পরিমাপে ত্রিকোণমিতি

১. $\cos\theta = {}^3/_4$ হলে, θ কোণের অন্যান্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো নির্ণয় করো।

সমাধানঃ

আমরা জানি, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

বা, $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

বা, $\sin^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$ [$\cos\theta = \frac{3}{4}$; দেওয়া আছে]

বা, $\sin^2\theta = 1 - \frac{9}{16}$

বা, $\sin^2\theta = \frac{7}{16}$

$\therefore \sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$

আবার,

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

বা, $\tan\theta = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{3}{4}}$

$\therefore \tan\theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$

আবার,

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

বা, $\cot\theta = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{3}}$

$\therefore \cot\theta = \frac{3}{\sqrt{7}}$

আবার,

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

বা, $\sec\theta = \frac{1}{\frac{3}{4}}$

$\therefore \sec\theta = \frac{4}{3}$

আবার,

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

বা, $\csc\theta = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{4}}$

$\therefore \csc\theta = \frac{4}{\sqrt{7}}$

২. $12\cot\theta = 7$ হলে $\cos\theta$ ও $\csc\theta$ এর মান বের করো।

সমাধানঃ $12\cot\theta = 7$

বা, $\cot\theta = {}^7/_{12}$

বা, $\tan\theta = {}^{12}/_7$

বা, ${}^{\sin\theta}/_{\cos\theta} = {}^{12}/_7$

বা, $12\cos\theta = 7\sin\theta$

বা, $144\cos^2\theta = 49\sin^2\theta$ [বর্গ করে] ...... (i)

বা, $144\cos^2\theta = 49(1-\cos^2\theta)$ [$\because \sin^2\theta+\cos^2\theta = 1$]

বা, $144\cos^2\theta = 49 - 49\cos^2\theta$

বা, $144\cos^2\theta + 49\cos^2\theta = 49$

বা, $193\cos^2\theta = 49$

বা, $\cos^2\theta = {}^{49}/_{193}$

$\therefore \cos\theta = {}^7/_{\sqrt{193}}$

আবার, (i) নং থেকে পাই,

$144(1-\sin^2\theta) = 49\sin^2\theta$

বা, $144 - 144\sin^2\theta = 49\sin^2\theta$

বা, $144 = 49\sin^2\theta + 144\sin^2\theta$

বা, $144 = 193\sin^2\theta$

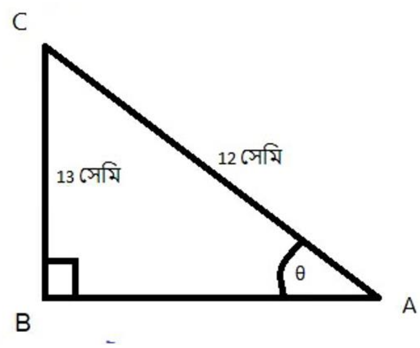
বা, $\sin^2\theta = {}^{144}/_{193}$

বা, $\csc^2\theta = {}^{193}/_{144}$

$\therefore \csc\theta = {}^{\sqrt{193}}/_{12}$

৩. ΔABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B = 90°$, AC = 12 সেমি, BC = 13 সেমি এবং $\angle BAC = \theta$ হলে, $\sin\theta$, $\sec\theta$ ও $\tan\theta$ এর মান বের করো।

সমাধানঃ



দেওয়া আছে,

ΔABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B = 90°$, $AC = 12$ সেমি, $BC = 13$ সেমি এবং $\angle BAC = \theta$। $\sin\theta$, $\sec\theta$ ও $\tan\theta$ এর মান বের করতে হবে।

পিথাগোরাসের সূত্র মতে,

$AC^2 = BC^2 + AB^2$

বা, $AB^2 = AC^2 - BC^2$

বা, $AB^2 = 12^2 - 13^2$

বা, $AB^2 = 144 - 169$

বা, $AB^2 = -25$

বিদ্রঃ AB^2 এর মান -25 হতে পারে না, উল্লেক্ষ্য প্রশ্নে অতিভুজ $AC < CB$ যা গ্রহনযোগ্য নয়। সেক্ষেত্রে আমরা এখানে $AC = 13$ সেমি ও $BC = 12$ সেমি ধরে হিসাব করে পাই (তোমাদের মতামত আমাদের জানিও):-

