বাস্তব সমস্যা সমাধানে সহসমীকরণ

1. সহসমীকরণ $a_1x + b_1y = c_1$, $a_2x + b_2y = c_2$ এর সাথে তুলনা করে নিচের ছকের খালি ঘরগুলো পূরণ করো।

ক্রমিক নং	সমীকরণ জোট	a_1/a_2	b_1/b_2	c_1/c_2	অনুপাত গুলোর তুলনা	লেখচিত্রে অবস্থান	সমঞ্জস/ অসমঞ্জস	বীজগাণিতিক সিদ্ধান্ত
(i)	x+3y=1 2x+6y=2	½	$^3/_6$ = ½	½	a_1/a_2 $=b_1/b_2=c_1/c_2$	দুইটি সমাপতিত সরলরেখা	সমঞ্জস	অসংখ্য সাধারণ সমাধান আছে
(ii)	2x-5y=3 x+3y=1	2	$^{-5}/_3$	3	a_1/a_2 $\neq b_1/b_2$	দুইটি পরস্পর ছেদী সরলরেখা	সমঞ্জস	একটি মাত্র সাধারণ সমাধান আছে
(iii)	2x-4y=7 x-3y=-2	2	$^4/_3$	$^7/_{-2}$	a_1/a_2 $\neq b_1/b_2$	দুইটি পরস্পর ছেদী সরলরেখা	সমঞ্জস	একটি মাত্র সাধারণ সমাধান আছে
(iv)	-½x-y=0 x-2y=1	-½	½	0	a_1/a_2 $\neq b_1/b_2$	দুইটি পরস্পর ছেদী সরলরেখা	সমঞ্জস	একটি মাত্র সাধারণ সমাধান আছে

2. নিচের প্রতিজোড়া সমীকরণগুলোর মধ্যে যেগুলো সমাধানযোগ্য তাদের লেখচিত্র এঁকে সমাধান করো এবং অসংখ্য সমাধানের ক্ষেত্রে কমপক্ষে তিনটি সমাধান লেখো।

(i)

$2x + y = 8$

$2x - 2y = 5$

সমাধানঃ

সহসমীকরণ $a_1x + b_1y = c_1$, $a_2x + b_2y = c_2$ এর সাথে প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়কে তুলনা করে পাই,

$a_1/a_2 = {}^2/_2 = 1$

$b_1/b_2 = {}^1/_{-2} = -½$

$c_1/c_2 = {}^8/_5$

অর্থাৎ, $a_1/a_2 \neq b_1/b_2$

∵ সমীকরণদ্বয়ের একটি মাত্র সমাধান আছে বা এটি সমাধানযোগ্য।

লেখচিত্র এঁকে সমাধানঃ

$2x + y = 8$

বা, $y = 8 - 2x$ ......(i)

এখন, (i) নং এ x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর কয়েকটি মান নির্ণয় করি।

ছক-১

x এর মান	y এর মান
1	6
2	4
3	2

আবার,

$2x - 2y = 5$

বা, $-2y = 5-2x$

বা, $2y = 2x-5$

বা, $y = (2x-5)/2$......(ii)

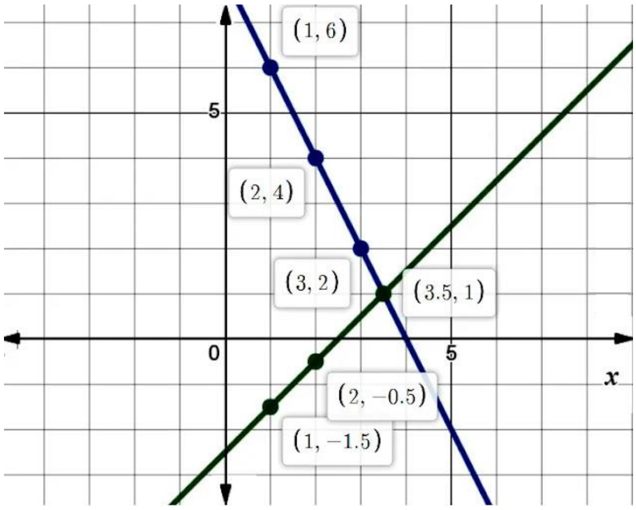
এখন, (ii) নং এ x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর কয়েকটি মান নির্ণয় করি।

ছক-২

x এর মান	y এর মান
1	-1.5
2	-0.5
3.5	1

এবার ছক কাগজে x ও y অক্ষ বরাবর প্রতি বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে এক একক ধরে ছক-১ এর জন্য (1,6), (2,4) ও (3,2) এবং ছক-২ এর জন্য (1,-1.5), (2,-0.5) ও (3.5,1) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। ছক-১ এর স্থাপিত বিন্দুগুলো সংযুক্ত করি ফলত

একটি সরলরেখা পাই এবং ছক-২ এর স্থাপিত বিন্দুগুলো সংযুক্ত করি ফলত আরেকটি সরলরেখা পাই।



উৎপন্ন সরলরেখাদ্বয় পরস্পরকে (3.5,1) বিন্দুতে ছেদ করে।

অতএব, নির্ণেয় সমাধানঃ $(x,y)=(1, ^7/_2)$

(ii)

$2x + 5y = -14$

$4x - 5y = 17$

সমাধানঃ

সহসমীকরণ $a_1x + b_1y = c_1$, $a_2x + b_2y = c_2$ এর সাথে প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়কে তুলনা করে পাই,

$a_1/a_2 = ^2/_4 = ½$

$b_1/b_2 = ^5/_{-5} = -1$

$c_1/c_2 = ^{-14}/_{17}$

অর্থাৎ, $a_1/a_2 \neq b_1/b_2$

∵ সমীকরণদ্বয়ের একটি মাত্র সমাধান আছে বা এটি সমাধানযোগ্য।

লেখচিত্র এঁকে সমাধানঃ

$2x + 5y = -14$

বা, $5y = -14 - 2x$

বা, $y = (-14-2x)/5$ ....(i)

