

লগারিদমের ধারণা ও প্রয়োগ

1. বিভিন্ন সূত্র ব্যবহার করে মান নির্ণয় করো:

(i) $2^3\sqrt{343} + 2^5\sqrt{243} - 12^6\sqrt{64}$

সমাধানঃ $2^3\sqrt{343} + 2^5\sqrt{243} - 12^6\sqrt{64}$
 $= 2^3\sqrt{(7^3)} + 2^5\sqrt{(3^5)} - 12^6\sqrt{(2^6)}$
 $= 2(7^3)^{1/3} + 2(3^5)^{1/5} - 12(2^6)^{1/6}$
 $= 2 \times 7 + 2 \times 3 - 12 \times 2$
 $= 14 + 6 - 24$
 $= -4 \text{ (Ans.)}$

(ii) $\frac{y^{a+b}}{y^{2c}} \times \frac{y^{b+c}}{y^{2a}} \times \frac{y^{c+a}}{y^{2b}}$

সমাধানঃ $\frac{y^{a+b}}{y^{2c}} \times \frac{y^{b+c}}{y^{2a}} \times \frac{y^{c+a}}{y^{2b}}$
 $= y^{a+b-2c} \times y^{b+c-2a} \times y^{c+a-2b}$
 $= y^{a+b-2c+b+c-2a+c+a-2b}$
 $= y^0$
 $= 1$

2. বিভিন্ন সূত্র ব্যবহার করে প্রমাণ করো যে,

$(z^a/z^b)^{a+b-c} \times (z^b/z^c)^{b+c-a} \times (z^c/z^a)^{c+a-b} = 1$

সমাধানঃ $(z^a/z^b)^{a+b-c} \times (z^b/z^c)^{b+c-a} \times (z^c/z^a)^{c+a-b}$
 $= z^{(a-b)(a+b-c)} \times z^{(b-c)(b+c-a)} \times z^{(c-a)(c+a-b)}$
 $= z^{(a-b)(a+b-c) + (b-c)(b+c-a) + (c-a)(c+a-b)}$

এখন, $(a-b)(a+b-c) + (b-c)(b+c-a) + (c-a)(c+a-b)$
 $= (a^2-ab+ab-b^2-ca+bc) + (b^2-bc+bc-c^2-ab+ca) + (c^2-ca+ca-a^2-bc+ab)$
 $= (a^2-b^2-ca+bc) + (b^2-c^2-ab+ca) + (c^2-a^2-bc+ab)$
 $= (a^2-b^2+b^2-c^2+c^2-a^2) + (-ca+bc-ab+ca-bc+ab)$
 $= 0 + 0$
 $= 0$

অতএব, $z^{(a-b)(a+b-c) + (b-c)(b+c-a) + (c-a)(c+a-b)}$
 $= z^0$
 $= 1 \text{ [proved]}$

3. নিচের সূচক সমতাকে লগের মাধ্যমে প্রকাশ করো এবং বৈজ্ঞানিক ডিভাইস ব্যবহার করে x এর মান বের করো।

(i) $2^x = 64$

সমাধানঃ $2^x = 64$

বা, $\log_2(2^x) = \log_2(64)$ [উভয় পাশে $\log_2$ নিয়ে]

বা, $\log_2(2^x) = \log_2(64)$

বা, $x \cdot \log_2^x = \log_2(64)$

বা, $x \cdot 1 = \log_2(64)$ [যেহেতু, $\log_a^a = 1$]

বা, $x \cdot 1 = 6$ [বৈজ্ঞানিক ডিভাইস ব্যবহার করে]

$\therefore x = 6 \text{ [Ans]}$

(ii) $(1.2)^x = 100$

সমাধানঃ $(1.2)^x = 100$

বা, $\log_{1.2}(1.2)^x = \log_{1.2}(100)$ [উভয় পাশে $\log_{1.2}$ নিয়ে]

বা, $x \cdot \log_{1.2}^{1.2} = \log_{1.2}(100)$

বা, $x \cdot 1 = \log_{1.2}(100)$ [যেহেতু, $\log_a^a = 1$]

বা, $x \cdot 1 = 25.2585$ (প্রায়) [বৈজ্ঞানিক ডিভাইস ব্যবহার করে]

$\therefore x = 25.2585$ (প্রায়) [Ans]

