www.bdniyog.com

অধ্যায় ৯ ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

❑ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা...

- সূক্ষ্মকোণে ত্রিকো... বর্ণ ... পা...
- সূক্ষ্মকোণে ত্রিকোণ... তগুলে... ... ...
- সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর ধ্রুবতা যাচাই করে প্রমাণ ও গাণিতিক সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- জ্যামিতিক পদ্ধতিতে 30°, 45°, 60° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয় ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- 0° ও 90° কোণের অর্থপূর্ণ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর মান নির্ণয় করে প্রয়োগ করতে পারবে।
- ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলি প্রমাণ করতে পারবে।
- ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলির প্রয়োগ করতে পারবে।

MyMahbub

যা মনে রাখতে হবে...

❑ ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলি

i. $\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$ ii. $\boxed{\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta}$

মন্তব্য : পূর্ণসংখ্যা সূচক n এর জন্য $(\sin\theta)^n$ কে $(\sin^n\theta)$, $(\cos\theta)^n$ কে $\cos^n\theta$ ইত্যাদি লেখা হয়।

iii. $\boxed{\sec^2\theta + \tan^2\theta = 1}$ iv. $\boxed{\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1}$

v. $\boxed{\text{cosec}^2\theta + \cot^2\theta = 1}$ vi. $\boxed{\cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta - 1}$

❑ গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলির প্রমাণ

(i) প্রমাণ কর যে, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

প্রমাণ : বামপক্ষ $= \sin^2\theta + \cos^2\theta$

$= (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2$

$= \left(\frac{PM}{OP}\right)^2 + \left(\frac{OM}{OP}\right)^2$

$= \frac{PM^2}{OP^2} + \frac{OM^2}{OP^2}$

$= \frac{PM^2 + OM^2}{OP^2}$

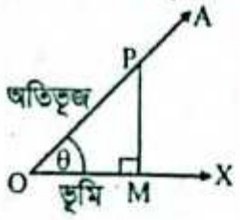
কিন্তু POM সমকোণী ত্রিভুজে OP অতিভুজ।

সুতরাং $OP^2 = PM^2 + OM^2$

[$\because$ OPM সমকোণী ত্রিভুজে, অতিভুজ^2 = লম্ব^2 + ভূমি^{2}]

$\therefore (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = \frac{OP^2}{OP^2}$

$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (প্রমাণিত)



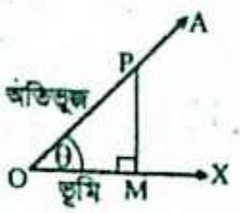
(ii) প্রমাণ কর যে, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

বা, $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

প্রমাণ : বামপক্ষ $= (\sec\theta)^2$

$= \left(\frac{OP}{OM}\right)^2$

$= \frac{OP^2}{OM^2}$



$= \frac{PM^2 + OM^2}{OM^2}$

[$\because$ অতিভুজ^2 = লম্ব^2 + ভূমি^{2}]

$= \frac{PM^2}{OM^2} + \frac{OM^2}{OM^2}$

$= (\tan\theta)^2 + 1 \quad \left[\because \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \tan\theta\right]$

$= 1 + \tan^2\theta$

$\therefore \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

বা, $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ (প্রমাণিত)

(iii) প্রমাণ কর যে, $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

বা, $\text{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

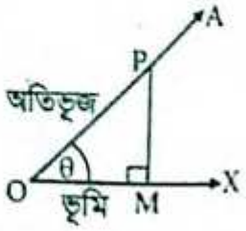
প্রমাণ : বামপক্ষ $= \text{cosec}^2\theta$

$= (\text{cosec}\theta)^2$

$= \left(\frac{OP}{PM}\right)^2$

$= \frac{OP^2}{PM^2}$

$= \frac{PM^2 + OM^2}{PM^2}$



[$\because$ অতিভুজ^2 = লম্ব^2 + ভূমি^{2}]

$= \frac{PM^2}{PM^2} + \frac{OM^2}{PM^2}$

$= 1 + \left(\frac{OM}{PM}\right)^2$

$= 1 + (\cot\theta)^2 \quad \left[\because \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = \cot\theta\right]$

বা, $\text{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

বা, $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$\therefore \text{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$ (প্রমাণিত)

www.bdniyog.com

www.bdniyog.com

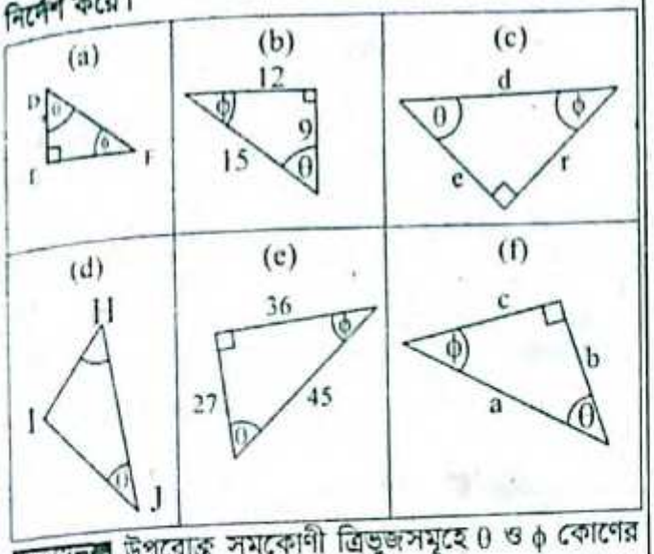
www.bdniyog.com

❑ অনুশীলনী- ৯.১

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

❑ কাজ [পৃষ্ঠা- ১৫৩]

১। θ ও ϕ কোণের জন্য অতিভুজ, সন্নিহিত বাহু ও বিপরীত বাহু নির্দেশ করে।

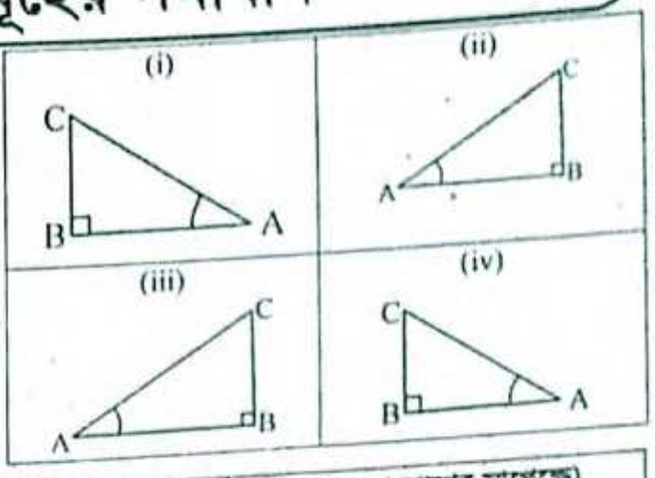


সমাধান: উপরোক্ত সমকোণী ত্রিভুজসমূহে θ ও ϕ কোণের জন্য অতিভুজ, সন্নিহিত বাহু ও বিপরীত বাহু দেখানো হলো–