এখন, (i) নং এ x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর কয়েকটি মান নির্ণয় করি।

ছক-১

x এর মান	y এর মান
-7	0
-2	-2
0.5	-3

আবার,

$4x - 5y = 17$

বা, $-5y = 17-4x$

বা, $5y = 4x-17$

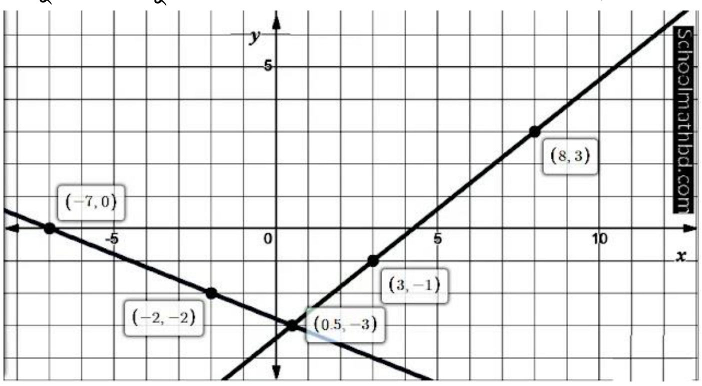
বা, $y = (4x-17)/5$......(ii)

এখন, (ii) নং এ x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর কয়েকটি মান নির্ণয় করি।

ছক-২

x এর মান	y এর মান
0.5	-3
3	-1
8	3

এবার ছক কাগজে x ও y অক্ষ বরাবর প্রতি বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে এক একক ধরে ছক-১ এর জন্য (-7,0), (-2,-2) ও (0.5,-3) এবং ছক-২ এর জন্য (0.5,-3), (3,-1) ও (8,3) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। ছক-১ এর স্থাপিত বিন্দুগুলো সংযুক্ত করি ফলত একটি সরলরেখা পাই এবং ছক-২ এর স্থাপিত বিন্দুগুলো সংযুক্ত করি ফলত আরেকটি সরলরেখা পাই।



উৎপন্ন সরলরেখাদ্বয় পরস্পরকে (0.5,-3) বিন্দুতে ছেদ করে।

অতএব, নির্ণেয় সমাধানঃ (x,y)=(0.5,-3)

(iii)

$^x/_2 + ^y/_3 = 8$

$^{5x}/_4 - 3y = -3$

সমাধানঃ

Playstore Link: https://play.google.com/store/apps/dev?id=4840459759776483209

সহসমীকরণ $a_1x + b_1y = c_1$, $a_2x + b_2y = c_2$ এর সাথে প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়কে তুলনা করে পাই,

$a_1/a_2 = ½ ÷ {}^{5}/_{4} = {}^{2}/_{5}$

$b_1/b_2 = {}^{1}/_{3} ÷ -3 = -{}^{1}/_{9}$

$c_1/c_2 = -{}^{8}/_{3}$

অর্থাৎ, $a_1/a_2 \neq b_1/b_2$

∵ সমীকরণদ্বয়ের একটি মাত্র সমাধান আছে বা এটি সমাধানযোগ্য।

লেখচিত্র এঁকে সমাধানঃ

${}^{x}/_{2}+{}^{y}/_{3}=8$

বা, $3x+2y=48$ [6 দ্বারা গুণ করে]

বা, $2y = 48-3x$

বা, $y = (48-3x)/2$.......(i)

এখন, (i) নং এ x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর কয়েকটি মান নির্ণয় করি।

ছক-১

x এর মান	y এর মান
10	9
8	12
12	6

আবার,

${}^{5x}/_{4}-3y=-3$

বা, $5x-12y=-12$

বা, $-12y = -12-5x$

বা, $12y = 12+5x$

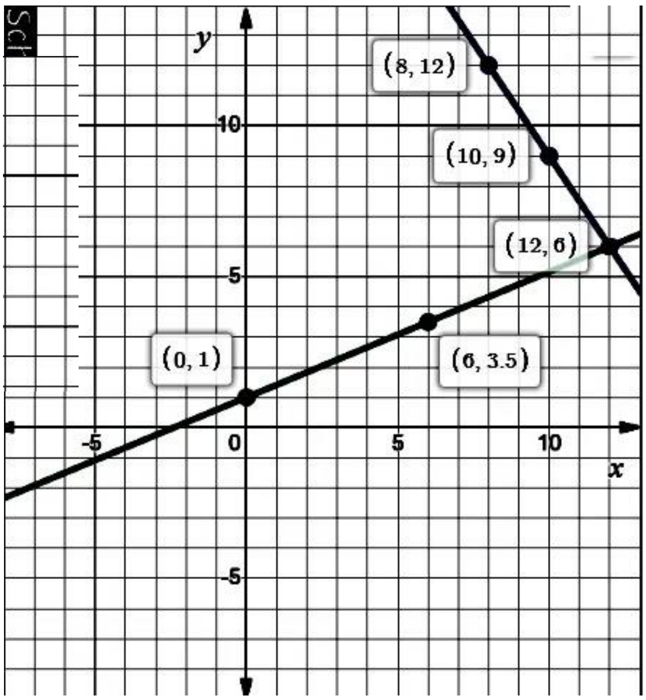
বা, $y = (12+5x)/12$......(ii)

এখন, (ii) নং এ x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর কয়েকটি মান নির্ণয় করি।

