অনুক্রম ও ধারা-১

১. নিচের অনুক্রমগুলো সমান্তর, গুণোত্তর, ফিবোনাচ্চি নাকি কোনোটিই নয়? কেন? সাধারণ পদ নির্ণয়সহ ব্যাখ্যা করো।

(i) 2, 5, 10, 17,......

সমাধানঃ এটি সমান্তর নয় কারণ এর সাধারণ অন্তর ভিন্ন ভিন্ন। যেমনঃ

২য় পদ – ১ম পদ = 5 – 2 = 3

৩য় পদ – ২য় পদ = 10 – 5 = 5

আবার,

এটি গুণোত্তর নয় কারণ এর সাধারণ অনুপাত ভিন্ন ভিন্ন। যেমনঃ

২য় পদ ÷ ১ম পদ = 5 ÷ 2 = 2.5

৩য় পদ ÷ ২য় পদ = 10 ÷ 5 = 2

এটি ফিবোনাক্কি নয় কারণ এর পরবর্তী যে কোনো পদ পূর্ববর্তী দুটি পদের সমষ্টির সমান নয়।যেমনঃ

১ম পদ + ২য় পদ = 2+5 ≠ 10 (৩য় পদ);

২য় পদ + ৩য় পদ = 5+10 ≠ 17 (৪র্থ পদ)

সাধারণ পদ নির্ণয়ঃ

লক্ষ করি,

প্রদত্ত অনুক্রমঃ 2, 5, 10, 17,......

১ম পার্থক্যঃ 3 5 7

২য় পার্থক্যঃ 2 2

এখান থেকে লিখতে পারি,

(৩য় পদ – ২য় পদ) + 2 + ৩য় পদ = ৪র্থ পদ

বা, ২×৩য় পদ – ২য় পদ + 2 = ৪র্থ পদ

বা, $2.a_3 - a_2 + 2 = a_4$

বা, $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2$ [নির্ণেয় সাধারন পদ]

(ii) 2, 7, 12, 17,......

সমাধানঃ এটি সমান্তর কারণ এর সাধারণ অন্তর অভিন্ন।যেমনঃ

২য় পদ – ১ম পদ = 7 – 2 = 5

৩য় পদ – ২য় পদ = 12 – 7 = 5

সাধারণ পদ নির্ণয়ঃ

এখানে,

১ম পদ a, সাধারণ অন্তর d হলে সমান্তান্তর অনুক্রমের **বীজগণিতীয় রূপঃ** a, a+d, a+2d, a+3d ......

এই অনুসারে, nতম পদ, $a_n = a+(n-1)d = 2+(n-1)5$ [নির্ণেয় সাধারণ পদ]

(iii) -12, 24, -48, 96,......

সমাধানঃ এটি গুণোত্তর কারণ এর সাধারণ অনুপাত অভিন্ন। যেমনঃ

২য় পদ ÷ ১ম পদ = 24 ÷ (-12) = -2

৩য় পদ ÷ ২য় পদ = (-48) ÷ 24 = -2

সাধারণ পদ নির্ণয়ঃ

এখানে,

১ম পদ a, সাধারণ অনুপাত r হলে গুণোত্তর অনুক্রমের **বীজগণিতীয় রূপঃ** $a, ar, ar^2, ar^3, ...$

এই অনুসারে, nতম পদ, $a_n = ar^{n-1} = -12.(-2)^{n-1}$ [নির্ণেয় সাধারণ পদ]

(iv) 13, 21, 34, 55,......

সমাধানঃ এটি ফিবোনাচ্চি কারণ এর পরবর্তী যে কোনো পদ পূর্ববর্তী দুটি পদের সমষ্টির সমান।যেমনঃ

৩য় পদ = ১ম পদ + ২য় পদ = ১৩+২১ = ৩৪

৪র্থ পদ = ২য় পদ + ৩য় পদ = ২১+৩৪ = ৫৫

সাধারণ পদ নির্ণয়ঃ

পদ কে F দ্বারা চিহ্নিত করলে,

সুত্রমতে n তম পদ, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ [নির্ণেয় সাধারন পদ]

(v) 5, -3, $^9/_5$, $-^{27}/_{25}$,......