(iii) $7^x = 5$

সমাধানঃ $7^x = 5$

বা, $\log_7(7^x) = \log_7(5)$ [উভয় পাশে $\log_7$ নিয়ে]

বা, $\log_7(7^x) = \log_7(5)$

বা, $x \cdot \log_7^7 = \log_7(5)$

বা, $x \cdot 1 = \log_7(5)$ [যেহেতু, $\log_a^a = 1$]

বা, $x \cdot 1 = 0.8271$ (প্রায়) [বৈজ্ঞানিক ডিভাইস ব্যবহার করে]

$\therefore x = 0.8271$ (প্রায়) [Ans]

(iv) $(2/3)^x = 7$

সমাধানঃ $(2/3)^x = 7$

বা, $\log_{2/3}(2/3)^x = \log_{2/3}(7)$ [উভয় পাশে $\log_{2/3}$ নিয়ে]

বা, $\log_{2/3}(7^x) = \log_{2/3}(7)$

বা, $x \cdot \log_{2/3}^7 = \log_{2/3}(7)$

বা, $x \cdot 1 = \log_{2/3}(7)$ [যেহেতু, $\log_a^a = 1$]

বা, $x \cdot 1 = -4.799$ (প্রায়) [বৈজ্ঞানিক ডিভাইস ব্যবহার করে]

$\therefore x = -4.799$ (প্রায়) [Ans]

4. 10% চক্রবৃদ্ধি মুনাফা হারে চক্রবৃদ্ধি মূলধন কত বছরে 3 গুণ হবে?

সমাধানঃ ধরি, প্রারম্ভিক মূলধন = P, চক্রবৃদ্ধি মূলধন A = 3P

এবং চক্রবৃদ্ধি মুনাফার হার $r = 10\% = 10/100 = 0.1$.

সুতরাং সূত্র থেকে আমরা পাই,

$$3P = P(1 + 0.1)^n \quad [\text{চক্রবৃদ্ধির সূত্র } A=P(1+r)^n \text{ মতে}]$$

$$\text{বা, } 3 = (1+0.1)^n$$

$$\text{বা, } 3 = (1.1)^n$$

$$\text{বা, } n = \log_{1.1} 3 \approx 11.5267$$

সুতরাং মূলধন প্রায় 11.5267 বছরে দ্বিগুণ হবে।

5. করোনা ভাইরাসের নাম তোমরা সবাই জানো। এই ভাইরাস দ্রুত ছড়ায়। যদি করোনা ভাইরাস 1 জনের থেকে প্রতিদিন 3 জনে ছড়ায়, তবে 1 জন থেকে 1 মাসে মোট কতজন করোনা ভাইরাসে আক্রান্ত হবে? কতোদিনে 1 কোটি মানুষ আক্রান্ত হবে?

সমাধানঃ দেওয়া আছে,

$$\text{প্রাথমিক আক্রান্তের সংখ্যা} = 1$$

$$\text{আক্রান্তের হার} = \text{প্রতিদিন 3 জন}$$

$$\text{আক্রান্তের সময়কাল} = 1 \text{ মাস} = 30 \text{ দিন।}$$

তাহলে, মোট আক্রান্তের সংখ্যা

$$= \text{প্রাথমিক আক্রান্তের সংখ্যা} \times (\text{আক্রান্তের হার})^{\text{আক্রান্তের সময়কাল}}$$

$$= 1 \times 3^{30} \text{ জন}$$

$$= 205891132094649 \text{ জন}$$

আবার, 1 কোটি মানুষ আক্রান্তের ক্ষেত্রে সময়কাল T দিন হলে,

$$1 \times 3^T = 100000000$$

$$\text{বা, } 3^T = 100000000$$

$$\text{বা, } \log_3(3^T) = \log_3(100000000) \quad [\text{উভয়পক্ষে } \log_3 \text{ নিয়ে}]$$

$$\text{বা, } T \cdot \log_3 3 = \log_3(100000000)$$

$$\text{বা, } T \cdot 1 = \log_3(100000000) \quad [\because \log_a a = 1]$$

$$\text{বা, } T = \log_3(100000000)$$

$$\text{বা, } T = 14.6713 \text{ দিন (প্রায়)}$$

∴ প্রায় 14.6713 দিনে 1 কোটি মানুষ আক্রান্ত হবে।

6. সেতুর চাচার 3 বিঘা জমি আছে। তিনি তাঁর জমির উর্বরতা ঠিক রাখার জন্য প্রতিবছর 30 কেজি জৈব সার প্রয়োগ করেন। প্রতি কেজি সারে যদি প্রতি কাঠা জমির উর্বরতা 3% বৃদ্ধি করে, তবে সেতুর চাচার জমির অবচয় বের করো? তিনি যদি জমিতে সার প্রয়োগ না করতেন, তাহলে কত বছর পরে তাঁর জমিতে আর কোনো ফসল হবে না?