ছক-২

x এর মান	y এর মান
12	6
6	3.5
0	1

এবার ছক কাগজে x ও y অক্ষ বরাবর প্রতি বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে এক একক ধরে ছক-১ এর জন্য (10,9), (8,12) ও (12,6) এবং ছক-২ এর জন্য (12,6), (6,3.5) ও (0,1) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। ছক-১ এর স্থাপিত বিন্দুগুলো সংযুক্ত করি ফলত একটি সরলরেখা পাই এবং ছক-২ এর স্থাপিত বিন্দুগুলো সংযুক্ত করি ফলত আরেকটি সরলরেখা পাই।



উৎপন্ন সরলরেখাদ্বয় পরস্পরকে (12,6) বিন্দুতে ছেদ করে।

অতএব, নির্ণেয় সমাধানঃ (x,y)=(12,6)

(iv) $-7x + 8y = 9$, $5x - 4y = -3$

সমাধানঃ

সহসমীকরণ $a_1x + b_1y = c_1$, $a_2x + b_2y = c_2$ এর সাথে প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়কে তুলনা করে পাই,

$a_1/a_2 = -{}^{7}/_{5}$

$b_1/b_2 = -{}^{8}/_{4} = -2$

$c_1/c_2 = -{}^{9}/_{3} = -3$

অর্থাৎ, $a_1/a_2 \neq b_1/b_2$

∵ সমীকরণদ্বয়ের একটি মাত্র সমাধান আছে বা এটি সমাধানযোগ্য।

লেখচিত্র এঁকে সমাধানঃ

$-7x + 8y = 9$

বা, $8y = 9+7x$

বা, $y = (9+7x)/8$ ....(i)

এখন, (i) নং এ x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর কয়েকটি মান নির্ণয় করি।

ছক-১

Playstore Link: https://play.google.com/store/apps/dev?id=4840459759776483209

x এর মান	y এর মান
1	2
5	5.5
9	9

আবার, $5x - 4y = -3$

বা, $-4y = -3-5x$

বা, $4y = 3+5x$

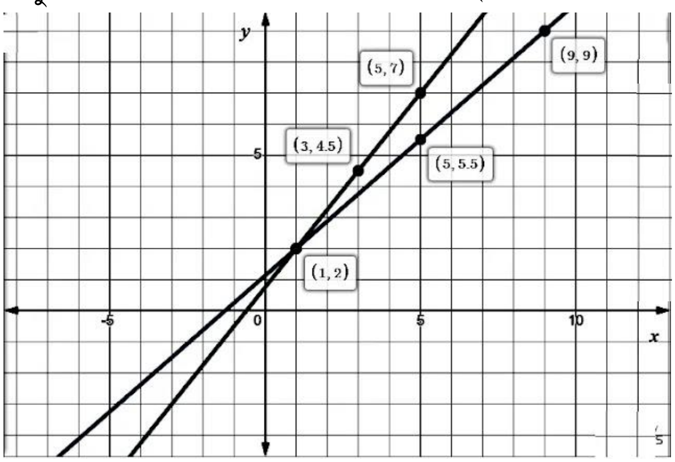
বা, $y = (3+5x)/4$......(ii)

এখন, (ii) নং এ x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর কয়েকটি মান নির্ণয় করি।

ছক-২

x এর মান	y এর মান
1	2
3	4.5
5	7

এবার ছক কাগজে x ও y অক্ষ বরাবর প্রতি বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে এক একক ধরে ছক-১ এর জন্য (1,2), (5,5.5) ও (9,9) এবং ছক-২ এর জন্য (1,2), (3,4.5) ও (5,7) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। ছক-১ এর স্থাপিত বিন্দুগুলো সংযুক্ত করি ফলত একটি সরলরেখা পাই এবং ছক-২ এর স্থাপিত বিন্দুগুলো সংযুক্ত করি ফলত আরেকটি সরলরেখা পাই।



উৎপন্ন সরলরেখাদ্বয় পরস্পরকে (1,2) বিন্দুতে ছেদ করে।

অতএব, নির্ণেয় সমাধানঃ (x,y) = (1,2)

3. প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাধান করো:

(i) $7x - 3y = 31$

$9x - 5y = 41$

সমাধানঃ

$7x - 3y = 31$.....(i)

$9x - 5y = 41$....(ii)

(i) নং হতে,

$7x = 31+3y$

বা, $x = {}^{(31+3y)}/_{7}$.....(iii)

এখন, x এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$9.{}^{(31+3y)}/_{7} - 5y = 41$

বা, ${}^{(279+27y)}/_{7} - 5y = 41$

বা, $27y+279-35y = 287$ [উভয়পক্ষকে 7 দ্বারা গুণ করে]

বা, $-8y+279 = 287$

বা, $-8y = 287-279$

বা, $-8y = 8$

বা, $y = -1$

এখন, y এর মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই,

$x = {}^{(31+3.-1)}/_{7}$

বা, $x = {}^{(31-3)}/_{7}$

বা, $x = {}^{28}/_{7} = 4$

অতএব, নির্ণেয় সমাধানঃ (x,y) = (4,-1)

(ii) $(x + 2)(y - 3) = y(x - 1)$

$5x - 11y - 8 = 0$

সমাধানঃ

$(x+2)(y-3)=y(x-1)$.....(i)

$5x-11y-8=0$.....(ii)

(i) নং হতে পাই,

$xy+2y-3x-6 = xy-y$

বা, $xy+2y-3x-6-xy+y = 0$

বা, $3y = 3x+6$

বা, $y=x+2$.......(iii)

এখন, y এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$5x-11(x+2)-8=0$

বা, $5x-11x-22-8=0$

বা, $-6x = 22+8$

বা, $-6x = 30$

বা, $x = -5$

এখন, x এর মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই,

$y=-5+2 = - 3$

Playstore Link: https://play.google.com/store/apps/dev?id=4840459759776483209

অতএব, নির্ণেয় সমাধানঃ (x,y) = (-5,-3)