সমাধানঃ এটি গুণোত্তর কারণ এর সাধারণ অনুপাত অভিন্ন। যেমনঃ

২য় পদ ÷ ১ম পদ = (-3) ÷ 5 = $-^3/_5$

৩য় পদ ÷ ২য় পদ = $^9/_5$ ÷ (-3) = $-^3/_5$

সাধারণ পদ নির্ণয়ঃ

এখানে,১ম পদ a, সাধারণ অনুপাত r হলে গুণোত্তর অনুক্রমের **বীজগণিতীয় রূপঃ** $a, ar, ar^2, ar^3, ...$

এই অনুসারে, nতম পদ, $a_n = ar^{n-1} = 5.(-^3/_5)^{n-1}$ [নির্ণেয় সাধারণ পদ]

(vi) $^1/_3$, $^2/_3$, $^4/_3$, $^8/_3$,....

সমাধানঃ এটি গুণোত্তর কারণ এর সাধারণ অনুপাত অভিন্ন। যেমনঃ২য় পদ ÷ ১ম পদ = $^2/_3 \div {}^1/_3 = 2$

৩য় পদ ÷ ২য় পদ = $^4/_3 \div {}^2/_3 = 2$

সাধারণ পদ নির্ণয়ঃ

এখানে,১ম পদ a, সাধারণ অনুপাত r হলে গুণোত্তর অনুক্রমের **বীজগণিতীয় রূপঃ** $a, ar, ar^2, ar^3, ...$

এই অনুসারে, nতম পদ, $a_n = ar^{n-1} = {}^1/_3.2^{n-1}$ [নির্ণেয় সাধারণ পদ]

২. নিচের অনুক্রমগুলোর শূন্যস্থান পূরণ করো।

(i) 2, 9, 16, ____,____, 37,____.

(ii) -35, ____, ____, -5, 5, ____.

(iii) ____,____, ____, 5, -4,____.

(iv) ____, $10x^2$, $50x^3$,____, ____.

সমাধানঃ(i) 2, 9, 16, 23, 30, 37, 44.

[Hint: $a_n = a+(n-1)d$ সূত্রমতে]

(ii) -35, -25, -15, -5, 5, 15.

[Hint: $a_n = a+(n-1)d$ সূত্রমতে]

(iii) 32, 23, 14, 5, -4, -13.

[Hint: $a_n = a+(n-1)d$ সূত্রমতে]

(iv) 2x, $10x^2$, $50x^3$,$250x^3$, $1250x^4$,

[Hint: $a_n = ar^{n-1}$ সূত্রমতে]

৩. ছকের খালি ঘরগুলো পূরণ করো।

[বি.দ্রঃ আমরা এই ছকেই সমাধানের ফল দ্বারা খালি ঘরগুলো পূরণ করে দিয়েছি, আর নিম্নে সমাধানের পদ্ধতি বিস্তারিত দেয়া হয়েছে।]

ক্রমিক নং	১ম পদ a	সাধারণ অন্তর d	পদসংখ্যা n	n তম পদ a_n	S_n
i.	2	5	10	47	245
ii.	-37	4	10	-1	-190
iii.	29	-4	14	-23	42
iv.	34	-2	13	10	286
v.	¾	½	15	$^{31}/_4$	255
vi.	9	-2	18	-25	-144
vii.	7	$^7/_3$	13	35	$^{1820}/_3$
viii.	-4	7	25	164	2000
ix.	8	-¾	15	$-^5/_2$	$^{165}/_4$
x.	2	2	50	100	2550

সমাধানঃi)nতম পদ $a_n = a + (n - 1)d$

$= 2 + (10-1)5$

$= 2 + 9×5$

$= 2 + 45 \quad = 47$

সমষ্টি $S_n = ½.n\{2a + (n - 1)d\}$

$= ½×10\{2×2+(10-1)5\}$

$= 5(4+9×5)$

$= 5×49 \quad = 245$

ii.[বি.দ্রঃ পাঠ্যবইয়ে S_n এর মান -180 দেওয়া আছে, আমরা যাচাই বাছাই করে পেয়েছি এটা -190 হলে গ্রহণযোগ্য হয় এবং সেই অনুসারে সমাধান দেয়া হলো। তোমাদের মতামত থাকলে আমাদের জানিও।]

আমরা জানি,$S_n = ½.n\{2a + (n - 1)d\}$

বা, $2S_n = n\{2a + (n - 1)d\}$

বা, $2×-190 = n\{2.-37 + (n - 1)4\}$ [মান বসিয়ে]

বা, $-380 = n(-74+4n-4)$

বা, $-380 = -74n+4n^2-4n$

বা, $-190 = -37n+2n^2-2n$

বা, $-190 = -39n+2n^2$

বা, $-39n+2n^2+190 = 0$

বা, $2n^2-39n +190 = 0$

বা, $2n^2-20n-19n +190 = 0$

বা, $2n(n-10)-19(n-10)=0$

বা, $(2n-19)(n-10)=0$

∴ $2n=19$

বা, $n=9.5$

[n এর মান ভগ্নাংশ হতে পারে না]

