ) 4 গ) 6 ঘ) 8

৪. নিচের কোনটির জন্য নিম্নের ছকটি সঠিক?

x	0	2	4
y	-4	0	4

ক) $y=x-4$ খ) $y=8-x$ গ) $y=4-2x$ ঘ) $y=2x-4$

৫. $2x-y=8$ এবং $x-2y=4$ হলে, $x+y$ = কত?

ক) 0 খ) 4 গ) 8 ঘ) 12

৬. $x-y-4=0$ এবং $3x-3y-10=0$ সমীকরণদ্বয়

(i) পরস্পর নির্ভরশীল।

(ii) পরস্পর সমঞ্জস।

(iii) এর কোনো সমাধান নেই।

উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক?

ক) ii খ) iii গ) i ও iii ঘ) ii ও iii

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে ৭-৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

আয়তাকার একটি ঘরের মেঝের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ অপেক্ষা 2 মিটার বেশি এবং মেঝের পরিসীমা 20 মিটার। ঘরটির মেঝে মোজাইক করতে প্রতি বর্গমিটারে 900 টাকা খরচ হয়। ২০২২

৭. ঘরটির মেঝের দৈর্ঘ্য কত মিটার?

ক) 10 খ) 8 গ) 6 ঘ) 4

৮. ঘরটির মেঝের ক্ষেত্রফল কত বর্গমিটার?

ক) 24 খ) 32 গ) 48 ঘ) 80

৯. ঘরটির মেঝে মোজাইক করতে মোট কত খরচ হবে?

ক) 72000 খ) 43200 গ) 28800 ঘ) 21600

সহসমীকরণ গঠন করে সমাধান কর (১০-১৭):

১০. কোনো ভগ্নাংশের লব ও হরের প্রত্যেকটির সাথে 1 যোগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{4}{5}$ হবে। আবার, লব ও হরের প্রত্যেকটি থেকে 5 বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$ হবে। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

১১. কোনো ভগ্নাংশের লব থেকে 1 বিয়োগ ও হরের সাথে 2 যোগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$ হয়। আর লব থেকে 7 বিয়োগ এবং হর থেকে 2 বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{3}$ হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

১২. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক দশক স্থানীয় অঙ্কের তিনগুণ অপেক্ষা 1 বেশি। কিন্তু অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায়, তা অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির আটগুণের সমান। সংখ্যাটি কত?

১৩. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের অন্তর 4। সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায়, তার ও মূল সংখ্যাটির যোগফল 110। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

১৪. মাতার বর্তমান বয়স তার দুই কন্যার বয়সের সমষ্টির চারগুণ। 5 বছর পর মাতার বয়স ঐ দুই কন্যার বয়সের সমষ্টির দ্বিগুণ হবে। মাতার বর্তমান বয়স কত?

১৫. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 5 মিটার কম ও প্রস্থ 3 মিটার বেশি হলে ক্ষেত্রফল 9 বর্গমিটার কম হবে। আবার দৈর্ঘ্য 3 মিটার বেশি ও প্রস্থ 2 মিটার বেশি হলে ক্ষেত্রফল 67 বর্গমিটার বেশি হবে। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

১৬. একটি নৌকা দাঁড় বেয়ে স্রোতের অনুকূলে ঘণ্টায় 15 কি.মি. যায় এবং স্রোতের প্রতিকূলে যায় ঘণ্টায় 5 কি.মি.। নৌকার বেগ নির্ণয় কর।

১৭. একজন গার্মেন্টস শ্রমিক মাসিক বেতনে চাকরি করেন। প্রতিবছর শেষে একটি নির্দিষ্ট বেতনবৃদ্ধি পান। তার মাসিক বেতন 4 বছর পর 4500 টাকা ও 8 বছর পর 5000 টাকা হয়। তার চাকরি শুরুর বেতন ও বার্ষিক বেতন বৃদ্ধির পরিমাণ নির্ণয় কর।

১৮. একটি সরল সমীকরণজোট $x + y = 10, 3x - 2y = 0$

ক) দেখাও যে, সমীকরণজোটটি সমঞ্জস। এর কয়টি সমাধান আছে?

খ) সমীকরণজোটটি সমাধান করে (x, y) নির্ণয় কর।

গ) সমীকরণদ্বয় দ্বারা নির্দেশিত সরলরেখাদ্বয় x-অক্ষের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

২০২২

১৯. কোনো ভগ্নাংশের লবের সাথে 7 যোগ করলে ভগ্নাংশটির মান পূর্ণসংখ্যা 2 হয়। আবার হর হতে 2 বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটির মান পূর্ণসংখ্যা 1 হয়।

ক) ভগ্নাংশটি $\frac{x}{y}$ ধরে সমীকরণজোট গঠন কর।

খ) সমীকরণজোটটি আড়গুণন পদ্ধতিতে সমাধান করে (x, y) নির্ণয় কর। ভগ্নাংশটি কত?

গ) সমীকরণজোটটির লেখ অঙ্কন করে (x, y) এর প্রাপ্ত মানের সত্যতা যাচাই কর।

২০. দুইটি বহুভুজের বাহুর সংখ্যা 17 এবং এদের কর্ণের সংখ্যা 53 হলে প্রত্যেক বহুভুজের বাহুর সংখ্যা কত?

২১. শিক্ষক বললেন একটি কাজ একা অথবা ছাত্র-ছাত্রীর জুটি করতে পারবে। ছাত্রদের $\frac{2}{3}$ এবং ছাত্রীদের $\frac{3}{5}$ অংশ জুটি বেঁধে কাজটি করলো। শ্রেণির কত ভাগ ছাত্র-ছাত্রী একা কাজটি করলো?

২২. 100 ও 200 মিটার দীর্ঘ দুইটি ট্রেন সমবেগে সামনা সামনি অতিক্রম করতে 5 সেকেন্ড সময় লাগে কিন্তু একই দিকে চললে অতিক্রম করতে 15 সেকেন্ড সময় লাগে। ট্রেন দুইটির বেগ নির্ণয় কর।

২৩. কমপক্ষে কতগুলো ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা নিলে তার গুণফল অবশ্যই 5040 দ্বারা বিভাজ্য হবে?

২৪. ঘড়ির ঘণ্টা এবং মিনিটের কাঁটা পরস্পরের সঙ্গে 30 ডিগ্রি কোণ করে কত বার? সময়গুলো নির্ণয় কর।