(iii) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$

$ax+by=a^2+b^2$

সমাধানঃ

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$....(i)

$ax+by=a^2+b^2$.....(ii)

(i) নং হতে পাই,

$xb+ya=2ab$ [(i) নং এর উভয়পক্ষকে ab দ্বারা গুণ করে]

বা, $xb=2ab-ya$

বা, $x = 2a-\frac{ya}{b}$....(iii) [উভয়পক্ষকে b দ্বারা ভাগ করে]

এখন x এর এই মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$a(2a-\frac{ya}{b})+by=a^2+b^2$

বা, $a.2a-(\frac{ya}{b}).a+by=a^2+b^2$

বা, $-(\frac{ya}{b}).a= a^2+b^2 - a.2a - by$

বা, $-(\frac{ya}{b}).a= a^2+b^2 - 2a^2 - by$

বা, $-(\frac{ya}{b}).a= b^2 - a^2 - by$

বা, $-ya.a = b(b^2 - a^2 - by)$

বা, $-ya^2 = b^3 - a^2b - b^2y$

বা, $-ya^2+b^2y = b(b^2-a^2)$

বা, $y(b^2-a^2) = b(b^2-a^2)$

বা, $y = b$

এখন, b এর এই মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই,

$x = 2a-\frac{ba}{b}$

বা, $x = 2a - a = a$

অতএব, নির্ণেয় সমাধানঃ (x,y)=(a,b)

(iv) $\frac{x}{14}+\frac{y}{18}=1$

$\frac{(x+y)}{2}+\frac{(3x+5y)}{2} = 2$

সমাধানঃ

$\frac{x}{14}+\frac{y}{18}=1$......(i)

$\frac{(x+y)}{2}+\frac{(3x+5y)}{2} = 2$....(ii)

(ii) নং এর উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে পাই,

$x + y + 3x + 5y = 4$

বা, $4x+6y = 4$

বা, $2x+3y = 2$

বা, $2x = 2-3y$

বা, $x = \frac{(2-3y)}{2}$....(iii)

এখন x এর এই মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$\frac{(2-3y)}{28}+\frac{y}{18}=1$

বা, $9(2-3y)+14y = 252$ [উভয়পক্ষকে 252 দ্বারা গুণ করে]

বা, $18-27y+14y = 252$

বা, $-13y = 252-18$

বা, $-13y = 234$

বা, $y = -18$

এখন, y এর এই মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই,

$x = \frac{\{2-3*(-18)\}}{2} = \frac{(2+54)}{2} = \frac{56}{2} = 28$

অতএব, নির্ণেয় সমাধানঃ (x,y)=(28,-18)

v) $p(x + y) = q(x - y) = 2pq$

সমাধানঃ

$p(x + y) = 2pq$.....(i)

$q(x - y) = 2pq$.....(ii)

(i) নং হতে পাই,

$x + y = 2q$

বা, $x = 2q-y$ ......(iii)

এখন, x এর এই মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$q(2q - y - y) = 2pq$

বা, $q(2q-2y) = 2pq$

বা, $q2(q-y) = 2pq$

বা, $(q-y) = p$

বা, $-y = p-q$

বা, $y = q-p$

এখন, y এর এই মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই,

$x = 2q-(q-p) = 2q-q+p = q+p$

অতএব, নির্ণেয় সমাধানঃ (x,y)=(q+p,q-p)

4. অপনয়ন পদ্ধতিতে সমাধান করো।

(i) $3x - 5y = -9$

$5x - 3y = 1$

সমাধানঃ

$3x - 5y = -9$

বা, $9x-15y = -27$ ...(i) [উভয়পক্ষকে 3 দ্বারা গুণ করে]

আবার,

$5x - 3y = 1$

Playstore Link: https://play.google.com/store/apps/dev?id=4840459759776483209

বা, 25x-15y=5.....(ii) [উভয়পক্ষকে 5 দ্বারা গুণ করে]

এখন, (ii) – (i) করে পাই,

16x = 32

বা, x = 2

এখন,(ii) নং এ x=2 বসিয়ে পাই,

25x – 15y = 5

বা, 25.2 – 15y = 5

বা, 50 – 15y = 5

বা, -15y = 5 - 50

বা, -15y = -45

বা, y = 3

অতএব, নির্ণেয় সমাধানঃ (x,y)=(2,3)

(ii) $\frac{x+1}{y+1} = \frac{4}{5}$

4

$\frac{x-5}{y-5} = \frac{1}{2}$

সমাধানঃ $\frac{x+1}{y+1} = \frac{4}{5}$

বা, 5(x+1) = 4(y+1)

বা, 5x+5 = 4y+4

বা, 5x-4y = 4-5

বা, 5x-4y = -1......(i)

আবার,

$\frac{x-5}{y-5} = \frac{1}{2}$

বা, 2(x-5) = 1(y-5)

বা, 2x-10 = y-5

বা, 2x-y = -5+10

বা, 2x-y = 5

বা, 8x-4y = 20......(ii) [উভয়পক্ষকে 4 দ্বারা গুণ করে]

এখন, (i) – (ii) করে পাই,

-3x = -1-20

বা, -3x = -21

বা, x = 7

এখন, x=7, (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

8.7-4y = 20

বা, 56-4y = 20

বা, -4y = 20 – 56

বা, -4y = -36

বা, y = 9

অতএব, নির্ণেয় সমাধানঃ (x,y)=(7,9)

(iii) $2x+{}^{3}/_{y}=5$

$5x-{}^{2}/_{y}=3$

সমাধানঃ $2x+{}^{3}/_{y}=5$

বা, $4x+{}^{6}/_{y}=10$.....(i) [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে]

