www.bdniyog.com

১৩। $\sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$, যদি $A = 45°$ হয়।

সমাধান : দেওয়া আছে, $A = 45°$

$\therefore$ বামপক্ষ $= \sin 2A$
$= \sin(2 \times 45°)$
$= \sin 90°$
$= 1$

ডানপক্ষ $= \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$
$= \frac{2\tan 45°}{1+\tan^2 45°}$
$= \frac{2 \cdot 1}{1+(1)^2}$
$= \frac{2}{1+1}$
$= \frac{2}{2} = 1$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

১৪। $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$, যদি $A = 30°$ হয়।

সমাধান : দেয়া আছে, $A = 30°$

এখন, বামপক্ষ $= \tan 2A$
$= \tan(2 \times 30°)$
$= \tan 60°$
$= \sqrt{3}$

আবার, ডানপক্ষ $= \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$
$= \frac{2\tan 30°}{1-\tan^2 30°}$ [A এর মান বসিয়ে]
$= \frac{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$ $\left[\because \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$
$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}}$
$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{3-1}{3}}$
$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2}$
$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2}$
$= \sqrt{3}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

১৫। $\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$, যদি $A = 60°$ হয়।

সমাধান : দেয়া আছে, $A = 60°$

এখন, বামপক্ষ $= \cos 2A$
$= \cos(2 \times 60°)$
$= \cos(120°)$
$= \cos(90° + 30°)$
$= -\sin 30°$
$= -\frac{1}{2}$

ডানপক্ষ $= \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$
$= \frac{(\tan 60°)^2}{(\tan 60°)^2}$
$= \frac{1-(\sqrt{3})^2}{1+(\sqrt{3})^2}$
$= \frac{1-3}{1+3}$
$= \frac{-2}{4}$
$= \frac{-1}{2}$ = ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

১৬। $2\cos(A+B) = 1 = 2\sin(A-B)$ এবং A, B সূক্ষ্মকোণ হলে দেখাও যে, $A = 45°$ এবং $B = 15°$।

সমাধান : দেয়া আছে, $2\cos(A+B) = 1$ এবং $2\sin(A-B) = 1$

এখন, $2\cos(A+B) = 1$

বা, $\cos(A+B) = \frac{1}{2}$

বা, $\cos(A+B) = \cos 60°$ $\left[\because \cos 60° = \frac{1}{2}\right]$

$\therefore A + B = 60°$ ---------- (i)

আবার, $2\sin(A-B) = 1$

বা, $\sin(A-B) = \frac{1}{2}$

বা, $\sin(A-B) = \sin 30°$ $\left[\because \sin 30° = \frac{1}{2}\right]$

$\therefore A - B = 30°$ ---------- (ii)

এখন, সমীকরণ (i) এবং (ii) যোগ করে পাই,

$A + B = 60°$
$A - B = 30°$
$2A = 90°$
$\therefore A = 45°$

A এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$45° - B = 30°$
বা, $45° - 30° = B$
বা, $15° = B$
$\therefore B = 15°$

সুতরাং $A = 45°$ এবং $B = 15°$ (দেখানো হলো)

১৭। $\cos(A-B) = 1$, $2\sin(A+B) = \sqrt{3}$ এবং A, B সূক্ষ্মকোণ হলে, A ও B এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $\cos(A-B) = 1$

বা, $\cos(A-B) = \cos 0°$

$\therefore A - B = 0°$ ..... (i)

আবার, $2\sin(A+B) = \sqrt{3}$

www.bdniyog.com

www.bdniyog.com

বা, $\sin(A+B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sin(A+B) = \sin 60°$

$\therefore A + B = 60°$ ..... (ii)

(ii) নং ও (i) নং সমীকরণ যোগ ও বিয়োগ করে পাই,

$$\begin{array}{rl} & A + B = 60° \\ & A - B = 0° \\ \hline (+) & 2A = 60° \end{array}$$

বা, $A = \frac{60°}{2}$

$\therefore A = 30°$

এবং $A + B = 60°$

$$\begin{array}{rl} & A - B = 0° \\ \hline & 2B = 60° \end{array}$$

বা, $B = \frac{60°}{2}$

$\therefore B = 30°$

অতএব নির্ণেয় মান $A = 30°$ এবং $B = 30°$ (Ans.)