সমাধানঃ 3 বিঘা = 20×3 কাঠা = 60 কাঠা

ধরি, সার প্রয়োগের আগে প্রতি কাঠা জমির উর্বরতার = P

তাহলে, সার প্রয়োগের পর,

$$1 \text{ কেজি সারের জন্য } 1 \text{ কাঠার উর্বরতা} = P + P \times 3\% = P + 0.03P = 1.03P$$

$$\therefore 30 \text{ কেজি সারের জন্য } 30 \text{ কাঠার উর্বরতা} = 30 \times 1.03P = 30.9P$$

শর্ত অনুসারে, বাকী 30 কাঠা জমির উর্বরতা বৃদ্ধি পায় না।

$$\text{সেক্ষেত্রে, এই } 30 \text{ কাঠার জমির উর্বরতা} = 30P$$

তাহলে,

$$3 \text{ বিঘা বা } 60 \text{ কাঠা জমির উর্বরতা (সার প্রয়োগের পর)} = 30.9P + 30P = 60.9P$$

$$\text{এবং } 3 \text{ বিঘা বা } 60 \text{ কাঠা জমির উর্বরতা (সার প্রয়োগের আগে)} = 60P$$

এখন যেহেতু সার প্রয়োগ করে জমির উর্বরতা ঠিক রাখা হয়, সেহেতু 60.9P হলো জমির প্রাথমিক উর্বরতা এবং সার প্রয়োগ না করলে অর্থাৎ জমির অবচয়ের ফলে জমির উর্বরতা কমে হয় 60P।

তাহলে, জমির অবচয়ের হার

$$= \frac{(60.9P - 60P)}{60.9P} \times 100 = 1.4778\% \text{ (প্রায়)}$$

কত বছর পর আর ফসল হবে না, সেই সময় নির্ণয়ঃ

$$\text{আমরা জানি, জমির অবচয়ের সূত্রঃ } P_T = P(1 - R)^T$$

এখানে, P = 60P [যেহেতু সার প্রয়োগ করা যাবে না]

$$R = 1.4778\% \text{ (প্রায়)}$$

$P_T = ?$; যেহেতু জমির উর্বরতা 1.4778% হারে কমেতে থাকে সেহেতু P_T এর মান কখনো শূন্য হবে না। তাই আমরা $P_T = 0.6P$ ধরি যা 60P এর থেকে 99% কম।

$T = ?$, আমাদের নির্ণয় করতে হবে।

$$\text{বা, } 0.6P = 60P(1 - 1.4778\%)^T \quad [\text{উপরের প্রাপ্ত তথ্য হতে মান বসিয়ে, এখানে } T \text{ হলো সময়কাল}]$$

$$\text{বা, } \frac{0.6P}{60P} = (1 - 0.014778)^T$$

$$\text{বা, } \frac{0.6}{60} = (0.985222)^T$$

$$\text{বা, } 0.01 = (0.985222)^T$$

$$\text{বা, } T = \log_{0.985222}^{0.01}$$

$$\text{বা, } T = 309.315 \text{ (প্রায়)}$$

∴ নির্ণেয় সময়কাল = 309 বছর এর বেশি।

7. 1918 সালের ৪ জুলাই মৌলভীবাজারের শ্রীমঙ্গলে যে ভয়াবহ ভূমিকম্প সংঘটিত হয় রিঙ্টার স্কেলে তার মাত্রা 7.6 এবং 1997 সালের 22 নভেম্বর চট্টগ্রামে যে ভূমিকম্প সংঘটিত হয় যার মাত্রা 6.0 রেকর্ড করা হয়। শ্রীমঙ্গলের ভূমিকম্পটি চট্টগ্রামের ভূমিকম্পের চেয়ে কতগুণ বেশি শক্তিশালী ছিল?

