www.bdniyog.com

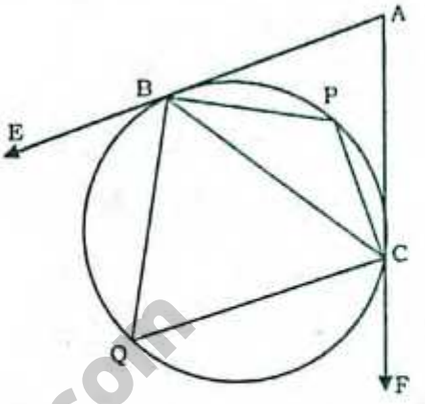
❑ অনুশীলনী- ৮.৩

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ৮.৩

১। $\triangle ABC$ এ $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় P বিন্দুতে এবং বহির্দ্বিখণ্ডকদ্বয় Q বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ কর যে, B, P, C, Q বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

সমাধান ঃ সাধারণ নির্বচন ঃ ΔABC-এ $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় P বিন্দুতে এবং বহির্দ্বিখণ্ডকদ্বয় Q বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ করতে হবে যে, B, P, C, Q বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

বিশেষ নির্বচন ঃ ΔABC- এর $\angle B$ ও $\angle C$-এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় P বিন্দুতে এবং $\angle B$ ও $\angle C$-এর বহির্দ্বিখণ্ডকদ্বয় Q বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, B, P, C, Q বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।



প্রমাণ ঃ যেহেতু $\angle ABC + \angle CBE$ = দুই সমকোণ

$\therefore \angle PBC + \angle CBQ = \angle PBQ$ = এক সমকোণ।

অনুরূপে, $\angle PCB + \angle BCQ = \angle PCQ$ = এক সমকোণ।

$\therefore$ BPCQ চতুর্ভুজের $\angle PBQ + \angle PCQ$ = দুই সমকোণ,

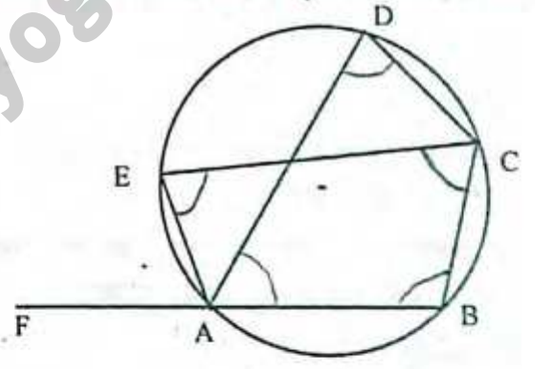
$\therefore$ BPCQ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

$\therefore$ B, P, C, Q বিন্দু চারটি সমবৃত্ত। (প্রমাণিত)

২। প্রমাণ কর যে, বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের যে কোনো কোণের সমদ্বিখণ্ডক ও তার বিপরীত কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক বৃত্তের উপর ছেদ করে।

সমাধান ঃ সাধারণ নির্বচন ঃ প্রমাণ করতে হবে যে, বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের যে কোনো কোণের সমদ্বিখণ্ডক ও তার বিপরীত কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক বৃত্তের উপর ছেদ করে।

বিশেষ নির্বচন ঃ মনে করি, ABCD চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ। এর $\angle C$-এর সমদ্বিখণ্ডক CE এবং $\angle C$-এর বিপরীত $\angle A$-এর বহির্দ্বিখণ্ডক AE পরস্পর E বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, E বিন্দু বৃত্তস্থ অর্থাৎ বৃত্তের উপর ছেদ করে।



প্রমাণ ঃ ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ হওয়ায়,

$\angle BAD + \angle BCD$ = দুই সমকোণ।

কিন্তু F, A, B একই সরলরেখায় হওয়ায়,

$\angle FAD + \angle BAD$ = এক সরলকোণ = দুই সমকোণ।

সুতরাং, $\angle BAD + \angle BCD = \angle FAD + \angle BAD$

বা, $\angle BCD = \angle FAD$ [উভয় পক্ষ থেকে $\angle BAD$ বাদ দিয়ে]

বা, $\frac{1}{2} \angle BCD = \frac{1}{2} \angle FAD$

বা, $\angle ECB = \angle EAD$

এখন, $\angle EAB + \angle ECB$

$= \angle EAD + \angle BAD + \angle ECB$

$= \angle ECB + \angle BAD + \angle ECB$ [$\because \angle EAD = \angle ECB$]