অথবা, $n=10$

∴ $n=10$

আবার,

সূত্রমতে,$a_n = a + (n - 1)d$

বা, $a_n = -37 + (10-1)4$ [মান বসিয়ে]

বা, $a_n = -37 + 9×4$

বা, $a_n = -37 + 36$

∴$a_n = -1$

iii.আমরা জানি,

$a_n = a + (n - 1)d$

বা, $-23 = 29 + (n - 1)×(-4)$ [মান বসিয়ে]

বা, $-23 = 29 -4n+4$

বা, $4n = -23-29-4$

বা, $4n = -56$

∴ $n =-^{56}/_4 = 14$

আবার,আমরা জানি,

$S_n = ½.n\{2a + (n - 1)d\}$

বা, $S_n =½.14\{2×29 + (14 - 1)(-4)\}$ [মান বসিয়ে]

বা, $S_n =7\{58 + 13(-4)\}$

বা, $S_n =7(58-52)$

বা, $S_n =7×6$

∴ $S_n =42$

iv)আমরা জানি,

$a_n = a + (n - 1)d$

বা, $10 = a + (13-1)(-2)$ [মান বসিয়ে]

বা, $10 = a + 12\times(-2)$

বা, $10 = a - 24$

বা, $a = 10 + 24$

$\therefore$ $a = 34$

আবার,

আমরা জানি,$S_n = \frac{1}{2}.n\{2a + (n - 1)d\}$

বা, $S_n = \frac{1}{2}.13\{2\times34 + (13 - 1)(-2)\}$ [মান বসিয়ে]

বা, $S_n = \frac{1}{2}.13\{68 + 12(-2)\}$

বা, $S_n = \frac{1}{2}.13\{68 - 24\}$

বা, $S_n = \frac{1}{2}.13\times44$

$\therefore$ $S_n = 286$

v)আমরা জানি,$a_n = a + (n - 1)d$

বা, $^{31}/_4 = \frac{3}{4} + (n-1)\frac{1}{2}$ [মান বসিয়ে]

বা, $31 = 3 + (n-1).2$ [উভয়পক্ষকে 4 দ্বারা গুণ করে]

বা, $31 = 3 + 2n - 2$

বা, $31 = 2n + 1$

বা, $2n = 31-1$

বা, $2n = 30$

$\therefore$ $n = 15$

আবার,$S_n = \frac{1}{2}.n\{2a + (n - 1)d\}$

বা, $S_n = \frac{1}{2}.15\{2\times^3/_4 + (15 - 1)\frac{1}{2}\}$

বা, $S_n = \frac{1}{2}.15\{^3/_2 + (14)\frac{1}{2}\}$

বা, $S_n = \frac{1}{2}.15\{^3/_2 + ^{14}/_2\}$

বা, $S_n = \frac{1}{2}.15\{^{17}/_2\}$

বা, $S_n = 255$

vi)আমরা জানি,$S_n = \frac{1}{2}.n\{2a + (n - 1)d\}$

বা, $2S_n = n\{2a + (n - 1)d\}$

বা, $2\times-144 = n\{2\times9 + (n - 1)(-2)\}$ [মান বসিয়ে]

বা, $-288 = n(18-2n+2)$

বা, $-288 = 18n-2n^2+2n$

বা, $-288 = 20n-2n^2$

বা, $20n-2n^2+288 = 0$

বা, $-2n^2+20n +288 = 0$

বা, $2n^2-20n-288 = 0$

বা, $n^2-10n-144 = 0$

বা, $n^2-10n-144 = 0$

বা, $n^2-18n+8n-144 = 0$

বা, $n(n-18)+8(n-18)=0$

বা, $(n-18)(n+8)=0$

$\therefore n=18$ | অথবা, $n=8$ [গ্রহনযোগ্য নয়]

আবার,$a_n = a + (n - 1)d$

বা, $a_n = 9 + (18-1)(-2)$ [মান বসিয়ে]

বা, $a_n = 9 + 17(-2)$

বা, $a_n = 9 - 34$

$\therefore$ $a_n = -25$

vii)আমরাজানি,

$a_n = a + (n - 1)d$

বা, $35 = 7 + (13 - 1)d$ [মান বসিয়ে]