আবার,

$5x-{}^{2}/_{y}=3$

বা, $15x-{}^{6}/_{y}=9$.....(ii) [উভয়পক্ষকে 3 দ্বারা গুণ করে]

এখন, (i)+(ii) যোগ করে পাই,

19x = 19

বা, x = 1

এখন, x=1, এই মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$15.1-{}^{6}/_{y}=9$

বা, $-{}^{6}/_{y}=9-15$

বা, $-{}^{6}/_{y}= -6$

বা, -6y = -6

বা, y = 1

অতএব, নির্ণেয় সমাধানঃ (x,y)=(1,1)

(iv) ax + by = 1

$bx + ay = 2ab/(a^2+b^2)$

সমাধানঃ

ax + by = 1

বা, $abx+b^2y=b$.....(i) [উভয়পক্ষকে b দ্বারা গুণ করে]

আবার,

$bx+ay=2ab/(a^2+b^2)$

বা, $abx+a^2y=2a^2b/(a^2+b^2)$....(ii) [উভয়পক্ষকে a দ্বারা গুণ করে]

এখন, (ii) – (i) করে পাই,

$a^2y- b^2y =2a^2b/(a^2+b^2) – b$

বা, $y(a^2-b^2)\ \frac{2a^2b-b(a^2+b^2)}{a^2+b^2}$

বা, $y(a^2-b^2)\ \frac{2a^2b-a^2b-b^3)}{a^2+b^2}$

বা, $y(a^2-b^2)\ \frac{a^2b-b^3)}{a^2+b^2}$

বা, $y(a^2-b^2)\ \frac{b(a^2-b^2)}{a^2+b^2}$

বা, $y = \frac{b}{a^2+b^2}$

এখন, ax + by = 1 সমীকরণে y এর প্রাপ্ত মান বসিয়ে পাই,

$ax+{}^{b.b}/_{(a^2+b^2)}=1$

বা, $\frac{ax(a^2+b^2)b^2}{a^2+b^2} = 1$

বা, $ax(a^2+b^2)+b^2 = a^2+b^2$

বা, $ax(a^2+b^2) = a^2+b^2-b^2$

বা, $ax(a^2+b^2) = a^2$

বা, $x(a^2+b^2) = a$

বা, $x = \frac{a}{a^2+b^2}$

অতএব, নির্ণেয় সমাধানঃ

$x = \frac{a}{a^2+b^2}$ এবং

$y = \frac{b}{a^2+b^2}$

5. আড়গুণন বা বজ্রগুণন পদ্ধতিতে সমাধান করো।

(i) $3x - 2y = 2$

$7x + 3y = 43$

সমাধানঃ

প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়কে আমরা নিম্নরুপে লিখতে পারিঃ

$3x-2y-2=0$

$7x+3y-43=0$

তাহলে, বজ্রগুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{x}{(-2)(-43)-(-2)(3)} = \frac{1}{(3)(3)-(7)(-2)}$$

বা, $\frac{x}{86-(-6)} = \frac{1}{9-(-14)}$

বা, $\frac{x}{92} = \frac{1}{23}$

বা, $23x = 92$

বা, $x = 4$

আবার,

$$\frac{y}{(-2)(7)-(-43)(3)} = \frac{1}{(3)(3)-(7)(-2)}$$

বা, $\frac{y}{-14-(-129)} = \frac{1}{9-(-14)}$

বা, $\frac{y}{115} = \frac{1}{23}$

বা, $23y = 115$

বা, $y = 5$

অতএব, নির্ণেয় সমাধানঃ (x,y) = (4,5)

(ii) ${}^{x}/_{2}+{}^{y}/_{3}=8$

${}^{5x}/_{4}-3y=-3$

সমাধানঃ

প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়কে আমরা নিম্নরুপে লিখতে পারিঃ

${}^{x}/_{2}+{}^{y}/_{3} - 8 = 0$

${}^{5x}/_{4}-3y + 3 = 0$

তাহলে, বজ্রগুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{x}{\left(\frac{1}{3}\right)(3)-(-3)(-8)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)(-3)-\left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)}$$

বা, $\frac{x}{1-(24)} = \frac{1}{\frac{-3}{2}-\left(\frac{5}{12}\right)}$

বা, $\frac{x}{-23} = \frac{1}{\frac{-23}{12}}$

বা, $\frac{-23}{12}.x = -23$

বা, $-23x = -23 \times 12$

বা, $x = 12$

আবার,

$$\frac{y}{(-8)\left(\frac{5}{4}\right)-(3)\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)(-3)-\left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)}$$

বা, $\frac{y}{-10-\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{-\frac{3}{2}-\left(\frac{5}{12}\right)}$

বা, $\frac{y}{-\frac{23}{2}} = \frac{1}{-\frac{23}{12}}$

বা, $-\frac{23}{12}.y = \frac{23}{2}$

বা, $y = \frac{-23}{2}.\frac{-12}{2}$

বা, $y = 6$

অতএব, নির্ণেয় সমাধানঃ (x,y) = (12,6)

(iii) $px+qy=p^2+q^2$

$2qx-py=pq$

সমাধানঃ

প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়কে আমরা নিম্নরুপে লিখতে পারিঃ

$px + qy - p^2 - q^2 = 0$

$2qx - py - pq = 0$

তাহলে, আড়গুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{x}{(q)(-pq)-(-p)(-p^2-q^2)} = \frac{1}{(p)(-p)-(2q)(q)}$$