সমাধানঃ মনে করি,

I_1 = শ্রীমঙ্গলের ভূমিকম্পের তীব্রতা

I_2 = চট্টগ্রামের ভূমিকম্পের তীব্রতা এবং

S = আদর্শ ভূমিকম্পের তীব্রতা

সুতরাং, রিঙ্টার স্কেলে-

শ্রীমঙ্গলের ভূমিকম্পের মাত্রা = $\log_{10}(I_1/S)$ এবং

চট্টগ্রামের ভূমিকম্পের মাত্রা = $\log_{10}(I_2/S)$

প্রশ্নমতে,

$$\log_{10}(I_1/S) = 7.6 \text{(i)}$$

$$\log_{10}(I_2/S) = 6 \text{(ii)}$$

(i) থেকে (ii) বিয়োগ করে পাই,

$$\log_{10}(I_1/S) - \log_{10}(I_2/S) = 7.6 - 6$$

$$\text{বা, } (\log_{10}I_1 - \log_{10}S) - (\log_{10}I_2 - \log_{10}S) = 1.6$$

$$\text{বা, } \log_{10}I_1 - \log_{10}S - \log_{10}I_2 + \log_{10}S = 1.6$$

$$\text{বা, } \log_{10}I_1 - \log_{10}I_2 = 1.6$$

$$\text{বা, } \log_{10}(I_1/I_2) = 1.6$$

এই লগারিদমীয় সম্পর্ককে সূচকের মাধ্যমে প্রকাশ করলে দাঁড়ায়,

$$10^{1.6} = (I_1/I_2)$$

$$\text{বা, } (I_1/I_2) = 39.8107171$$

$$\text{বা, } I_1 = 39.8107171 \times I_2$$

সুতরাং, শ্রীমঙ্গলের ভূমিকম্পটি চট্টগ্রামের ভূমিকম্পের চেয়ে 39.8107171 গুণ শক্তিশালী ছিল।

8. কোনো এক সময় জাপানে একটি ভূমিকম্প সংঘটিত হয়, রিঙ্টার স্কেলে যার মাত্রা ৪ রেকর্ড করা হয়। ওই একই বছরে সেখানে আরও একটি ভূমিকম্প সংঘটিত হয় যা পূর্বের চেয়ে ৬ গুণ বেশি শক্তিশালী। রিঙ্টার স্কেলে পরবর্তী ভূমিকম্পের মাত্রা কত ছিল?

সমাধানঃ মনে করি,

I_1 = ১ম ভূমিকম্পের তীব্রতা

I_2 = ২য় ভূমিকম্পের তীব্রতা এবং

S = আদর্শ ভূমিকম্পের তীব্রতা

সুতরাং, রিঙ্টার স্কেলে-

১ম ভূমিকম্পের মাত্রা = $\log_{10}(I_1/S)$ এবং

২য় ভূমিকম্পের মাত্রা = $\log_{10}(I_2/S)$

প্রশ্নমতে,

$$\log_{10}(I_1/S) = 8 \text{(i)}$$

$$\log_{10}(I_2/S) = x \text{ [ধরে](ii)}$$

(i) থেকে (ii) বিয়োগ করে পাই,

$$\log_{10}(I_1/S) - \log_{10}(I_2/S) = 8 - x$$

$$\text{বা, } (\log_{10}I_1 - \log_{10}S) - (\log_{10}I_2 - \log_{10}S) = 8 - x$$

$$\text{বা, } \log_{10}I_1 - \log_{10}S - \log_{10}I_2 + \log_{10}S = 8 - x$$

$$\text{বা, } \log_{10}I_1 - \log_{10}I_2 = 8 - x$$

$$\text{বা, } \log_{10}(I_1/I_2) = 8 - x$$

এই লগারিদমীয় সম্পর্ককে সূচকের মাধ্যমে প্রকাশ করলে দাঁড়ায়,

$$10^{8-x} = (I_1/I_2)$$

$$\text{বা, } (I_1/I_2) = 10^{8-x}$$

$$\text{বা, } I_1 = 10^{8-x} \times I_2 \text{(iii)}$$

কিন্তু শর্তানুসারে,

$$I_2 = I_1 \times 6$$

$$\text{বা, } I_1 = \frac{1}{6} I_2 \text{(iv)}$$

তাহলে, সমীকরণ (iii) ও (iv) হতে পাই,

$$10^{8-x} = \frac{1}{6}$$

$$\text{বা, } \log_{10}(10^{8-x}) = \log_{10}(\frac{1}{6}) \text{ [উভয় দিকে } \log_{10} \text{ যোগ করে]}$$