১৮। সমাধান কর : $\frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

সমাধান : এখানে, $\frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

বা, $\frac{\cos A - \sin A + \cos A + \sin A}{\cos A - \sin A - \cos A - \sin A}$

$= \frac{\sqrt{3}-1+\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1-\sqrt{3}-1}$ [যোজন ও বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2\cos A}{-2\sin A} = \frac{2\sqrt{3}}{-2}$

বা, $\frac{\cos A}{\sin A} = \sqrt{3}$ [উভয়পক্ষকে (–) দিয়ে গুণ করে]

বা, $\cot A = \sqrt{3}$

বা, $\cot A = \cot 30°$ [$\because \sqrt{3} = \cot 30°$]

বা, $A = 30°$

$\therefore A = 30°$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান, $A = 30°$ (Ans.)

১৯। A ও B সূক্ষ্মকোণ এবং $\cot(A+B) = 1$, $\cot(A-B) = \sqrt{3}$ হলে, A এবং B এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেয়া আছে, $\cot(A+B) = 1$

বা, $\cot(A+B) = \cot 45°$ [$\because 1 = \cot 45°$]

$\therefore A + B = 45°$ ----------(i)

আবার, দেয়া আছে, $\cot(A-B) = \sqrt{3}$

বা, $\cot(A-B) = \cot 30°$ [$\because \cot 30° = \sqrt{3}$]

$\therefore A - B = 30°$----------(ii)

এখন, সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$$\begin{array}{rl} & A + B = 45° \\ & A - B = 30° \\ \hline \therefore & 2A = 75° \end{array}$$

$\therefore A = \frac{75°}{2} = 37\frac{1}{2}°$

A এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $\frac{75°}{2} - B = 30°$

বা, $\frac{75°}{2} - 30° = B$

বা, $\frac{75° - 60°}{2} = B$

বা, $B = \frac{15°}{2}$

$\therefore B = 7\frac{1}{2}°$

অতএব, নির্ণেয় মান, $A = 37\frac{1}{2}°$ এবং $B = 7\frac{1}{2}°$ (Ans.)

২০। দেখাও যে, $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$, যদি $A = 30°$ হয়।

সমাধান :

বামপক্ষ = $\cos 3A = \cos 3 \times 30° = \cos 90° = 0$

ডানপক্ষ = $4\cos^3 A - 3\cos A$

$= 4\cos^3 30° - 3\cos 30°$

$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3.\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 4.\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$= 0$ = ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ। (দেখানো হল)

২১। সমাধান কর : $\sin\theta + \cos\theta = 1$ যখন $0° \le \theta \le 90°$

সমাধান : $\sin\theta + \cos\theta = 1$

বা, $\cos\theta = 1 - \sin\theta$

বা, $\cos^2\theta = (1 - \sin\theta)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $1 - \sin^2\theta = 1 - 2\sin\theta + \sin^2\theta$

বা, $1 - 1 - \sin^2\theta - \sin^2\theta + 2\sin\theta = 0$

বা, $-2\sin^2\theta + 2\sin\theta = 0$

বা, $-2\sin\theta(\sin\theta - 1) = 0$

বা, $\sin\theta(\sin\theta - 1) = 0$

[উভয় পক্ষকে '–2' দ্বারা ভাগ করে]

হয়, $\sin\theta = 0$ ----------(i)

অথবা, $\sin\theta - 1 = 0$ ----------(ii)

এখন, (i) নং সমীকরণ থেকে পাই, $\sin\theta = \sin 0°$

$\therefore \theta = 0°$

আবার, (ii) নং সমীকরণ থেকে পাই, $\sin\theta = 1$

বা, $\sin\theta = \sin 90°$

$\therefore \theta = 90°$

অতএব, নির্ণেয় মান $\theta = 0°, 90°$ (Ans.)

২২। সমাধান কর : $\cos^2\theta - \sin^2\theta = 2 - 5\cos\theta$ যখন θ সূক্ষ্মকোণ।

সমাধান : এখানে, $\cos^2\theta - \sin^2\theta = 2 - 5\cos\theta$

বা, $\cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) = 2 - 5\cos\theta$

[$\because \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$]

বা, $\cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta - 2 + 5\cos\theta = 0$

বা, $2\cos^2\theta + 5\cos\theta - 3 = 0$

বা, $2\cos^2\theta + 6\cos\theta - \cos\theta - 3 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta + 3) - 1(\cos\theta + 3) = 0$

বা, $(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 3) = 0$

হয়, $2\cos\theta - 1 = 0$ .....(i)

অথবা, $\cos\theta + 3 = 0$ .....(ii)

www.bdniyog.com

এখন, (i) নং সমীকরণ থেকে পাই, $2\cos\theta = 1$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\cos\theta = \cos 60°$

$\therefore \theta = 60°$

আবার, (ii) নং সমীকরণ থেকে পাই, $\cos\theta = -3$

কিন্তু সূক্ষ্মকোণের জন্য $\cos\theta = -3$ হতে পারে না।

$\therefore \cos\theta = -3$ গ্রহণযোগ্য নয়।

অতএব, নির্ণেয় সমাধান $\theta = 60°$ (Ans.)