বা, $\frac{x}{-pq^2-p^3-pq^2)} = \frac{1}{-p^2-2q^2}$

বা, $\frac{x}{-2pq^2-p^3} = \frac{1}{-p^2-2q^2}$

বা, $\frac{x}{p(-2q^2-p^2)} = \frac{1}{-p^2-2q^2}$

বা, $\frac{x}{p} = 1$

বা, $x = p$

আবার,

$$\frac{y}{(-p^2-q^2)(2q)-(-pq)(p)} = \frac{1}{(p)(-p)-(2q)(q)}$$

বা, $\frac{y}{-2p^2q-2q^3+p^2q} = \frac{1}{-p^2-2q^2}$

বা, $\frac{y}{-p^2q-2q^3} = \frac{1}{-p^2-2q^2}$

বা, $\frac{y}{q(-p^2-2p^2)} = \frac{1}{-p^2-2q^2}$

বা, $\frac{y}{q} = 1$

বা, y = q

অতএব, নির্ণেয় সমাধানঃ (x,y) = (p,q)

(iv) ax – by = ab

bx – ay = ab

সমাধানঃ

প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়কে আমরা নিম্নরূপে লিখতে পারিঃ

ax – by – ab = 0

bx – ay – ab = 0

তাহলে, আড়গুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{x}{(-b)(-ab)-(-a)(-ab)} = \frac{1}{(a)(-a)-(b)(-b)}$$

বা, $\frac{x}{ab^2-a^2b} = \frac{1}{-a^2+b^2}$

বা, $\frac{x}{ab(b-a)} = \frac{1}{(b-a)(b+a)}$

বা, x(b-a)(b+a) = ab(b-a)

বা, x(b+a) = ab

বা, x = $\frac{ab}{a+b}$

আবার,

বা, $\frac{y}{(-ab)b-(-ab)a} = \frac{1}{(a)(-a)-(b)(-b)}$

বা, $\frac{y}{-ab^2+a^2b} = \frac{1}{-a^2+b^2}$

বা, $\frac{y}{ab(a-b)} = \frac{1}{(b-a)(b+a)}$

বা, y(b-a)(b+a) = ab(a-b)

বা, y(b-a)(b+a) = -ab(b-a)

বা, y(b+a) = -ab

বা, $y = \frac{-ab}{a+b}$

অতএব, নির্নেয় সমাধানঃ

$x = \frac{ab}{a+b}$ এবং

$y = \frac{-ab}{a+b}$

6. অপুর একটি আয়তাকার সবজি বাগান আছে। বাগানটির পরিসীমা 120 মিটার। প্রস্থকে দ্বিগুণ করলে এবং দৈর্ঘ্য থেকে 3 মিটার কমালে পরিসীমা হয় 150 মিটার।

ক) বাগানটি 3 পাশে ঘেরা আছে এবং দৈর্ঘ্য বরাবর এক পাশে ফাঁকা আছে। ফাঁকা পাশ বেড়া দিয়ে ঘিরে দিতে প্রতি মিটার 10 টাকা হিসাবে মোট কত টাকা খরচ হবে?

খ) যদি প্রতি বর্গমিটারে জৈবিক সারের জন্য 7 টাকা খরচ হয়, তাহলে সার বাবদ অপুর মোট কত টাকা খরচ হবে?

সমাধানঃ ধরি,

অপুর আয়তাকার বাগানের দৈর্ঘ্য = x মিটার এবং প্রস্থ = y মিটার।

তাহলে, শর্তমতে,

2(x+y) = 120 ......(i)

2{2y+(x-3)} = 150......(ii)

এখন, (i) নং থেকে পাই,

x+y = 60

বা, x = 60-y ....(iii)

x = 60-y, (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

2{2y+(60-y-3)} = 150

বা, 2y+(60-y-3) = 75

বা, 2y+60-y-3 = 75

বা, y = 75 – 60 + 3

বা, y = 18

y এর এই মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই,

x = 60 – 18 = 42

ক) আমরা, উপরোক্ত সমাধান প্রক্রিয়া থেকে বাগানের দৈর্ঘ্য পাই, x = 42 মিটার।

ক এর শর্ত অনুসারে বাগানের দৈর্ঘ্য বরাবর এক পাশ ফাঁকা আছে অর্থাৎ 42 মিটার ফাঁকা আছে।

এখন, 1 মিটার বেড়া দিতে খরচ হয় 10 টাকা

∴ 42 মিটার বেড়া দিতে খরচ হয় 10×42 টাকা = 420 টাকা।

খ) বাগানের দৈর্ঘ্য x = 42 মিটার এবং প্রস্থ y = 18 মিটার।

∴ বাগানের ক্ষেত্রফল = 42×18 বর্গ মিটার = 756 বর্গ মিটার।

এখন, 1 বর্গমিটারে জৈবিক সারের জন্য খরচ হয় 7 টাকা

∴ 756 বর্গমিটারে জৈবিক সারের জন্য খরচ হয় 7×756 টাকা = 5292 টাকা।

7. $x^2 - 3 = 0$ সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয় করো এবং সমাধান করো।

সমাধানঃ

আমরা জানি,

দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শ রূপঃ $ax^2 + bx + c = 0$

∵ প্রদত্ত সমীকরণের আদর্শ রূপঃ $1.x^2+0.x + (-3) = 0$

তাহলে, প্রদত্ত সমীকরনের নিশ্চায়কঃ $b^2–4ac$

$= 0^2 –4.1.(-3) = 12$

এখন, 12 > 0 এবং পূর্ণবর্গ সংখ্যা নয়।

তাহলে, প্রদত্ত সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান ও অমূলদ [মূলের প্রকৃতি নির্নয় করা হলো]।

সমাধানঃ

দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শ রূপ অনুসারে:

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$$

বা, $x = \frac{-0\pm\sqrt{\{0^2-4.1.(-3)\}}}{2.1}$

বা, $x = \frac{\pm\sqrt{12}}{2}$

বা, $x = \frac{\pm\sqrt{(4.3)}}{2}$

বা, $x = \frac{\pm2\sqrt{3}}{2}$

বা, $x = \pm\sqrt{3}$

সুতরাং, সমীকরণটির মূল দুইটিঃ $x_1 = \sqrt{3}$ এবং $x_2 = -\sqrt{3}$

8. $3x^2 - 2x - 1 = 0$ সমীকরণটি সূত্রের সাহায্যে সমাধান করো। আবার সমীকরণটি লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করে দেখাও যে, উভয় পদ্ধতিতে একই সমাধান পাওয়া যায়।

সমাধানঃ $3x^2 – 2x – 1 = 0$ কে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের সাথে তুলনা করলে পাই,

$a = 3, b = -2, c = -1$

তাহলে,

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$$

বা, $x = \frac{-(-2)\pm\sqrt{\{(-2)^2-4.3.(-1)\}}}{2.3}$

বা, $x = \frac{2\pm\sqrt{(4+12)}}{6}$

বা, $x = \frac{2\pm\sqrt{16}}{6}$

বা, $x = \frac{2\pm4}{6}$

সুতরাং, $x_1 = {}^{(2+4)}/_6 = 1$ এবং, $x_2 = {}^{(2-4)}/_6 = -{}^2/_6 = -{}^1/_3$

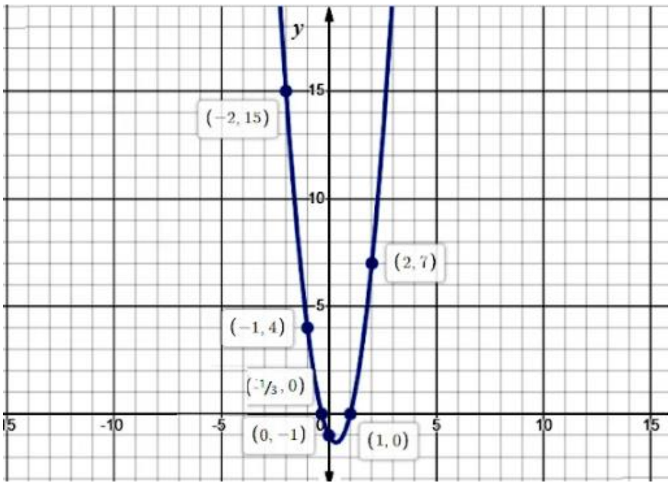
লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধানঃ

মনে করি, $y = 3x^2 - 2x – 1$

x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করি।

x	y
-2	15
-1	4
0	-1
1	0
2	7
$-{}^1/_3$	0

গ্রাফ কাগজে ক্ষুদ্রতম বর্গের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে উপরের বিন্দুগুলো স্থাপন করে নিম্নের লেখচিত্রটি অংকন করি।



লক্ষ করি, লেখচিত্রটি x অক্ষকে $(-{}^1/_3,0)$ ও $(1,0)$ বিন্দুতে ছেদ করেছে। অর্থাৎ এই বিন্দুদ্বয়ের মানই প্রদত্ত সমীকরণের সমাধান।

সুতরাং, $x_1 = 1$ এবং, $x_2 = -{}^1/_3$

অতএব, সূত্রের সাহায্যে ও লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করে দেখা গেল উভয় পদ্ধতিতে একই ফলাফল পাওয়া যায় (দেখানো হলো)।

9. সেতুর মা বাড়িতে হাঁস ও মুরগী পালন করে। তিনি 5000 টাকা দিয়ে 25টি হাঁসের বাচ্চা এবং 30টি মুরগীর বাচ্চা কিনলেন। যদি তিনি একই দরে 20 টি হাঁসের বাচ্চা এবং 40টি মুরগীর বাচ্চা কিনতেন তবে তাঁর 500 টাকা কম খরচ হত।

ক) একটি হাঁসের বাচ্চা ও একটি মুরগীর বাচ্চার দাম কত?

খ) কিছুদিন লালনপালনের পরে প্রতিটি হাঁস 250 টাকা এবং প্রতিটি মুরগী 160 টাকা দরে বিক্রি করলে তাঁর মোট কত টাকা লাভ হবে?

সমাধানঃ

(ক) মনে করি,

Playstore Link: https://play.google.com/store/apps/dev?id=4840459759776483209

সেতুর মা যেসকল হাঁসের বাচ্চা কেনেন তার প্রতিটার মূল্য = x টাকা এবং যেসকল মুরুগীর বাচ্চা কেনেন তার প্রতিটার মূল্য = y টাকা।

তাহলে ১ম শর্ত মতে,

$25x+30y = 5000$

বা, $5(5x+6y)=5000$

বা, $5x+6y = 1000$.......(i)

এবং ২য় শর্ত মতে,

$20x+40y = 5000 - 500$

বা, $20x+40y = 4500$

বা, $20(x+2y)=4500$

বা, $x+2y = 225$

বা, $x = 225-2y$.....(iii)

এখন, $x = 225-2y$, (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$5(225-2y)+6y = 1000$

বা, $1125 - 10y + 6y = 1000$

বা, $-4y = 1000 - 1125$

বা, $-4y = -125$

বা, $y = 31.25$

$x = 225-2y = 225 - 2\times31.25 = 162.50$

অতএব, একটি হাঁসের বাচ্চা 162.50 টাকা ও একটি মুরগীর বাচ্চার দাম 31.25 টাকা।

খ) সেতুর মায়ের ক্রয়কৃত হাঁসের বাচ্চার সংখ্যা = 25 টি এবং ক্রয়কৃত মুরগির বাচ্চার সংখ্যা = 30 টি।

কিছুদিন লালন পালনের পর ক্রয়কৃত ১টি হাঁসের বিক্রয় মূল্য 250 টাকা হলে 25 টি হাঁসের বিক্রয় মূল্য = 250×25 টাকা = 6250 টাকা।