$= \angle BAD + 2\angle ECB$

$= \angle BAD + \angle BCD$

= দুই সমকোণ

সুতরাং $\angle EAB$ ও $\angle ECB$ কোণদ্বয় বিপরীত এবং সম্পূরক হওয়ায়,

ABCE চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ।

$\therefore$ E বিন্দু বৃত্তস্থ। (প্রমাণিত)

৩। ABCD একটি বৃত্ত। $\angle CAB$ এবং $\angle CBA$ এর সমদ্বিখণ্ডক দুইটি P বিন্দুতে এবং $\angle DBA$ ও $\angle DAB$ কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক দুইটি Q বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ কর যে, A, Q, P, B বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

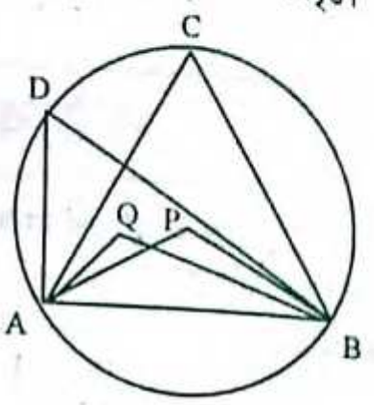
সমাধান ঃ সাধারণ নির্বচন ঃ ABCD একটি বৃত্ত। $\angle CAB$ এবং $\angle CBA$ এর সমদ্বিখণ্ডক দুইটি P বিন্দুতে এবং $\angle DBA$ ও

www.bdniyog.com

www.bdniyog.com

$\angle DAB$ কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক দুইটি Q বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ করতে হবে যে, A, Q, P, B বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

বিশেষ নির্বচন ঃ মনে করি, ABCD একটি বৃত্ত। $\angle CAB$ এবং $\angle CBA$ এর সমদ্বিখণ্ডক দুইটি P বিন্দুতে এবং $\angle DBA$ ও $\angle DAB$ কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক দুইটি Q বিন্দুতে মিলিত হয়েছে, প্রমাণ করতে হবে যে, A, Q, P, B বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।



প্রমাণ ঃ ΔABC এ $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

ΔPAB এ $\angle P + \angle PAB + \angle PBA = 180°$

বা, $\angle P + \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = 180°$

বা, $\angle P + \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = 180° + \frac{1}{2}\angle C$

[উভয় পক্ষে $\frac{1}{2}\angle C$ যোগ করে]

বা, $\angle P + \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C) = 180° + \frac{1}{2}\angle C$

বা, $\angle P + \frac{1}{2}\ 180° = 180° + \frac{1}{2}\angle C$

বা $\angle P + 90° = 180° + \frac{1}{2}\angle C$

বা $\angle P = 180° - 90° + \frac{1}{2}\angle C = 90° + \frac{1}{2}\angle C$

এরূপে ΔABD নিয়ে প্রমাণ করা যায় যে, $\angle Q = 90° + \frac{1}{2}\angle D$

AB একই চাপের উপর অবস্থিত বলে $\angle C = \angle D$

$\therefore \angle Q = 90° + \frac{1}{2}\angle C$

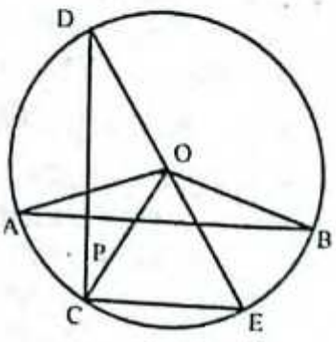
সুতরাং, $\angle P = \angle Q$

এখন AB বৃত্তের চাপ এবং P ও Q বৃত্তস্থ কোণ। $\angle P = \angle Q$ অর্থাৎ, বৃত্তস্থ কোণ দুইটি পরস্পর সমান হওয়ায় A, Q, P, B বিন্দু চারটি সমবৃত্ত। (প্রমাণিত)

৪। **O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরে অবস্থিত কোনো বিন্দুতে সমকোণে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ কর যে, $\angle AOD + \angle BOC$ = দুই সমকোণ।**

সমাধান ঃ সাধারণ নির্বচন ঃ O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরে অবস্থিত কোনো বিন্দুতে সমকোণে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AOD + \angle BOC$ = দুই সমকোণ।

বিশেষ নির্বচন ঃ মনে করি O কেন্দ্রবিশিষ্ট ACBD একটি বৃত্ত। AB ও CD জ্যা-দ্বয় বৃত্তের অভ্যন্তরে যে কোনো বিন্দু P তে সমকোণে অর্থাৎ 90° কোণে মিলিত হয়েছে।



প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AOD + \angle BOC$ = দুই সমকোণ।