২৩। সমাধান কর : $2\sin^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$, θ = সূক্ষ্মকোণ।

সমাধান : $2\sin^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$

বা, $2(1 - \cos^2\theta) + 3\cos\theta - 3 = 0$

বা, $2 - 2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$

বা, $-2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 1 = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$ [– দ্বারা গুণ করে]

বা, $2\cos^2\theta - 2\cos\theta - \cos\theta + 1 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta - 1) - 1(\cos\theta - 1) = 0$

বা, $(\cos\theta - 1)(2\cos\theta - 1) = 0$

$\therefore$ হয়, $\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\cos\theta = 1$

$\cos\theta = \cos 0°$

$\therefore \theta = 0°$

অথবা, $2\cos\theta - 1 = 0$

বা, $2\cos\theta = 1$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\cos\theta = \cos 60°$

$\therefore \theta = 60°$

[যেহেতু θ সূক্ষ্মকোণ সেহেতু $\theta = 0°$ গ্রহণযোগ্য নয়]

অতএব, নির্ণেয় সমাধান $\theta = 60°$ (Ans.)

২৪। সমাধান কর : $\tan^2\theta - (1 + \sqrt{3})\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

সমাধান : এখানে, $\tan^2\theta - (1 + \sqrt{3})\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\tan^2\theta - \tan\theta - \sqrt{3}\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\tan\theta(\tan\theta - 1) - \sqrt{3}(\tan\theta - 1) = 0$

বা, $(\tan\theta - 1)(\tan\theta - \sqrt{3}) = 0$

হয়, $\tan\theta - 1 = 0$ .....(i)

নতুবা, $\tan\theta - \sqrt{3} = 0$ .....(ii)

(i) নং সমীকরণ থেকে পাই, $\tan\theta = 1$

বা, $\tan\theta = \tan 45°$

অর্থাৎ, $\theta = 45°$

আবার, (ii) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$\tan\theta = \sqrt{3}$

বা, $\tan\theta = \tan 60°$

অর্থাৎ, $\theta = 60°$।

অতএব, নির্ণেয় সমাধান, $\theta = 45°$ ও $60°$ (Ans.)

২৫। মান নির্ণয় কর : $3\cot^2 60° + \frac{1}{4}\operatorname{cosec}^2 30° + 5\sin^2 45° - 4\cos^2 60°$.

সমাধান : প্রদত্ত রাশি : $3\cot^2 60° + \frac{1}{4}\operatorname{cosec}^2 30° + 5\sin^2 45° - 4\cos^2 60°$.

$= 3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot (2)2 + 5 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$= 3 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot 4 + 5 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{4}$

$= 1 + 1 + \frac{5}{2} - 1$

$= 1 + \frac{5}{2}$

$= \frac{2 + 5}{2} = \frac{7}{2}$

অতএব নির্ণেয় মান $= \frac{7}{2}$ (Ans.)

২৬। ΔABC এর $\angle B = 90°$, AB = 5cm, BC = 12 cm.

ক AC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

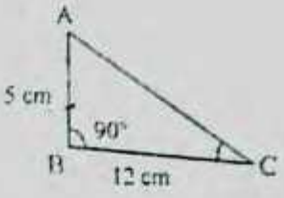
খ $\angle C = \theta$ হলে $\sin\theta + \cos^2\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

গ দেখাও যে, $\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \sec^2\theta \operatorname{cosec}^2\theta$

সমাধান :

ক) আমরা জানি,

ΔABC সমকোণী ত্রিভুজ



$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$

বা, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$

বা, $AC = \sqrt{(5)^2 + (12)^2}$

বা, $AC = \sqrt{25 + 144}$

বা, $AC = \sqrt{169}$

$\therefore AC = 13$ (Ans.)