$AB^2 = 25$

বা, $AB = 5$

$\because \sin\theta = {}^{\text{বিপরীত বাহু}}/_{\text{অতিভুজ}}$

বা, $\sin\theta = {}^{BC}/_{AC}$

বা, $\sin\theta = {}^{12}/_{13}$

আবার,

$\sec\theta = {}^{\text{অতিভুজ}}/_{\text{সন্নিহিত বাহু}}$

বা, $\sec\theta = {}^{AC}/_{AB}$

বা, $\sec\theta = {}^{13}/_{5}$

ও

$\tan\theta = {}^{\text{বিপরীত বাহু}}/_{\text{সন্নিহিত বাহু}}$

বা, $\tan\theta = {}^{BC}/_{AB}$

বা, $\sec\theta = {}^{12}/_{5}$

8. $\theta = 30°$ হলে, দেখাও যে,

(i) $\cos^2\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

সমাধানঃ $\theta = 30°$ হলে, $\tan\theta = \tan 30° = {}^{1}/_{\sqrt{3}}$

এখন, ডানপক্ষ

$$= \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$= \frac{1-\tan^2 30°}{1+\tan^2 30°}$$

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{2}$$

আবার, বামপক্ষ

$= \cos 2\theta$

$= \cos 2\times 30°$

$= \cos 60°$

$$= \frac{1}{2}$$

অতএব, বামপক্ষ = ডানপক্ষ [দেখানো হলো]

(ii) $\tan^2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

সমাধানঃ

$\theta = 30°$ হলে, $\tan\theta = \tan 30° = {}^{1}/_{\sqrt{3}}$

এখন, ডানপক্ষ

$$= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$= \frac{2\tan 30°}{1-\tan^2 30°}$$

$$= \frac{2\times\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}.\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$= \sqrt{3}$

আবার,

বামপক্ষ

$= \tan 2\theta$

$= \tan 2 \times 30°$

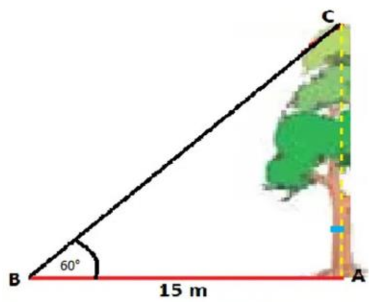
$= \tan 60°$

$= \sqrt{3}$

অতএব, বামপক্ষ = ডানপক্ষ [দেখানো হলো]

৫. একটি গাছের পাদদেশ হতে 15 মিটার দূরে ভূ-তলের কোনো বিন্দুতে গাছের শীর্ষবিন্দুর উন্নতি কোণ 60° হলে, গাছটির উচ্চতা নির্ণয় করো।

সমাধানঃ



চিত্র অনুসারে,

A হলো গাছের পাদদেশ এবং A হতে B এর দূরত্ব = AB = 15 মিটার এবং B বিন্দুতে উন্নতি কোণ ∠ABC = 60°.

তাহলে,

$\tan 60° = {}^{AC}/_{AB}$

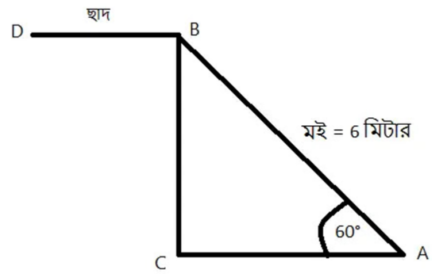
বা, $\sqrt{3} = {}^{AC}/_{15}$

বা, $AC = 15\times\sqrt{3} = 25.981$ (প্রায়)

অর্থাৎ, গাছটির উচ্চতা 25.981 মিটার (প্রায়)।

৬. 6 মিটার দৈর্ঘ্যের একটি মই ভূমির সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে ছাদ স্পর্শ করে আছে। ছাদের উচ্চতা নির্ণয় করো।