অঙ্কন ঃ DO কে বর্ধিত করি। এটি পরিধিকে E বিন্দুতে ছেদ করে। C, E যোগ করি।

প্রমাণ ঃ $\angle DCE$ = এক সমকোণ [অর্ধবৃত্তস্থ কোণ বলে]

আবার, $\angle DPB$ = এক সমকোণ [কল্পনানুসারে]

$\therefore \angle DCE = \angle DPB$

কিন্তু কোণ দুইটি অনুরূপ কোণ বলে, AB || CE

যেহেতু, সমান্তরাল সরলরেখা সমান চাপ উৎপন্ন করে

সেহেতু, AC চাপ = BE চাপ

$\therefore \angle AOC = \angle BOE$

এখন, $\angle AOD + \angle AOC + \angle COE$ = এক সরলকোণ = দুই সমকোণ

বা, $\angle AOD + \angle BOE + \angle COE$ = দুই সমকোণ

বা, $\angle AOD + \angle BOC$ = দুই সমকোণ

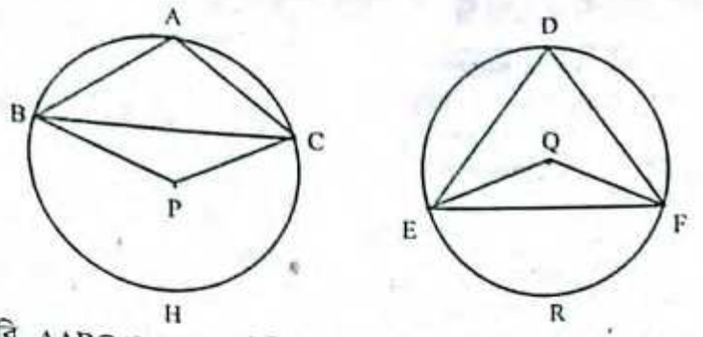
$\therefore \angle AOD + \angle BOC$ = দুই সমকোণ। (প্রমাণিত)

www.bdniyog.com

www.bdniyog.com

৫। সমান সমান ভূমির উপর অবস্থিত যে কোনো দুইটি ত্রিভুজের শিরঃকোণদ্বয় সম্পূরক হলে, প্রমাণ কর যে, তাদের পরিবৃত্তদ্বয় সমান হবে।

সমাধান ঃ সাধারণ নির্বচন ঃ সমান সমান ভূমির উপর অবস্থিত যে কোনো দুইটি ত্রিভুজের শিরঃকোণদ্বয় সম্পূরক হলে, প্রমাণ করতে হবে যে, তাদের পরিবৃত্তদ্বয় সমান হবে।



বিশেষ নির্বচন ঃ মনে করি, ΔABC ও ΔDEF দুইটির ভূমি $BC = EF$, শিরঃকোণদ্বয় যথাক্রমে $\angle A$ ও $\angle D$। $\angle A + \angle D = 2$ সমকোণ হলে, প্রমাণ করতে হবে যে, ত্রিভুজদ্বয়ের পরিবৃত্তদ্বয় সমান।

প্রমাণ ঃ P কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে BHC চাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ $\angle BPC$ এবং বৃত্তস্থ $\angle BAC$ বা $\angle A$

$\therefore \angle BPC = 2\angle A$

আবার, Q কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে ERF চাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ $\angle EQF$ এবং বৃত্তস্থ $\angle D$

$\therefore \angle EQF = 2\angle D$

সুতরাং, $\angle BPC + \angle EQF = 2\angle A + 2\angle D$

$= 2(\angle A + \angle D)$

$= 2 \times 2$ সমকোণ

$= 4$ সমকোণ।

কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণের পরিমাপ 4 সমকোণ এবং $BC = EF$ হওয়ায় BC দ্বারা ছিন্ন উপচাপ = EF দ্বারা ছিন্ন উপচাপ।

অর্থাৎ, BAC উপচাপ = ERF উপচাপ

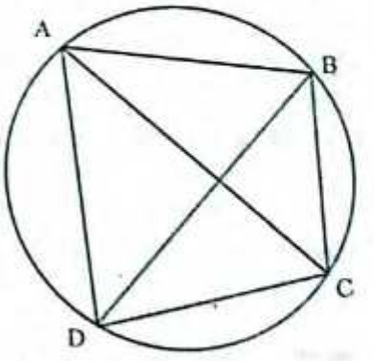
এবং BHC অধিচাপ = EDF অধিচাপ।

অতএব, BAC চাপ + BHC চাপ = ERF চাপ + EDF চাপ

বা, ΔABC এর পরিবৃত্ত = ΔDEF এর পরিবৃত্ত। (প্রমাণিত)

৬। ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক। AC রেখা যদি $\angle BAD$ এর সমদ্বিখন্ডক হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $BC = CD$.