	θ কোণের জন্য	ϕ কোণের জন্য
(a)	(ক) θ কোণের জন্য অতিভুজ FD বিপরীত বাহু EF সন্নিহিত বাহু DE।	(খ) ϕ কোণের জন্য অতিভুজ DF বিপরীত বাহু DE সন্নিহিত বাহু EF।
(b)	(ক) θ কোণের জন্য অতিভুজ 15 বিপরীত বাহু 12 সন্নিহিত বাহু 9।	(খ) ϕ কোণের জন্য অতিভুজ 15 বিপরীত বাহু 9 সন্নিহিত বাহু 12।
(c)	(ক) θ কোণের জন্য অতিভুজ d বিপরীত বাহু r সন্নিহিত বাহু e।	(খ) ϕ কোণের জন্য অতিভুজ d বিপরীত বাহু e সন্নিহিত বাহু r।
(d)	(ক) θ কোণের জন্য অতিভুজ HJ বিপরীত বাহু HI সন্নিহিত বাহু IJ।	(খ) ϕ কোণের জন্য অতিভুজ HJ বিপরীত বাহু IJ সন্নিহিত বাহু HI।
(e)	(ক) θ কোণের জন্য অতিভুজ 45 সন্নিহিত বাহু 27 বিপরীত বাহু 36।	(খ) ϕ কোণের জন্য অতিভুজ 45 সন্নিহিত বাহু 36 বিপরীত বাহু 27।
(f)	(ক) θ কোণের জন্য অতিভুজ a সন্নিহিত বাহু b বিপরীত বাহু c।	(খ) ϕ কোণের জন্য অতিভুজ a সন্নিহিত বাহু c বিপরীত বাহু b।

❑ কাজ : [পৃষ্ঠা–১৫৩]

২। নিচের চারটি সদৃশ সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য মেপে সারণিটি পূরণ কর। ত্রিভুজের অনুপাতগুলো সম্পর্কে কী লক্ষ কর?



বাহুর দৈর্ঘ্য			অনুপাত (কোণের সাপেক্ষে)		
BC	AB	AC	BC/ AC	AB/ AC	BC/ AB

সমাধান: প্রদত্ত চারটি সদৃশ সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য সেন্টি. মিটারে মেপে সারণি পূরণ করা হলো এবং এদের অনুপাতগুলোর সম্পর্ক নির্ণয় করা হলো–

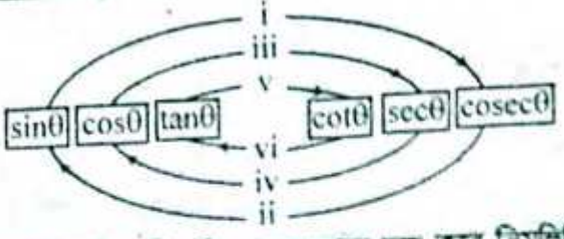
বাহুর দৈর্ঘ্য			অনুপাত (কোণের সাপেক্ষে)		
BC	AB	AC	BC/ AC	AB/ AC	BC/ AB
1.8 cm	3 cm	3.5 cm	18/35	6/17	3/5
0.8 cm	1.3 cm	1.5 cm	8/15	13/15	8/13
3.7 cm	6 cm	7 cm	37/70	6/7	37/60
1 cm	1.8 cm	2 cm	1/2	9/10	5/9

❑ কাজ : [পৃষ্ঠা– ১৫৬]

৩। নিচের ত্রিকোণমিতিক সূত্রগুলো সহজে মনে রাখার জন্য তালিকা তৈরি কর।

$\text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$	$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
$\sec = \frac{1}{\cos\theta}$	$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$	$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$
$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$		$\text{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

সমাধান: সূত্র মনে রাখার উপায় :



উপরের চিত্রটির তীর চিহ্ন ভালোভাবে লক্ষ করে নিম্নলিখিত সূত্রের তালিকা তৈরি করা হলো–

www.bdniyog.com

www.bdniyog.com

i) $\sin = \frac{1}{\text{cosec}\theta}$	vii) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
ii) $\text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$	viii) $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
iii) $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$	ix) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
iv) $\sec = \frac{1}{\cos\theta}$	x) $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$
v) $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$	xi) $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$
vi) $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$	xii) $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$
	xiii) $\text{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$
	xiv) $\cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta - 1$
	xv) $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$
	xvi) $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$
	xii) $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$

❑ কাজ [পৃষ্ঠা- ১৫৭]

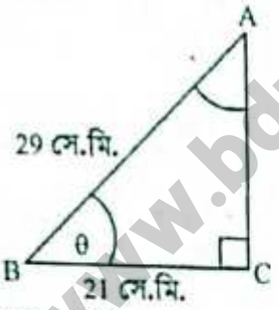
৪। ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle C$ সমকোণ, AB = 29 সে.মি. এবং BC = 21 সে.মি. এবং $\angle ABC = \theta$ হলে, $\cos^2\theta - \sin^2\theta$ এর মান বের কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle C$ সমকোণ, AB = 29 সে.মি, BC = 21 সে.মি. এবং $\angle ABC = \theta$।

আমরা জানি, $\cos\angle ABC = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{BC}{AB}$

বা, $\cos\theta = \frac{21}{29}$

বা, $\cos^2\theta = \frac{441}{841}$



আবার, $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{441}{841} = \frac{400}{841}$

প্রদত্ত রাশি : $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{441}{841} - \frac{400}{841} = \frac{41}{841}$ (Ans.)

❑ কাজ [পৃষ্ঠা- ১৫৭]

৫। $\cot^4 A - \cot^2 A = 1$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cos^4\theta + \cos^2 A = 1$

সমাধান : দেওয়া আছে, $\cot^4 A - \cot^2 A = 1$

প্রমাণ করতে হবে যে, $\cos^4 A - \cot^2 A = 1$

এখন, $\cot^4 A - \cot^2 A = 1$

বা, $\cot^4 A = 1 + \cot^2 A$

বা, $\cot^4 A = \text{cosec}^2 A$

বা, $\frac{\cos^4 A}{\sin^4 A} = \frac{1}{\sin^2 A}$

বা, $\frac{\cos^4 A}{\sin^2 A} = 1$ [উভয়পক্ষকে $\sin^2 A$ দ্বারা গুণ করে।]

বা, $\cos^4 A = \sin^2 A$

বা, $\cos^4 A = 1 - \cos^2 A$

$\therefore \cos^4 A + \cos^2 A = 1$ (প্রমাণিত)

❑ কাজ [পৃষ্ঠা- ১৫৭]

৬। $\sin^2 A + \sin^4 A = 1$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\tan^4 A - \tan^2 A = 1$