সমাধানঃ



আমাদের অঙ্কিত মডেল চিত্র অনুসারে,

AB = মই যার দৈর্ঘ্য 6 মিটার

AC = ভূমি

CB = ভূমি হতে ছাদের দূরত্ব

$\angle ABC = 60°$

এখন, আমরা জানি,

$\cos\theta = {}^{\text{অতিভূজ}}/_{\text{বিপরীত বাহু}}$

অর্থাৎ, ΔABC-এ

$\cos 60° = {}^{AB}/_{CB}$

বা, $½ = {}^{6}/_{CB}$ [$\because \cos 60° = ½$]

বা, $2\times 6 = CB$

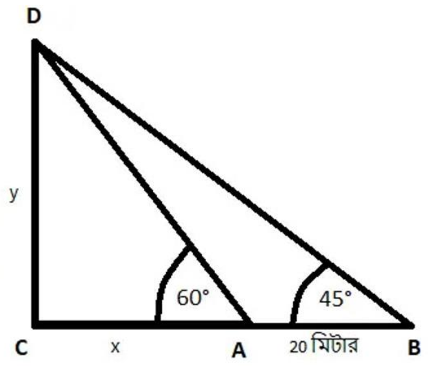
বা, $CB = 12$

∴ ছাদের উচ্চতা = 12 মিটার।

৭. ভূতলের কোনো একটি স্থান থেকে একটি মিনারের শীর্ষবিন্দুর উন্নতি কোণ 60° । ওই স্থান থেকে 20 মিটার পিছিয়ে গেলে মিনারের উন্নতি কোণ হয় 45°। মিনারটির উচ্চতা নির্ণয় করো।

সমাধানঃ

প্রদত্ত গাণিতিক প্রশ্ন হতে আমরা নিম্নোক্ত মডেল চিত্রটি অঙ্কন করি।



যেখানে,

CD = y = মিনারের উচ্চতা

∠CAD = 60° = ভূতলের A বিন্দুতে উন্নতি কোণ

∠CBD = 45° = ভূতলের B বিন্দুতে উন্নতি কোণ

AB = 20 মিটার

CA = x মিটার (ধরে)

তাহলে,

$\tan 60° = {}^{CD}/_{CA}$

বা, $\sqrt{3} = {}^{y}/_{x}$ [$\because \tan 60° = \sqrt{3}$]

বা, $y = \sqrt{3}x$ ...... (i)

আবার,

$\tan 45° = {}^{CD}/_{CB}$

বা, $1 = {}^{y}/_{(x+20)}$ [$\because \tan 45° = 1$]

বা, $y = x+20$......(ii)

এখন, (i) ও (ii) হতে পাই,

$\sqrt{3}x = x+20$

বা, $\sqrt{3}x - x = 20$

বা, $x(\sqrt{3}-1) = 20$

বা, $x = {}^{20}/_{(\sqrt{3}-1)}$

বা, x = 27.3205 (প্রায়)

এখন, x = 27.3205, (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$y = \sqrt{3} \times 27.3205$

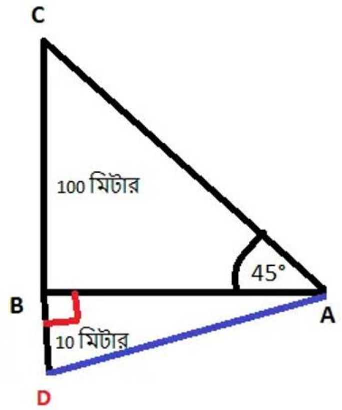
∵ y = 47.3205 (প্রায়)

∵ মিনারটির উচ্চতা 47.3205 মিটার (প্রায়)।

৮. একটি নদীর তীরে দাড়িয়ে একজন লোক দেখলো যে, ঠিক সোজাসুজি নদীর অপর তীরে 100 মিটার উঁচু একটি টাওয়ারের শীর্ষের উন্নতি কোণ 45°। লোকটি টাওয়ার বরাবর নৌকা পথে যাত্রা শুরু করল। কিন্তু পানির স্রোতের কারণে নৌকাটি টাওয়ার থেকে 10 মিটার দূরে তীরে পৌঁছাল। লোকটির যাত্রা স্থান থেকে গন্তব্য স্থানের দূরত্ব নির্ণয় করো।