আবার, কিছুদিন লালন পালনের পর ১ টি মুরগির বিক্রয় মূল্য 160 টাকা হলে 30 টি হাঁসের বিক্রয় মূল্য = 160×30 টাকা = 4800 টাকা।

তাহলে, মোট বিক্রিত মূল্য = 6250 + 4800 টাকা = 11050 টাকা।

কিন্তু, এগুলোর ক্রয়মূল্য ছিল = 5000 টাকা।

অতএব, সেতুর মায়ের লাভ হলো: (11050 - 5000) টাকা = 5050 টাকা।

10. নিচের সহসমীকরণের সমাধান করো:

$$y = x^2 - 2x - 3$$

$$x - 3y + 1 = 0$$

সমাধানঃ

$y = x^2 - 2x - 3$......(i)

$x - 3y + 1 = 0$......(ii)

(i) নং হতে y এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$x - 3(x^2-2x-3) + 1 =0$

বা, $x - 3x^2+6x+9 + 1 = 0$

বা, $-3x^2+7x+10 = 0$

বা, $3x^2 - 7x - 10 = 0$

বা, $3x^2 + 3x - 10x - 10 = 0$

বা, $3x(x+1) - 10(x+1) = 0$

বা, $(x+1)(3x-10) = 0$

বা, $3x-10 = 0$ অথবা, $x+1=0$

বা, $3x = 10$ বা, $x = -1$

বা, $x = {}^{10}/_{3}$

এখন, $x = -1$; (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$y = (-1)^2 - 2.(-1) - 3 = 1+2-3 = 0$

এবং $x = {}^{10}/_{3}$; (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$y = ({}^{10}/_{3})^2 - 2.({}^{10}/_{3}) - 3 = {}^{100}/_{9} - {}^{20}/_{3} - 3 = {}^{13}/_{9}$

অতএব, নির্ণেয় সমাধানঃ $(x,y) = (-1,0),({}^{10}/_{3},{}^{13}/_{9})$

11. নিজের মতো করে দুই চলকবিশিষ্ট 3 সেট (একটি সরল ও একটি দ্বিঘাত) সহসমীকরণ গঠন করো এবং সমাধান করো।

সমাধানঃ

গঠনকৃত সহসমীকরণের ১ম সেটঃ

$y = x^2 - x - 2$ ....(i)

$x - 2y + 5 = 0$........(ii)

সমাধান প্রক্রিয়াঃ

(i) নং হতে y এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$x - 2(x^2 - x - 2) + 5 = 0$

বা, $x - 2x^2 + 2x + 4 + 5 = 0$

বা, $-2x^2+3x+9 = 0$

বা, $2x^2-3x-9 = 0$

বা, $2x^2-6x+3x-9 = 0$

বা, $2x(x-3)+3(x-3)$

বা, $(2x+3)(x-3) = 0$

বা, $2x+3 = 0$ অথবা, $x-3 = 0$

বা, $2x = -3$ বা, $x = 3$

বা, $x = -{}^{3}/_{2}$

এখন, $x = 3$; (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$y = 3^2 - 3 - 2 = 9-3-2 = 4$

এবং $x = {}^{10}/_{3}$; (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$y = (-{}^{3}/_{2})^2 - (-{}^{3}/_{2}) - 2 = {}^{9}/_{4} + {}^{3}/_{2} - 2 = {}^{7}/_{4}$

অতএব, নির্ণেয় সমাধানঃ $(x,y) = (3,4),(-{}^{3}/_{2},{}^{7}/_{4})$

গঠনকৃত সহসমীকরণের ২য় সেটঃ

$y = x^2 - 3x + 2$ ....(i)

$x - y - 1 = 0$........(ii)

সমাধান প্রক্রিয়াঃ

(i) নং হতে y এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$x - (x^2 -3x + 2) - 1 = 0$

বা, $x - x^2 + 3x - 2 - 1 = 0$

বা, $-x^2+4x-3 = 0$

বা, $x^2-4x+3 = 0$

বা, $x^2-3x-x+3 = 0$

বা, $x(x-3)-1(x-3)$

বা, $(x-1)(x-3) = 0$

বা, $x-3 = 0$ অথবা, $x-1 = 0$

বা, $x = 3$ বা, $x = 1$

এখন, $x = 3$; (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$y = 3^2 - 3.3 + 2 = 9 - 9 + 2 = 2$

এবং $x =1$; (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$y = 1^2 - 3.1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$

অতএব, নির্ণেয় সমাধানঃ $(x,y) = (3,2),(1,0)$

গঠনকৃত সহসমীকরণের ৩য় সেটঃ

$y = 2x^2 -2x - 3$.......(i)

$x - y - 4 = 0$........(ii)

সমাধান প্রক্রিয়াঃ

(i) নং হতে y এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$x - (2x^2 -2x - 3) - 4 = 0$

বা, $x - 2x^2 + 2x + 3 - 4 = 0$

বা, $-2x^2+3x-1 = 0$

বা, $2x^2-3x+1 = 0$

বা, $2x^2-x-2x+1 = 0$

বা, $x(2x-1)-1(2x-1)$

বা, $(x-1)(2x-1) = 0$

বা, $2x-1 = 0$ অথবা, $x-1 = 0$

বা, $2x = 1$ বা, $x = 1$

বা, $x = ½$

এখন, $x = 1$; (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$y = 2.1^2 -2.1 - 3 = 2 - 2 - 3 = -3$

এবং $x = ½$; (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$y = 2.(½)^2 -2.½ - 3 = ½ -1 - 3 = -8/2 = -{}^{7}/_{2}$

অতএব, নির্ণেয় সমাধানঃ $(x,y) = (1,-3),(½,-{}^{7}/_{2})$

Playstore Link: https://play.google.com/store/apps/dev?id=4840459759776483209