সমাধান : দেওয়া আছে, $\sin^2 A + \sin^4 A = 1$

প্রমাণ করতে হবে যে, $\tan^4 A - \tan^2 A = 1$

এখন, $\sin^2 A + \sin^4 A = 1$

বা, $\sin^4 A = 1 - \sin^2 A$

বা, $\sin^4 A = \cos^2 A$

বা, $\frac{\sin^4 A}{\cos^4 A} = \frac{\cos^2 A}{\cos^4 A}$ [উভয় $\cos^4 A$ পক্ষকে দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\tan^4 A = \frac{1}{\cos^2 A}$

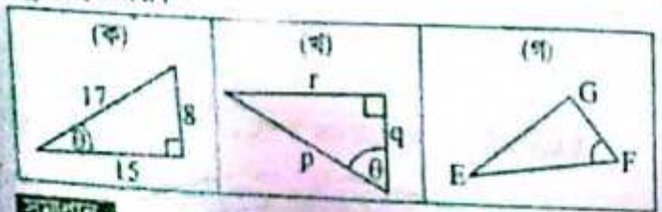
বা, $\tan^4 A = \sec^2 A$

বা, $\tan^4 A = 1 + \tan^2 A$

$\therefore \tan^4 A - \tan^2 A = 1$ (প্রমাণিত)

পাঠ্যবইয়ের গুরুত্বপূর্ণ উদাহরণ

উদাহরণ- ১। θ কোণের জন্য অতিভুজ, সন্নিহিত বাহু ও বিপরীত বাহু চিহ্নিত কর।



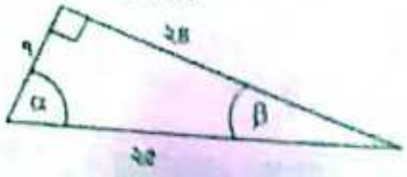
সমাধান :

(ক) অতিভুজ 17 একক, বিপরীত বাহু 8 একক, সন্নিহিত বাহু 15 একক

(খ) অতিভুজ r একক, বিপরীত বাহু p একক, সন্নিহিত বাহু q একক

(গ) অতিভুজ EG একক, বিপরীত বাহু EF একক, সন্নিহিত বাহু FG একক

উদাহরণ- ২। α ও β কোণের জন্য অতিভুজ, সন্নিহিত বাহু ও বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।



সমাধান :

(ক) α কোণের জন্য অতিভুজ 25 একক, বিপরীত বাহু 24 একক, সন্নিহিত বাহু 7 একক

(খ) β কোণের জন্য অতিভুজ 25 একক, বিপরীত বাহু 7 একক, সন্নিহিত বাহু 24 একক

I ❤ MyMahbub
www.bdniyog.com

www.bdniyog.com

বামপক্ষ $= a^2 - b^2$

$= (\tan A + \sin A)^2 - (\tan A - \sin A)^2$

$= 4 \tan A \sin A$ [illegible] $- b)$ [illegible]

$= 4\sqrt{\tan^2 A \cdot \sin^2 A}$

$= 4\sqrt{\tan^2 A (1 - \cos^2 A)}$

$= 4\sqrt{\tan^2 A - \tan^2 A \cdot \cos^2 A}$

$= 4\sqrt{\tan^2 A - \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} \cdot \cos^2 A}$

$= 4\sqrt{\tan^2 A - \sin^2 A}$

$= 4\sqrt{(\tan A + \sin A)(\tan A - \sin A)}$

$= 4\sqrt{ab}$ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

উদাহরণ–১১। $\sec A + \tan A = \frac{5}{2}$ হলে, $\sec A - \tan A$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : [illegible] হলে, $\sec A - \tan A$ এর মান নির্ণয় কর।

দেওয়া আছে, $\sec A + \tan A = \frac{5}{2}$

আমরা জানি, $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$

বা, $\sec^2 - \tan^2 A = 1$

বা, $(\sec A + \tan A)(\sec A - \tan A) = 1$

বা, $\frac{5}{2}(\sec A - \tan A) = 1$ [(i) হতে]

$\therefore \sec A - \tan A = \frac{2}{5}$

MyMahbub

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ৯.১

১। নিচের গাণিতিক উক্তিগুলোর সত্য মিথ্যা যাচাই কর। তোমার উত্তরের পক্ষে যুক্তি দাও।

ক) tanA এর মান সর্বদা 1 এর চেয়ে কম।

সমাধান : tanA এর মান সর্বদা 1 এর চেয়ে কম এটা সত্য নয়। কারণ আমরা জানি, $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$ যেহেতু, বাস্তব সংখ্যার বর্গ সর্বদা অঋণাত্মক, সুতরাং $\tan^2 A$ এর মান অঋণাত্মক হবে। এদের বিয়োগ ফল = 1 অতএব tanA এর মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হতে পারে না। tanA এর মান +1 অপেক্ষা বৃহত্তর কিংবা −1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হতে পারে না। অর্থাৎ তার মান হবে $(-1 \le \tan A \le 1)$.

খ) cotA হলো cot ও A এর গুণফল।

সমাধান : উক্তিটি সত্য নয়। কারণ cotA প্রতীকটি θ কোণের কোট্যানজেন্ট এর অনুপাতকে বোঝায় cot ও A এর গুণফলকে নয়। A বাদে cot আলাদা কোনো অর্থ বহন করে না। ত্রিকোণমিতিক অন্যান্য অনুপাতগুলোর ক্ষেত্রেও বিষয়টি প্রযোজ্য।

গ) A এর কোন মানের জন্য $\sec A = \frac{12}{5}$?

সমাধান : A এর যেকোনো মানের জন্য $\sec A = \frac{12}{5}$, উক্তিটি সত্য। কারণ : আমরা জানি, sec A হলো cosA−এর বিপরীত অনুপাত এবং cosA−এর মান 0 থেকে 1 এর মধ্যে যেকোনো সংখ্যা হতে পারে। তাই sec A এর মান 1 থেকে বড় যেকোনো সংখ্যা $\frac{12}{5}$ হতে পারে।

ঘ) Cos হলো Cotarigent এর সংক্ষিপ্ত রূপ।

সমাধান : বাক্যটি মিথ্যা, কারণ cos হলো সমকোণী ত্রিভুজের $= \frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}$

$\therefore$ Cos হলো cosine এর সংক্ষিপ্ত রূপ।

২। $\sin A = \frac{3}{4}$ হলে, A কোণের অন্যান্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $\sin A = \frac{3}{4}$

অতএব, A কোণের বিপরীত বাহু = 3

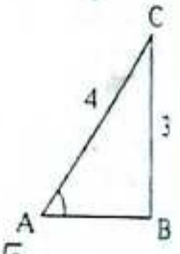
এবং অতিভুজ = 4

$\therefore$ সন্নিহিত বাহু $= \sqrt{4^2 - 3^2}$

$= \sqrt{16 - 9}$

$= \sqrt{7}$

$2 + \sqrt{3}$



সুতরাং $\cos A = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$ $\cot A = \frac{2 + \sqrt{3}}{3}$

$\tan A = \frac{3}{2 + \sqrt{3}}$ $\text{cosec } A = \frac{4}{3}$, $\sec A = \frac{4}{2 + \sqrt{3}}$

৩। দেওয়া আছে, 15 cotA = 8, SinA ও secA এর মান বের কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, 15 cotA = 8

বা $\cot A = \frac{8}{15}$

অতএব A কোণের বিপরীত বাহু = 15

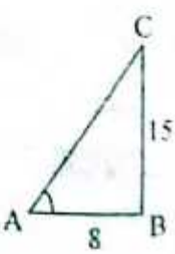
সন্নিহিত বাহু = 8

$\therefore$ অতিভুজ $= \sqrt{15^2 + 8^2}$

$= \sqrt{225 + 64}$

$= \sqrt{289}$

$= 17$



এখন, $\sin A = \frac{15}{17}$ এবং $\sec A = \frac{17}{8}$ (Ans.)