বা, $35 = 7 +12d$

বা, $12d = 35-7$

বা, $12d = 28$

$\therefore$ $d = ^{28}/_{12} = ^7/_3$

আবার,$S_n = \frac{1}{2}.n\{2a + (n - 1)d\}$

বা, $S_n = \frac{1}{2}.13\{2\times7 + (35 - 1)^7/_3\}$ [মান বসিয়ে]

বা, $S_n = \frac{1}{2}.13\{14 + (34)\times^7/_3\}$

বা, $S_n = \frac{1}{2}.13(14 + ^{238}/_3)$

বা, $S_n = \frac{1}{2}.13(^{42}/_3 + ^{238}/_3)$

বা, $S_n = \frac{1}{2}.13(^{280}/_3)$

বা, $S_n = ^{3640}/_6$

$\therefore$ $S_n = ^{1820}/_3$

viii) আমরা জানি,

$S_n = \frac{1}{2}.n\{2a + (n - 1)d\}$

বা, $2000 = \frac{1}{2}.25\{2a + (25 - 1)7\}$ [মান বসিয়ে]

বা, $2000 = \frac{1}{2}.25(2a + 24\times7)$

বা, $2000 = \frac{1}{2}.25(2a + 168)$

বা, $(2a + 168) = ^{2000\times2}/_{25}$

বা, $2a+168 = 160$

বা, $2a = 160-168$

বা, $2a = -8$

$\therefore$ $a = -4$

আবার,

$a_n = a + (n - 1)d$

$a_n = -4 + (25 - 1)7$ [মান বসিয়ে]

$a_n = -4 + 24×7$

$a_n = -4 + 168$

$a_n = 164$

ix)আমরা জানি,

$S_n = ½.n\{2a + (n - 1)d\}$

বা, $^{165}/_4 = ½.15\{2a + (15 - 1)(-¾)\}$ [মান বসিয়ে]

বা, $^{165}/_4 = ½.15\{2a + 14×(-¾)\}$

বা, $^{165}/_4 = ½.15(2a - ^{21}/_2)$

বা, $½.15(2a - ^{21}/_2) = ^{165}/_4$

বা, $(2a - ^{21}/_2) = ^{11}/_2$

বা, $2a = ^{11}/_2 + ^{21}/_2$

বা, $2a = ^{32}/_2$

বা, $a = ^{32}/_4$

বা, $a = 8$

আবার,

$a_n = a + (n - 1)d$

$a_n = 8 + (15 - 1)(-¾)$ [মান বসিয়ে]

$a_n = 8 + 14×(-¾)$

$a_n = 8 - ^{21}/_2$

$a_n = ^{16}/_2 - ^{21}/_2$

$a_n = -^5/_2$

x) আমরা জানি,

$S_n = ½.n\{2a + (n - 1)d\}$

বা, $2S_n = n\{2a + (n - 1)d\}$

বা, $2×2550 = n\{2.2 + (n - 1)2\}$ [মান বসিয়ে]

বা, $5100 = n(4+2n-2)$

বা, $5100 = 4n+2n^2-2n$

বা, $5100 = 2n+2n^2$

বা, $2550 = n+n^2$

বা, $n+n^2+2550 = 0$

বা, $n^2+n +2550 = 0$

বা, $n^2+51n-50n +2550 = 0$

বা, $n(n+51)-50(n+51)=0$

বা, $(n+51)(n-50)=0$

$∴ n=50$ | অথবা, $n=51$

$∴ n=50$ | [গ্রহনযোগ্য নয়]

আবার,$a_n = a + (n - 1)d$

বা, $a_n = 2 + (50-1)2$ [মান বসিয়ে]

বা, $a_n = 2 + 49×2$

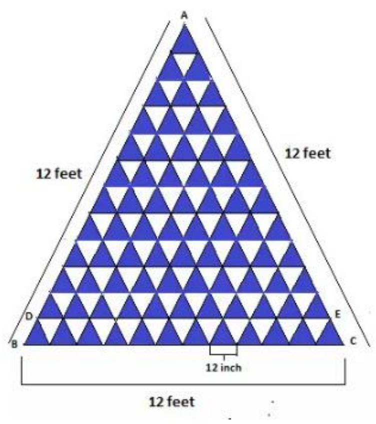
বা, $a_n = 2 + 98$

$∴ a_n = 100$

৪. তোমার পড়ার ঘরের মেঝেতে তুমি সমবাহু ত্রিভুজাকৃতির একটি মোজাইক করতে চাও, যার বাহুর দৈর্ঘ্য 12 ফুট। মোজাইকে সাদা ও নীল রঙের টাইলস থাকবে। প্রতিটি টাইলস 12 ইঞ্চি দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট সুষম ত্রিভুজাকৃতি। টাইলসগুলো বিপরীত রঙে বসিয়ে মোজাইকটি সম্পূর্ণ করতে হবে।