সমাধানঃ

প্রদত্ত গাণিতিক প্রশ্ন হতে আমরা নিন্মোক্ত মডেল চিত্রটি অঙ্কন করি।



যেখানে,

A ও B হলো প্রদত্ত নদীর দুই তীরের দুইটি বিন্দু এবং A বিন্দুতে লোকটি দাঁড়িয়ে আছে।

∵ AB = নদীর প্রস্থ

BC = 100 মিটার = প্রদত্ত টাওয়ারের উচ্চতা

∠BAC = 45° = তীরের A বিন্দুতে উন্নতি কোণ

D হলো B থেকে 10 মিটার দূরের তীরের একটি বিন্দু যেখানে লোকটি নৌকা নিয়ে পৌছায়।

∵ BD = 10 মিটার

AD = ?

তাহলে, $\tan 45° = {}^{BC}/_{BA}$ [$\because \tan 45° = 1$]

বা, $1 = {}^{BC}/_{BA}$

বা, BC = BA

বা, BA = 100 [মান বসিয়ে]

এখন,

$AD^2 = AB^2 + BD^2$

বা, $AD^2 = 100^2 + 10^2$

বা, $AD^2 = 10100$

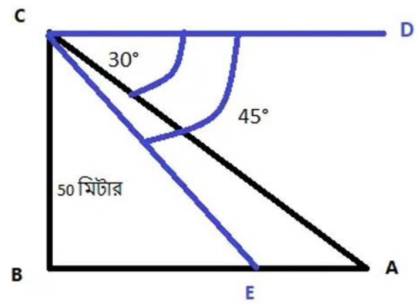
∵ AD = 100.4987 (প্রায়) [বর্গমূল করে]

লোকটির যাত্রা স্থান থেকে গন্তব্য স্থানের দূরত্ব100.4987 মিটার (প্রায়)।

৯. সাগরের তীরে একটি টাওয়ারের উপর থেকে একজন লোক সাগর পর্যবেক্ষণের সময় দেখলো যে একটি জাহাজ বন্দরের দিকে আসছে। তখন জাহাজটির অবনতি কোণ ছিল 30°. কিছুক্ষণ পরে লোকটি দেখলো জাহাজটির অবনতি কোণ 45°. যদি টাওয়ারের উচ্চতা 50 মিটার হয়, তবে এই সময়ে জাহাজটি কত দূরত্ব অতিক্রম করেছে?

সমাধানঃ

প্রদত্ত গাণিতিক প্রশ্ন হতে আমরা নিম্নোক্ত মডেল চিত্রটি অঙ্কন করি।



যেখানে,

BC = 50 মিটার = প্রদত্ত টাওয়ারের উচ্চতা

$\angle ACD = 30°$ = A বিন্দুতে জাহাজের অবস্থানের অবনতি কোণ

$\angle BEC = 45°$ = E বিন্দুতে জাহাজের অবস্থানের অবনতি কোণ

AE = ?

এখন, মডেল চিত্র অনুসারে,

CD||AB ও AC সাধারন বাহু

$\because \angle ACD = \angle CAB$ [একান্তর কোন]

বা, $\angle CAB = 30°$ [মান বসিয়ে]

তাহলে,

$\tan 30° = {}^{BC}/_{AB}$

বা, ${}^{1}/_{\sqrt{3}} = {}^{50}/_{AB}$ $[\because \tan 30° = {}^{1}/_{\sqrt{3}}]$

বা, $AB = 50.\sqrt{3}$

বা, $BE + AE = 50.\sqrt{3}$......(i)

আবার,

CD||BE ও EC সাধারন বাহু

$\because \angle DCE = \angle BEC$ [একান্তর কোন]

বা, $\angle BEC = 45°$ [মান বসিয়ে]

তাহলে, $\tan 45° = {}^{BC}/_{BE}$

বা, $1 = {}^{50}/_{BE}$ $[\because \tan 45° = 1]$

বা, BE =50......(ii)