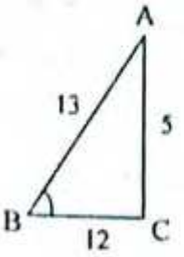
৪। ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle C$ সমকোণ, AB = 13 সে.মি. BC = 12 সে.মি. এবং $\angle ABC = \theta$ হলে, $\sin\theta$, $\cos\theta$ ও $\tan\theta$ এর মান বের কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle C$ = সমকোণ AB = 13 সে.মি.

www.bdniyog.com

www.bdniyog.com

BC = 12 সে.মি. ∠ABC = θ



ΔABC-এ $AB^2 = AC^2 + BC^2$

বা, $AC^2 = AB^2 - BC^2$

বা, $AC = \sqrt{13^2 - 12^2}$

বা, $AC = \sqrt{169 - 144}$

বা, $AC = \sqrt{25}$

∴ AC = 5 সে.মি.

এখন, $\sin\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{13}$

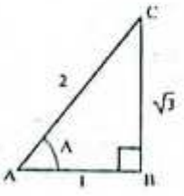
$\cos\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{13}$

$\tan\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{12}$ (Ans.)

৫। ABC সমকোণী ত্রিভুজের ∠B কোণটি সমকোণ। $\tan A = \sqrt{3}$ হলে, $\sqrt{3}\sin A \cos A = \frac{3}{4}$ এর সত্যতা যাচাই কর।

সমাধান :

মনে করি, ABC সমকোণী ত্রিভুজের ∠B = 1 সমকোণ



∠BAC = A, $\tan A = \sqrt{3}$

প্রমাণ করতে হবে যে,

$\sqrt{3}\sin A \cos A = \frac{3}{4}$

এখন, $\tan A = \frac{BC}{AB} = \sqrt{3}$

∴ BC $\sqrt{3}$ এবং AB = 1

আমরা জানি, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= 1^2 + (\sqrt{3})^2$

$= 1 + 3$

$= 4$

∴ AC = 2

∴ $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$

বামপক্ষ $= \sqrt{3}\sin A \cos A$

$= \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ = ডানপক্ষ

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

প্রমাণ কর যে, ৬–২০

৬। i) $\frac{1}{\sec^2 A} + \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A} = 1$

সমাধান : বামপক্ষ $= \frac{1}{\sec^2 A} + \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A}$

$= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 A}} + \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 A}}$

$= \cos^2 A + \sin^2 A$

$= 1$

= ডানপক্ষ

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

ii) $\frac{1}{\cos^2 A} - \frac{1}{\cot^2 A} = 1$

সমাধান : বামপক্ষ $= \frac{1}{\cos^2 A} - \frac{1}{\cot^2 A}$

$= \sec^2 A - \tan^2 A$

$= 1 + \tan^2 A - \tan^2 A$

$= 1$

= ডানপক্ষ

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

iii) $\frac{1}{\sin^2 A} - \frac{1}{\tan^2 A} = 1$

সমাধান :

বামপক্ষ $= \frac{1}{\sin^2 A} - \frac{1}{\tan^2 A} = 1$

$= \frac{1}{\sin^2 A} - \frac{1}{\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}$

$= \frac{1}{\sin^2 A} - \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}$

$= \frac{1 - \cos^2 A}{\sin^2 A}$

$= \frac{\sin^2 A}{\sin^2 A}$ $[1 - \cos^2 A = \sin^2 A]$

$= 1$ = R.H.S

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

৭। i) $\frac{\sin A}{\operatorname{cosec} A} + \frac{\cos A}{\sec A} = 1$

সমাধান : বামপক্ষ $= \frac{\sin A}{\operatorname{cosec} A} + \frac{\cos A}{\sec A}$

$= \sin A \cdot \frac{1}{\operatorname{cosec} A} + \cos A \cdot \frac{1}{\sec A}$

$= \sin A \cdot \sin A + \cos A \cdot \cos A$

$= \sin^2 A + \cos^2 A$

$= 1$ $[\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1]$

= ডানপক্ষ

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

ii) $\frac{\sec A}{\cos A} - \frac{\tan A}{\cot A} = 1$

সমাধান : বামপক্ষ $= \frac{\sec A}{\cos A} - \frac{\tan A}{\cot A}$

$= \sec A \cdot \frac{1}{\cos A} - \tan A \cdot \frac{1}{\cot A}$

$= \sec A \cdot \sec A - \tan A \cdot \tan A$

$= \sec^2 A - \tan^2 A$

$= 1 + \tan^2 A - \tan^2 A$ $[\because \sec^2 A = 1 + \tan^2 A]$

$= 1$

= ডানপক্ষ

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

iii) $\frac{1}{1 + \sin^2 A} + \frac{1}{1 + \operatorname{cosec}^2 A} = 1$

সমাধান : বামপক্ষ $= \frac{1}{1 + \sin^2 A} + \frac{1}{1 + \operatorname{cosec}^2 A}$

$= \frac{1}{1 + \sin^2 A} + \frac{1}{\frac{\sin^2 A + 1}{\sin^2 A}}$ $\left[\because \operatorname{cosec}^2 A = \frac{1}{\sin^2 A}\right]$

www.bdniyog.com

www.bdniyog.com

$= \frac{1}{1+\sin^2 A} + \frac{\sin^2 A}{1+\sin^2 A}$

$= \frac{1+\sin^2 A}{1+\sin^2 A} = 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

৮। i) $\frac{\tan A}{1-\cot A} + \frac{\cot A}{1-\tan A} = \sec A.\ \mathrm{cosec} A + 1$

সমাধান : বামপক্ষ $= \frac{\tan A}{1-\cot A} + \frac{\cot A}{1-\tan A}$

$= \frac{\frac{\sin A}{\cos A}}{1-\frac{\cos A}{\sin A}} + \frac{\frac{\cos A}{\sin A}}{1-\frac{\sin A}{\cos A}}$

$= \frac{\frac{\sin A}{\cos A}}{\frac{\sin A - \cos A}{\sin A}} + \frac{\frac{\cos A}{\sin A}}{\frac{\cos A - \sin A}{\cos A}}$