খ. দেওয়া আছে, $\angle C = \theta$

$\therefore \sin\theta + \cos\theta$

$= \frac{5}{13} + \frac{12}{13}$

$= \frac{5 + 12}{13} = \frac{17}{13}$

অতএব, $\sin\theta + \cos\theta$ এর মান $\frac{17}{13}$ (Ans.)

গ. দেখাও যে, $\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \sec^2\theta \operatorname{cosec}^2\theta$

সমাধান : আমরা জানি, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$.

$= \frac{1}{\frac{12}{13}} = 1 \times \frac{13}{12} = \frac{13}{12}$

এবং $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\frac{5}{13}} = 1 \times \frac{13}{5} = \frac{13}{5}$

বামপক্ষ $= \sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta$

www.bdniyog.com

www.bdniyog.com

$= \left(\frac{13}{12}\right)^2 + \left(\frac{13}{5}\right)^2$

$= \frac{169}{144} + \frac{169}{25}$

$= \frac{4225 + 24336}{3600}$

$= \frac{28561}{3600}$

ডানপক্ষ $= \sec^2\theta\text{cosec}^2\theta$

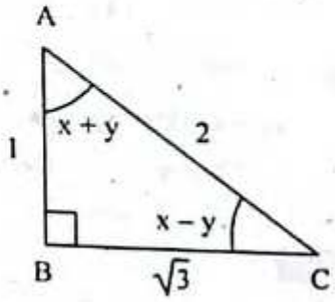
$= \left(\frac{13}{12}\right)^2 \times \left(\frac{13}{5}\right)^2$

$= \frac{169}{144} \times \frac{169}{25}$

$= \frac{28561}{3600}$

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

২৭।



ক AC এর পরিমাণ কত?

খ tanA + tanC এর মান নির্ণয় কর।

গ x ও y এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান :

ক. ΔABC এ $\angle B = 90°$

∴ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= (1)^2 + (\sqrt{3})^2$

$= 1 + 3$

$= 4$

$AC = \sqrt{4}$

∴ $AC = 2$

খ. $\tan C = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

∴ $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

প্রদত্ত রাশি = tanA + tanC

$= \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3+1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

গ. $\tan C = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan(x - y) = \tan 30°$

∴ $x - y = 30°$ .....(i)

আবার, $\tan A = \sqrt{3}$

বা, $\tan(x + y) = \tan 60°$

∴ $x + y = 60°$ .....(ii)

(i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$x - y = 30°$

$x + y = 60°$

$2x = 90°$

∴ $x = 45°$

(i) ও (ii) বিয়োগ করে পাই,

$x + y = 60°$

$x - y = 30°$

$(-) \quad (+) \quad (-)$

$2y = 30$

∴ $y = 15°$

উত্তর : $x = 45°$ এবং $y = 15°$

সৃজনশীল অংশ

মাস্টার ট্রেইনার কর্তৃক প্রণীত বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর :

সাধারণ বহুনির্বাচনি :

১. $1 + \sin^2 A + \frac{\sin^2 A}{1 - \sin^2 A} =$ কত?

[শহীদ বীর উত্তম লে. আনোয়ার গার্লস কলেজ, ঢাকা]

ক $\cos^2 A$ খ $\sec^2 A$ ✓

গ $\sin^2 A$ ঘ $\text{cosec}^2 A$

২. $\sin A = 0$ হলে $= A$ কত?

[মৌলভীবাজার সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়]

ক $0°$ খ $90°$ ✓

গ $60°$ ঘ $45°$

৩. $\tan\theta =$ কোনটি?

[তিতাস উচ্চ বিদ্যালয়, শ্রীমঙ্গল]

ক $\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$ খ $\frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$

গ $\frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}}$ ঘ $\frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}}$

৪. $\cos\theta = \frac{1}{2}$ হলে, $\cot\theta$ এর মান কোনটি?

[ডুমুরিয়া সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়]

ক $\frac{1}{\sqrt{3}}$ খ 1 ✓

গ $\sqrt{3}$ ঘ 2

৫. $\frac{1 - \cot^2 60°}{1 + \cot^2 60°}$ এর মান কত?

[ডুমুরিয়া সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়]

ক $-\frac{1}{2}$ খ $\frac{1}{2}$ ✓

গ $\frac{1}{4}$ ঘ $\frac{2}{3}$

[ডুমুরিয়া সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়]

ক $\frac{1}{2}$ খ $-\frac{1}{2}$ ✓

গ 1 ঘ -1

I ❤ MyMahbub

www.bdniyog.com