ক) ত্রিভুজাকৃতির মোজাইকটির একটি মডেল তৈরি করো।

সমাধানঃআমি আমার ঘরে সমবাহু ত্রিভুজ আকৃতির একটা মোজাইক করতে চাই যার প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য ১২ ফুট। এবং এই মোজাইক করার জন্য আমি কতগুলো নীল ও কতগুলো সাদা টাইলস বেছে নিয়েছি যেখানে প্রতিটি টাইলস সমবাহু এবং বাহুর দৈর্ঘ্য ১২ ইঞ্চি। এখন টাইলসগুলো বিপরীত রঙে বসানোর জন্য আমি একটি মডেল তৈরি করেছি, মডেলটি নিম্নরূপঃ



খ) প্রত্যেক রঙের কয়টি করে টাইলস লাগবে?

সমাধানঃসমবাহু ত্রিভুজাকৃতি মোজাইক এর বাহু AB = BC = CA = 12 ফুট।

সুষম ত্রিভুজাকৃতি টাইলস এর বাহুর দৈর্ঘ্য = 12 ইঞ্চি = 1 ফুট।

তাহলে, মডেল অনুসারে, ত্রিভুজাকৃতি মোজাইক এর বাহু BC বরাবর স্থাপিত নীল টাইলস এর সংখ্যা = (12÷1) টি = 12 টি।

অর্থাৎ ১ম ধাপে নীল টাইলস এর সংখ্যা $a = 12$

আবার,

সমবাহু ত্রিভুজাকৃতি মোজাইক ABC এর উচ্চতা= $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right).12$ ফুট।

সুষম ত্রিভুজাকৃতি টাইলস এর উচ্চতা = $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right).1$ফুট।

তাহলে,

মডেলটিতে, মোট ধাপ সংখ্যা $n=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right).12 \div \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right).1 = 12$

এবং, ADE এর উচ্চতা $=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right).12-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right).1=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right).11$ ফুট।

এখন আমরা জানি সমবাহু ত্রিভুজের উচ্চতা = $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right).a$, এই সূত্র অনুসারে $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right).11$ উচ্চতা বিশিষ্ট ত্রিভুজটি সমবাহু হবে এবং যার প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য 11 ফুট।

অর্থাৎ, DE = 11 ফুট।

তাহলে, DE বরাবর নীল টাইলস রাখা যাবে (11÷1)টি= 11 টি।

অর্থাৎ ২য় ধাপে নীল টাইলস এর সংখ্যা = 11

তাহলে, সমান্তর ধারা অনুসারে, সাধারন অন্তর d= (11-12)=-1

সুতরাং,

মডেলটিতে মোট নীল টাইলস এর সংখ্যা S_n

$= \frac{1}{2}.n\{2a + (n - 1)d\}$

$= \frac{1}{2}.12\{2.12 + (12 - 1)(-1)\}$

$= 6\{24 + 11(-1)\}$

$= 6(24 - 11)$

$= 6\times13= 78$ টি

এখন আবার,

মডেল অনুসারে, DE বরাবর সাদা টাইলস আছে 11টি কারণ DE = 11 ফুট।

নীল টাইলসের ক্ষেত্রে প্রয়োগকৃত সকল সূত্র ও নিয়ম সাদা টাইলস এর ক্ষেত্রে ব্যবহার করলে সেক্ষেত্রে আমরা পাই,

$a = 11,\ n = 11,\ d = -1$

তাহলে,মোট সাদা টাইলস এর সংখ্যা S_n

$= \frac{1}{2}.n\{2a + (n - 1)d\}$

$= \frac{1}{2}.11\{2.11 + (11 - 1)(-1)\}$

$= \frac{1}{2}.11\{22 + 10(-1)\}$

$= \frac{1}{2}.11\ (22 - 10)$

$= \frac{1}{2}.11\times12$

$= 66$ টি

$= \frac{1}{2}.n\{2a + (n - 1)d\}$

$= \frac{1}{2}.6\{2.7000 + (6 - 1)200\}$

$= 3(14000 + 5\times200)$

$= 3(14000 + 1000)$

$= 3\times15000$

$= 45000$ টাকা।