$= \frac{\sin A}{\cos A} \times \frac{\sin A}{\sin A - \cos A} + \frac{\cos A}{\sin A} \times \frac{\cos A}{\cos A - \sin A}$

$= \frac{\sin^2 A}{\cos A(\sin A - \cos A)} + \frac{\cos^2 A}{\sin A(\cos A - \sin A)}$

$= \frac{\sin^2 A}{\cos A(\sin A - \cos A)} + \frac{\cos^2 A}{\sin A\{-(\sin A - \cos A)\}}$

$= \frac{\sin^2 A}{\cos A(\sin A - \cos A)} - \frac{\cos^2 A}{\sin A(\sin A - \cos A)}$

$= \frac{\sin^3 A - \cos^3 A}{\sin A \cos A(\sin A - \cos A)}$

$= \frac{(\sin A - \cos A)(\sin^2 A + \sin A \cos A + \cos^2 A)}{\sin A \cos A(\sin A - \cos A)}$

$[\because a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)]$

$= \frac{(\sin^2 A + \cos^2 A) + \sin A \cos A}{\sin A . \cos A}$

$= \frac{1 + \sin A \cos A}{\sin A \cos A}$

$= \frac{1}{\sin A \cos A} + \frac{\sin A \cos A}{\sin A \cos A}$

$= \frac{1}{\sin A} \cdot \frac{1}{\cos A} + 1$

$= \mathrm{cosec} A . \sec A + 1$

$= \sec A . \mathrm{cosec} A + 1$

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

ii) $\frac{1}{1+\tan^2 A} + \frac{1}{1+\cot^2 A} = 1$

সমাধান : বামপক্ষ $\frac{1}{1+\tan^2 A} + \frac{1}{1+\cot^2 A}$

$= \frac{1}{1+\tan^2 A} + \frac{1}{1+\frac{1}{\tan^2 A}}$

$= \frac{1}{1+\tan^2 A} + \frac{1}{\frac{\tan^2 A + 1}{\tan^2 A}}$

$= \frac{1}{1+\tan^2 A} \cdot \frac{\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

$= \frac{1+\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

$= 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

৯। $\frac{\cos A}{1-\tan A} + \frac{\sin A}{1-\cot A} = \sin A + \cos A$

সমাধান :

বামপক্ষ $= \frac{\cos A}{1-\tan A} + \frac{\sin A}{1-\cot A}$

$= \frac{\cos A}{1-\frac{\sin A}{\cos A}} + \frac{\sin A}{1-\frac{\cos A}{\sin A}}$

$= \frac{\cos A}{\frac{\cos A - \sin A}{\cos A}} - \frac{\sin A}{\frac{\sin A - \cos A}{\sin A}}$

$= \frac{\cos^2 A}{\cos A - \sin A} + \frac{\sin^2 A}{\sin A - \cos A}$

$= \frac{\sin^2 A}{\sin A - \cos A} - \frac{\cos^2 A}{\sin A - \cos A}$

$= \frac{\sin^2 A - \cos^2 A}{\sin A - \cos A}$

$= \frac{(\sin A + \cos A)(\sin A - \cos A)}{(\sin A - \cos A)}$

$= \sin A + \cos A =$ R.H.S

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

১০। $\tan A \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sin A$.

সমাধান : বামপক্ষ $= \tan A \sqrt{1 - \sin^2 A}$

$= \tan A \sqrt{\cos^2 A}$

$= \frac{\sin A}{\cos A} \times \cos A$

$= \sin A$

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

১১। $\frac{\sec A + \tan A}{\mathrm{cosec} A + \cot A} = \frac{\mathrm{cosec} A - \cot A}{\sec A - \tan A}$

সমাধান : বামপক্ষ $= \frac{\sec A + \tan A}{\mathrm{cosec} A + \cot A}$

$= \frac{(\sec A + \tan A)(\mathrm{cosec} A - \cot A)(\sec A - \tan A)}{(\mathrm{cosec} A + \cot A)(\mathrm{cosec} A - \cot A)(\sec A - \tan A)}$

[লব ও হরকে $(\mathrm{cosec} A - \cot A)(\sec A - \tan A)$ দ্বারা ভাগ করে]

$= \frac{(\sec^2 A - \tan^2 A)(\mathrm{cosec} A - \cot A)}{(\mathrm{cosec}^2 A - \cot^2 A)(\sec A - \tan a)}$

$= \frac{1 \times (\mathrm{cosec} A - \cot a)}{1 \times (\sec A - \tan A)}$

$= \frac{\mathrm{cosec} A - \cot A}{\sec A - \tan A} =$ ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

www.bdniyog.com

www.bdniyog.com

১২। $\frac{\text{cosec}A}{\text{cosec}A-1}+\frac{\text{cosec}A}{\text{cosec}A+1}=2\sec^2A$

সমাধান : বামপক্ষ $=\frac{\text{cosec}A}{\text{cosec}A-1}+\frac{\text{cosec}A}{\text{cosec}A+1}$

$=\frac{\text{cosec}A(\text{cosec}A+1)+\text{cosec}A(\text{cosec}A-1)}{(\text{cosec}A-1)(\text{cosec}A+1)}$

$=\frac{\text{cosec}^2A+\text{cosec}A+\text{cosec}^2A-\text{cosec}A}{\text{cosec}^2A-1}$

$=\frac{2\,\text{cosec}^2A}{\cot^2A}$ [$\because \text{cosec}^2A-1=\cot^2A$]

$=2\,\text{cosec}^2A\times\frac{1}{\cot^2A}$

$=2\,\text{cosec}^2A.\tan^2A$

$=2\frac{1}{\sin^2A}.\frac{\sin^2A}{\cos^2A}$

$=2\frac{1}{\cos^2A}$

$=2\sec^2A$

= ডানপক্ষ

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

১৩। $\frac{1}{1+\sin A}+\frac{1}{1-\sin A}=2\sec^2A$

সমাধান : বামপক্ষ $=\frac{1}{1+\sin A}+\frac{1}{1-\sin A}$

$=\frac{1-\sin A+1+\sin A}{(1+\sin A)(1-\sin A)}$

$=\frac{2}{1-\sin^2A}$

$=\frac{2}{\cos^2A}$

$=2.\frac{1}{\cos^2A}$

$=2\sec^2A$

= ডানপক্ষ

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

১৪। $\frac{1}{\text{cosec}A-1}-\frac{1}{\text{cosec}A+1}=2\tan^2A$

সমাধান : বামপক্ষ $=\frac{1}{\text{cosec}A-1}-\frac{1}{\text{cosec}A+1}$

$=\frac{(\text{cosec}A+1)-(\text{cosec}A-1)}{(\text{cosec}A-1)(\text{cosec}A+1)}$

$=\frac{\text{cosec}A+1-\text{cosec}A+1}{\text{cosec}^2A-1}$

$=\frac{2}{\text{cosec}^2A-1}$

$=\frac{2}{\cot^2A}$ [$\because \text{cosec}^2A-1=\cot^2A$]