এখন, BE =50; (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$50 + AE = 50.\sqrt{3}$

বা, $AE = 50.\sqrt{3} - 50$

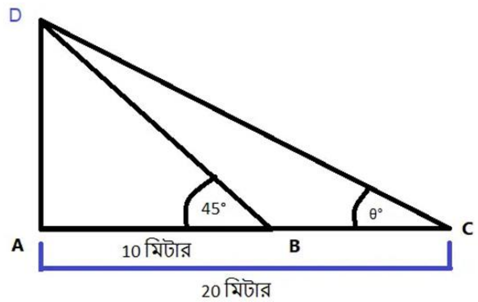
$\because AE = 36.6025$ (প্রায়)

$\because$ জাহাজটির অতিক্রান্ত দূরত্ব = 36.6025 মিটার (প্রায়)

১০. তোমার প্রতিষ্ঠানের অফিস ভবন থেকে 10 মিটার দূরে ওই ভবনের উন্নতি কোণ 45° এবং 20 মিটার দূর থেকে ওই ভবনের উন্নতি কোণ θ° হলে, sinθ ও cosθ-এর মান নির্ণয় করো।

সমাধানঃ

প্রদত্ত গাণিতিক প্রশ্ন হতে আমরা নিম্নোক্ত মডেল চিত্রটি অঙ্কন করি।



যেখানে,

A বিন্দুতে অফিস ভবন অবস্থিত

AB = 10 মিটার

AC = 20 মিটার

$\angle ABD = 45°$ = A বিন্দুতে উন্নতি কোণ

$\angle ACD = \theta°$ = C বিন্দুতে উন্নতি কোণ

$\sin\theta$ = ? ও $\cos\theta$ = ?

এখন, মডেল চিত্র অনুসারে,

$\tan 45° = {}^{AD}/_{AB}$

বা, $1 = {}^{AD}/_{AB}$ $[\because \tan 45° = 1]$

বা, $AD = AB$

বা, $AD = 10$ .....(i) [মান বসিয়ে]

আবার,

$\tan\theta^\circ = {}^{AD}/_{AC}$

বা, $\tan\theta^\circ = {}^{10}/_{20}$ [মান বসিয়ে]

বা, $\tan\theta^\circ = \frac{1}{2}$

বা, ${}^{\sin\theta^\circ}/_{\cos\theta^\circ} = \frac{1}{2}$ [$\because \tan\theta^\circ = {}^{\sin\theta^\circ}/_{\cos\theta^\circ}$]

বা, $\cos\theta^\circ = 2\sin\theta^\circ$

বা, $\cos^2\theta^\circ = 4\sin^2\theta^\circ$ [বর্গ করে]

বা, $\cos^2\theta^\circ = 4(1-\cos^2\theta^\circ)$ [$\because \sin^2\theta^\circ+\cos^2\theta^\circ=1$]

বা, $\cos^2\theta^\circ = 4 - 4\cos^2\theta^\circ$

বা, $\cos^2\theta^\circ+4\cos^2\theta^\circ = 4$

বা, $5\cos^2\theta^\circ = 4$

বা, $\cos^2\theta^\circ = {}^{4}/_{5}$ .....(ii)

বা, $\cos\theta^\circ = {}^{4}/_{\sqrt{5}}$ [বর্গমূল করে]

আবার, (ii) নং হতে পাই,

$1-\sin^2\theta^\circ = {}^{4}/_{5}$ [$\because \sin^2\theta^\circ+\cos^2\theta^\circ=1$]

বা, $-\sin^2\theta^\circ = {}^{4}/_{5}-1$

বা, $-\sin^2\theta^\circ = {}^{-1}/_{5}$

বা, $\sin^2\theta^\circ = {}^{1}/_{5}$

বা, $\sin\theta^\circ = {}^{1}/_{\sqrt{5}}$ [বর্গমূল করে]

$\because \sin\theta = {}^{1}/_{\sqrt{5}}$ ও $\cos\theta = {}^{4}/_{\sqrt{5}}$