$$\text{বা, } (8-x) \cdot \log_{10} 10 = \log_{10}(\frac{1}{6})$$

$$\text{বা, } 8-x = \log_{10}(\frac{1}{6})$$

$$\text{বা, } -x = \log_{10}(\frac{1}{6}) - 8$$

$$\text{বা, } x = 8 - \log_{10}(\frac{1}{6})$$

$$\text{বা, } x = 8 - (-0.77815124951505)$$

$$\therefore x = 8.77815125 \text{ (প্রায়)}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় ভূমিকম্পের মাত্রা} = 8.77815125 \text{ (প্রায়)}$$

9. 1999 সালের জুলাই মাসে কক্সবাজারের মহেশখালিতে যে ভূমিকম্প হয় তার মাত্রা রেকর্ড করা হয়েছিল 5.2 এবং 2023 সালের 6 ফেব্রুয়ারি তুরস্কের দক্ষিণাংশে যে ভয়াবহ ভূমিকম্প সংঘটিত হয় তা মহেশখালির ভূমিকম্পের তীব্রতার চেয়ে 398 গুণ বেশি শক্তিশালী ছিল। তুরস্কের দক্ষিণাংশের ভূমিকম্পের মাত্রা কত ছিল?

সমাধানঃ মনে করি,

$$I_1 = \text{তুরস্কের ভূমিকম্পের তীব্রতা}$$

I_2 = মহেশখালির ভূমিকম্পের তীব্রতা এবং

S = আদর্শ ভূমিকম্পের তীব্রতা

সুতরাং, রিক্টার স্কেলে-

তুরস্কের ভূমিকম্পের মাত্রা = $\log_{10}(I_1/S)$ এবং

মহেশখালির ভূমিকম্পের মাত্রা = $\log_{10}(I_2/S)$

প্রশ্নমতে,

$$\log_{10}(I_1/S) = x \text{ [ধরে](i)}$$

$$\log_{10}(I_2/S) = 5.2 \text{(ii)}$$

(i) থেকে (ii) বিয়োগ করে পাই,

$$\log_{10}(I_1/S) - \log_{10}(I_2/S) = x - 5.2$$

$$\text{বা, } (\log_{10}I_1 - \log_{10}S) - (\log_{10}I_2 - \log_{10}S) = x - 5.2$$

$$\text{বা, } \log_{10}I_1 - \log_{10}S - \log_{10}I_2 + \log_{10}S = x - 5.2$$

$$\text{বা, } \log_{10}I_1 - \log_{10}I_2 = x - 5.2$$

$$\text{বা, } \log_{10}(I_1/I_2) = x - 5.2$$

এই লগারিদমীয় সম্পর্ককে সূচকের মাধ্যমে প্রকাশ করলে
দাঁড়ায়,

$$10^{x-5.2} = (I_1/I_2)$$

$$\text{বা, } (I_1/I_2) = 10^{x-5.2}$$

$$\text{বা, } I_1 = 10^{x-5.2} \times I_2 \text{(iii)}$$

কিন্তু শর্ত অনুসারে,

$$I_1 = I_2 \times 398 \text{(iv)}$$

তাহলে, সমীকরণ (iii) ও (iv) হতে পাই,

$$10^{x-5.2} = 398$$

$$\text{বা, } \log_{10}(10^{x-5.2}) = \log_{10}(398) \text{ [উভয় দিকে } \log_{10} \text{ যোগ করে]}$$

$$\text{বা, } (x-5.2) \cdot \log_{10} 10 = \log_{10}(398)$$

$$\text{বা, } x-5.2 = \log_{10}(398) \text{ [}\because \log_a^a = 1\text{]}$$

$$\text{বা, } x = \log_{10}(398) + 5.2$$

$$\text{বা, } x = 2.5998830720737 + 5.2 \text{ (প্রায়)}$$

$$\text{বা, } x = 7.79988307 \text{ (প্রায়)}$$

$\therefore$ নির্ণেয় ভূমিকম্পের মাত্রা = 7.79988307 (প্রায়)