$=2.\frac{1}{\cot^2A}$

$=2\tan^2A$

= ডানপক্ষ

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

১৫। $\frac{\sin A}{1-\cos A}+\frac{1-\cos A}{\sin A}=2\,\text{cosec}A$

সমাধান : বামপক্ষ $=\frac{\sin A}{1-\cos A}+\frac{1-\cos A}{\sin A}$

$=\frac{\sin^2A+(1-\cos A)^2}{\sin A(1-\cos A)}$

$=\frac{\sin^2A+1-2\cos A+\cos^2A}{\sin A(1-\cos A)}$

$=\frac{(\sin^2A+\cos^2A)+1-2\cos A}{\sin A(1-\cos A)}$

$=\frac{1+1-2\cos A}{\sin A(1-\cos A)}$ [$\because \sin^2A+\cos^2A=1$]

$=\frac{2-2\cos A}{\sin A(1-\cos A)}$

$=\frac{2(1-\cos A)}{\sin A(1-\cos A)}$

$=\frac{2}{\sin A}$

$=\frac{2}{\frac{1}{\text{cosec}A}}$ [$\because \sin A=\frac{1}{\text{cosec}A}$]

$=2\times\frac{\text{cosec}A}{1}$

$=2\,\text{cosec}A$

= ডানপক্ষ

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

১৬। $\frac{\tan A}{\sec A+1}-\frac{\sec A-1}{\tan A}=0$

সমাধান : বামপক্ষ $=\frac{\tan A}{\sec A+1}-\frac{\sec A-1}{\tan A}$

$=\frac{\tan^2A-(\sec A-1)(\sec A+1)}{\tan A(\sec A+1)}$

$=\frac{\tan^2A-(\sec^2A-1)}{\tan A(\sec A+1)}$

$=\frac{\tan^2A-\tan^2A}{\tan A(\sec A+1)}$ [$\because \sec^2A-1=\tan^2A$]

$=\frac{0}{\tan A(\sec A+1)}$

$=0$

= ডানপক্ষ

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

১৭। $(\tan\theta+\sec\theta)^2=\frac{1+\sin q}{1-\sin q}$

সমাধান : বামপক্ষ $=(\tan\theta+\sec\theta)^2$

$=\left(\frac{\sin q}{\cos q}+\frac{1}{\cos q}\right)^2$

$=\left(\frac{\sin q+1}{\cos q}\right)^2$

$=\frac{(\sin q+1)^2}{\cos^2q}$

$=\frac{(1+\sin q)^2}{1-\sin^2q}$ [$\because \cos^2\theta=1-\sin^2\theta$]

$=\frac{(1+\sin q)^2}{(1)^2-\sin^2q}$

$=\frac{(1+\sin q)(1+\sin q)}{(1+\sin q)(1-\sin q)}$

www.bdniyog.com

www.bdniyog.com

$= \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$

= ডানপক্ষ

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

১৮। $\frac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan A} = \cot A \cdot \tan B$

সমাধান : বামপক্ষ $= \frac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan A}$

$= \frac{\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\sin A}{\cos A}}$

$= \frac{\frac{\cos A.\cos B + \sin B.\sin A}{\sin A.\cos B}}{\frac{\cos A.\cos B + \sin A \sin B}{\sin B.\cos A}}$

$= \frac{(\cos A.\cos B + \sin A.\sin B)}{\sin A \cos B} \times \frac{\sin B.\cos A}{(\cos A.\cos B + \sin A.\sin B)}$

$= \frac{\sin B.\cos A}{\sin A.\cos B}$

$= \frac{\sin B}{\cos B} \cdot \frac{\cos A}{\sin A}$

= tanB. cotA

= cotA. tanB

= ডানপক্ষ

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

১৯। $\sqrt{\frac{1-\sin A}{1+\sin A}} = \sec A - \tan A$

সমাধান : বামপক্ষ $= \frac{\sqrt{1-\sin A}}{\sqrt{1+\sin A}}$

$= \frac{\sqrt{1-\sin A}}{\sqrt{1+\sin A}} \times \frac{\sqrt{1-\sin A}}{\sqrt{1-\sin A}}$

[লব ও হরকে $\sqrt{1-\sin A}$ দ্বারা গুণ করে]

$= \frac{(\sqrt{1-\sin A})^2}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$

$= \frac{1-\sin A}{\sqrt{\cos^2 A}}$ $[\because 1-\sin^2 A = \cos^2 A]$

$= \frac{1-\sin A}{\cos A}$

$= \frac{1}{\cos A} - \frac{\sin A}{\cos A}$

= secA − tanA

= ডানপক্ষ

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

২০। $\sqrt{\frac{\sec A + 1}{\sec A - 1}} = \cot A + \operatorname{cosec} A$

সমাধান : বামপক্ষ $= \sqrt{\frac{\sec A + 1}{\sec A - 1}}$

$= \frac{\sqrt{\sec A + 1}}{\sqrt{\sec A - 1}} \times \frac{\sqrt{\sec A + 1}}{\sqrt{\sec A + 1}}$

[লব ও হরকে $\sqrt{\sec A + 1}$ দ্বারা গুণ করে]

$= \frac{(\sqrt{\sec A + 1})^2}{\sqrt{\sec^2 A - 1^2}}$

$= \frac{(\sqrt{\sec A + 1})^2}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$

$= \frac{\sec A + 1}{\sqrt{\tan^2 A}}$ $[\because \sec^2 A - 1 = \tan^2 A]$

$= \frac{\sec A + 1}{\tan A}$

$= \frac{\sec A}{\tan A} + \frac{1}{\tan A}$

$= \sec A \cdot \frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan A}$

= secA.cotA + cotA

$= \frac{1}{\cos A} \times \frac{\cos A}{\sin A} + \cot A$

$= \frac{1}{\sin A} + \cot A$

= cosecA + cotA

= cotA + cosecA

= ডানপক্ষ

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

২১। $\cos A + \sin A = \sqrt{2}\cos A$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cos A - \sin A = \sqrt{2}\sin A$

সমাধান : এখানে, $\cos A + \sin A = \sqrt{2}\cos A$

বা, $\sin A = \sqrt{2}\cos A - \cos A$

বা, $\sin A = (\sqrt{2} - 1)\cos A$

বা, $\cos A = \frac{\sin A}{\sqrt{2}-1}$

বা, $\cos A = \frac{\sin A(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$

[লব ও হরকে $(\sqrt{2}+1)$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\cos A = \frac{(\sqrt{2}+1)\sin A}{(\sqrt{2})^2 - 1^2}$

বা, $\cos A = \frac{(\sqrt{2}+1)\sin A}{2-1}$

বা, $\cos A = (\sqrt{2}+1)\sin A$

বা, $\cos A = \sqrt{2}\sin A + \sin A$

∴ $\cos A - \sin A = \sqrt{2}\sin A$ (প্রমাণিত)

২২। যদি $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হয়, তবে $\frac{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cot A = \frac{1}{\tan A}$

$= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

www.bdniyog.com

www.bdniyog.com

$= 1 \times \frac{\sqrt{3}}{1}$

$= \sqrt{3}$

$\cot A = \sqrt{3}$

প্রদত্ত রাশি $= \frac{\text{cosec}^2A - \sec^2A}{\text{cosec}^2A + \sec^2A}$

$= \frac{(1 + \cot^2A) - (1 + \tan^2A)}{(1 + \cot^2A) + (1 + \tan^2A)}$

$= \frac{1 + \cot^2A - 1 - \tan^2A}{2 + \cot^2A + \tan^2A}$

$= \frac{\cot^2A - \tan^2A}{2 + \cot^2A + \tan^2A}$

$= \frac{(\sqrt{3})^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{2 + (\sqrt{3})^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$

[tanA এবং cotA এর মান বসিয়ে]

$= \frac{3 - \frac{1}{3}}{2 + 3 + \frac{1}{3}}$

$= \frac{\frac{9-1}{3}}{\frac{6+9+1}{3}}$

$= \frac{\frac{8}{3}}{\frac{16}{3}}$

$= \frac{8}{3} \times \frac{3}{16} = \frac{1}{2}$

অতএব, নির্ণেয় মান $= \frac{1}{2}$ (Ans.)

২৩। $\text{cosec } A - \cot A = \frac{4}{3}$ হলে, $\text{cosec}A + \cot A$ এর মান কত?

সমাধান : দেওয়া আছে,

$\text{cosec}A - \cot A = \frac{4}{3}$

বা, $\frac{(\text{cosec}A - \cot A)(\text{cosec}A + \cot A)}{(\text{cosec } A + \cot A)} = \frac{4}{3}$

বা, $\frac{\text{cosec}^2A - \cot^2A}{\text{cosec}A + \cot A} = \frac{4}{3}$

বা, $\frac{1}{\text{cosec}A + \cot A} = \frac{4}{3}$

বা, $4(\text{cosec}A + \cot A) = 3$

$\therefore \text{cosec}A + \cot A = \frac{3}{4}$ (Ans.)

২৪। $\cot A = \frac{b}{a}$ হলে, $\frac{a \sin A - b \cos A}{a \sin A + b \cos A}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : এখন, $\frac{a \sin A - b \cos A}{a \sin A + b \cos A}$

$= \frac{a.\frac{\sin A}{\sin A} - b.\frac{\cos A}{\sin A}}{a.\frac{\sin A}{\sin A} + b.\frac{\cos A}{\sin A}}$

[লব ও হরকে sinA দ্বারা ভাগ করে]

$= \frac{a - b.\cot A}{a + b.\cot A}$

$= \frac{a - b.\frac{b}{a}}{a + b.\frac{b}{a}}$ [cotA এর মান বসিয়ে]

$= \frac{a - \frac{b^2}{a}}{a + \frac{b^2}{a}}$

$= \frac{\frac{a^2 - b^2}{a}}{\frac{a^2 + b^2}{a}}$

$= \frac{a^2 - b^2}{a} \times \frac{a}{a^2 + b^2}$

$= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$

অতএব, নির্ণেয় মান $= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ (Ans.)

www.bdniyog.com

I ❤ MyMahbub

www.bdniyog.com

www.bdniyog.com

❑ অনুশীলনী- ৯.২

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

❑ কাজ [পৃষ্ঠা- ১৬৪]

১। $\sec(90° - \theta) = \frac{5}{3}$ হলে, $\text{cosec}\theta - \cot\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\sec(90° - \theta) = \frac{5}{3}$

বা, $\text{cosec}\theta = \frac{5}{3}$

আমরা জানি, $\cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta - 1$

$= \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 1 = \frac{25}{9} - 1 = \frac{16}{9}$

$\therefore \cot\theta = \frac{4}{3}$

প্রদত্ত রাশি $= \text{cosec}\theta - \cot\theta$

$= \frac{5}{3} - \frac{4}{3} = \frac{5-4}{3} = \frac{1}{3}$

উত্তর : $\frac{1}{3}$

পাঠ্যবইয়ের গুরুত্বপূর্ণ উদাহরণ

উদাহরণ ১। মান নির্ণয় কর :

(ক) $\frac{1 - \sin^2 45°}{1 + \sin^2 45°} + \tan^2 45°$

(খ) $\cot 90° . \tan 0° . \sec 30° . \text{cosec } 60°$

(গ) $\sin 60° . \cos 30° + \cos 60° . \sin 30°$

(ঘ) $\frac{1 - \tan^2 60°}{1 + \tan^2 60°} + \sin^2 60°$

সমাধান :

(ক) প্রদত্ত রাশি $= \frac{1 - \sin^2 45°}{1 + \sin^2 45°} + \tan^2 45°$

$= \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + (1)^2$

$[\because \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ও } \tan 45° = 1]$

$\frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} \cdot 1 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + 1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$

(খ) প্রদত্ত রাশি $= \cot 90° . \tan 0° . \sec 30° . \text{cosec } 60°$

$= 0 . 0 . \frac{1}{\sqrt{3}} . \frac{2}{\sqrt{3}} = 0$

$[\because \cot 90° = 0, \tan 0° = 0, \sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}}, \text{cosec } 60° = \frac{2}{\sqrt{3}}]$

(গ) প্রদত্ত রাশি $= \sin 60° . \cos 30° + \cos 60° . \sin 30°$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} . \frac{1}{2}$

$[\because \sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}]$

$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

(ঘ) $\frac{1 - \tan^2 60°}{1 + \tan^2 60°} + \sin^2 60°$

$= \frac{1 - (\sqrt{3})^2}{1 + (\sqrt{3})^2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \frac{1-3}{1+3} + \frac{3}{4} = \frac{-2}{4} + \frac{2}{4}$

$= \frac{-2+3}{4} = \frac{1}{4}$

উদাহরণ ২।

(ক) $\sqrt{2}\cos(A - B) = 1$, $2\sin(A + B) \sqrt{3}$ এবং A, B সূক্ষ্মকোণ হলে, A ও B এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $\frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$ হলে, A এর মান নির্ণয় কর।

(গ) প্রমাণ কর যে, $\cos 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$, যদি $A = 45°$ হয়।

(ঘ) সমাধান কর : $2\cos^2\theta + 3\sin\theta - 3 = 0$, যেখানে θ সূক্ষ্মকোণ।

সমাধান : (ক) $\sqrt{2}\cos(A - B) = 1$

বা, $\cos(A - B) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\cos(A - B) = \cos 45°$ $[\because \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}]$

$\therefore A - B = 45° \ldots\ldots (i)$

এবং $2\sin(A + B) = \sqrt{3}$

বা, $2\sin(A + B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $\sin(A + B) = \sin 60°$ $[\because \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}]$

$\therefore A + B = 60° \ldots\ldots (ii)$

(i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$2A = 105°$

www.bdniyog.com

www.bdniyog.com

$\therefore A = \frac{105^\circ}{2} = 52\frac{1^\circ}{2}$

আবার, (ii) হতে (i) বিয়োগ করে পাই,

$2B = 15^\circ$

বা, $B = \frac{15^\circ}{2}$

$\therefore B = 7\frac{1^\circ}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় $A = 52\frac{1^\circ}{2}$ ও $B = \frac{1^\circ}{2}$

(খ) $\frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\cos A - \sin A + \cos A + \sin A}{\cos A - \sin A - \cos A - \sin A} = \frac{1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}-1-\sqrt{3}}$

বা, $\frac{2\cos A}{-2\sin A} = \frac{2}{-2\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\cos A}{\sin A} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\cot A = \cot 60^\circ$

$\therefore A = 60^\circ$

(গ) দেওয়া আছে, $A = 45^\circ$

প্রমাণ করতে হবে, $\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

বামপক্ষ $= \cos 2A$

$= \cos(2 \times 45^\circ) = \cos 90^\circ = 0$

ডানপক্ষ $= \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

$= \frac{1-\tan^2 45^\circ}{1+\tan^2 45^\circ} = \frac{1-(1)^2}{1+(1)^2}$

$= \frac{0}{2} = 0$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

(ঘ) প্রদত্ত সমীকরণ $2\cos^2\theta + 3\sin\theta - 3 = 0$

বা, $2(1-\sin^2\theta) - 3(1-\sin\theta) = 0$

বা, $2(1+\sin\theta)(1-\sin\theta) - 3(1-\sin\theta) = 0$

বা, $(1-\sin\theta)\{2(1+\sin\theta) - 3\} = 0$

বা, $(1-\sin\theta)\{2\sin\theta - 1\} = 0$

বা, $1 - \sin\theta = 0$ অথবা, $2\sin\theta - 1 = 0$

$\therefore \sin\theta = 1$ বা, $2\sin\theta = 1$

বা, $\sin\theta = \sin 90^\circ$ বা, $\sin\theta = \frac{1}{2}$

$\therefore \theta = 90^\circ$ বা, $\sin\theta = \sin 30^\circ$

বা, $\theta = 30^\circ$

যেহেতু θ সূক্ষ্মকোণ, সেহেতু $\theta = 30^\circ$

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ৯.২

১। $\cos\theta = \frac{1}{2}$ হলে $\cot\theta$ এর মান কোনটি ?

ক) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ খ) 1

গ) $\sqrt{3}$ ঘ) 2

উত্তর : ক. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

২. i. $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

ii. $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

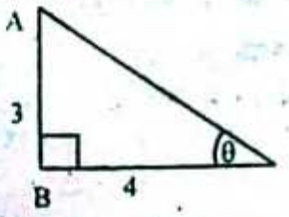
iii. $\cot^2\theta = 1 - \tan^2\theta$

পাশের তথ্যের আলোকে নিম্নের কোনটি সঠিক ?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর : ক. i ও ii.



চিত্র অনুযায়ী ৩ ও ৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

৩। $\sin\theta$ এর মান কোনটি ?

ক) $\frac{3}{4}$ খ) $\frac{4}{3}$

গ) $\frac{3}{5}$ ঘ) $\frac{4}{3}$

উত্তর : গ) $\frac{3}{5}$

৪। $\cot\theta$ এর মান কোনটি ?

ক) $\frac{3}{4}$ খ) $\frac{4}{3}$

গ) $\frac{3}{5}$ ঘ) $\frac{4}{3}$

উত্তর : ঘ) $\frac{4}{3}$

মান নির্ণয় কর (৫ – ৮)

৫। $\frac{1-\cot^2 60^\circ}{1+\cot^2 60^\circ}$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি $= \frac{1-\cot^2 60^\circ}{1+\cot^2 60^\circ}$

$= \frac{1-(\cot 60^\circ)^2}{1+(\cot 60^\circ)^2}$

$= \frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$

$= \frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}$

$= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= \frac{1}{2}$ (Ans.)

www.bdniyog.com

www.bdniyog.com

৬। $\tan45^\circ \sin^2 60^\circ \tan30^\circ \tan60^\circ$

সমাধান : $\tan45^\circ \sin^2 60^\circ \tan30^\circ \tan60^\circ$

$= 1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}$

$= 1 \frac{3}{4}$

$= \frac{3}{4}$ (Ans.)

৭। $\frac{1 - \cos^2 60^\circ}{1 + \cos^2 60^\circ} + \sec^2 60^\circ$

সমাধান : $\frac{1 - \cos^2 60^\circ}{1 + \cos^2 60^\circ} + \sec^2 60^\circ$

$= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + (2)^2$

$= \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} + 4$

$= \frac{\frac{4 - 1}{4}}{\frac{4 + 1}{4}} + 4$

$= \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} + 4$

$= \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} + 5$

$= \frac{3}{5} + 4$

$= \frac{3 + 20}{5}$

$= \frac{23}{5}$ (Ans.)

৮। $\cos 45^\circ \cdot \cot^2 60 \cdot \operatorname{cosec}^2 30^\circ$

সমাধান : $\cos 45^\circ \cdot \cot^2 60 \cdot \operatorname{cosec}^2 30^\circ$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot (2)^2$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3} \cdot 4$

$= \frac{4}{3\sqrt{2}}$ (Ans.)

দেখাও যে, (৯ – ১১)

৯। $\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ = \cos 60^\circ$

সমাধান : বামপক্ষ $= \cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ$

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$ [$\because \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ এবং $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$]

$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$

$= \frac{3 - 1}{4}$

$= \frac{2}{4}$

$= \frac{1}{2}$

$= \cos 60^\circ$ [$\because \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$]

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ $=$ ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

১০। $\sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ = \sin 90^\circ$

সমাধান : বামপক্ষ $= \sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ$

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$ [মান বসিয়ে]

$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$

$= \frac{3 + 1}{4}$

$= \frac{4}{4}$

$= 1$

ডানপক্ষ $= \sin 90^\circ$ [$\because \sin 90^\circ = 1$]

$= 1$

$\therefore$ বামপক্ষ $=$ ডানপক্ষ (দেখানো হল)

১১। $\cos 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \sin 30^\circ = \cos 30^\circ$

সমাধান : বামপক্ষ $= \cos 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \sin 30^\circ$

$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}$

$= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{4}$

$= \frac{2\sqrt{3}}{4}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

ডানপক্ষ $= \cos 30^\circ$ [$\because \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$]

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ বামপক্ষ $=$ ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

১২। $\sin 3A = \cos 3A$, যদি $A = 15^\circ$ হয়।

সমাধান : দেয়া আছে, $A = 15^\circ$

এখন, বামপক্ষ $= \sin 3A$

$= \sin (3 \times 15^\circ)$

$= \sin 45^\circ$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$

আবার, ডানপক্ষ $= \cos 3A$

$= \cos (3 \times 15^\circ)$

$= \cos 45^\circ$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ বামপক্ষ $=$ ডানপক্ষ (দেখানো হল)

www.bdniyog.com