সমাধান ঃ সাধারণ নির্বচন ঃ ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক। AC রেখা যদি $\angle BAD$ এর সমদ্বিখন্ডক হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $BC = CD$.



বিশেষ নির্বচন ঃ মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক। AC রেখা, $\angle BAD$ এর সমদ্বিখন্ডক।

প্রমাণ করতে হবে যে, $BC = CD$.

অঙ্কন ঃ B, D যোগ করি।

প্রমাণ ঃ ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক।

$\therefore$ A, B, C, D বিন্দু চারটি সমবৃত্ত। [$\because$ চতুর্ভুজের দুই বিপরীত কোণ সম্পূরক হলে ইহার শীর্ষবিন্দু চারটি সমবৃত্ত]

AC, $\angle BAD$ এর সমদ্বিখন্ডক [দেওয়া আছে]

$\therefore \angle BAC = \angle DAC$ ..... (i)

এখন, একই চাপ CD এর উপর বৃত্তস্থ $\angle DAC$ এবং বৃত্তস্থ $\angle DBC$.

$\therefore \angle DAC = \angle DBC$ ..... (ii) [$\because$ বৃত্তের একই চাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো সমান]

আবার, একই চাপ BC এর উপর বৃত্তস্থ $\angle BAC$ এবং $\angle BDC$.

$\therefore \angle BAC = \angle BDC$ [ঐ একই কারণে]

বা, $\angle DAC = \angle BDC$ [(i) নং থেকে]

বা, $\angle DBC = \angle BDC$ [(ii) নং থেকে].

অর্থাৎ ΔBCD এর

$\angle BDC = \angle DBC$

$\therefore$ $BC = CD$ [সমান সমান কোণের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান] (প্রমাণিত)

www.bdniyog.com

www.bdniyog.com

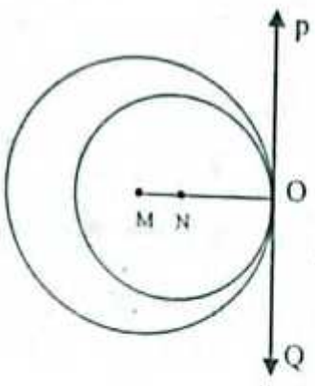
❑ অনুশীলনী- ৮.৪

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

❑ কাজ : প্রমাণ কর যে, দুটি বৃত্ত পরস্পর অন্তঃস্পর্শ করলে, তাদের কেন্দ্রদ্বয় ও স্পর্শবিন্দু সমরেখ হবে। [পৃষ্ঠা-১৪৫]

সমাধান সাধারণ নির্বাচন : প্রমাণ করতে হবে যে, দুটি বৃত্ত পরস্পর অন্তঃস্পর্শ করলে, তাদের কেন্দ্রদ্বয় ও স্পর্শবিন্দু সমরেখা হবে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, M এবং N কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত পরস্পর O বিন্দুতে অন্তঃস্পর্শ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, M, N এবং O বিন্দু তিনটি সমরেখ।



অঙ্কন : O বিন্দুতে বৃত্ত দুটির সাধারণ স্পর্শক POQ আঁকি এবং O, M ও O, N যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
১। M কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে POQ স্পর্শক এবং MO স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ। $MO \perp OP$ তদ্রূপ $ON \perp OP$	[অঙ্কনানুসারে] [বৃত্তের যেকোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব।] [১ নং হতে]
২। OM এবং ON উভয়ই POQ রেখার O বিন্দুতে লম্ব। ∴ OM এবং ON একই সরলরেখায় অবস্থিত। ∴ M, N এবং O বিন্দু তিনটি সমরেখ। [প্রমাণিত]	

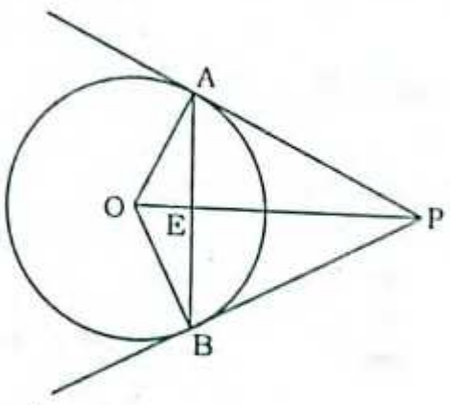
পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ৮.৪

১। O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু P থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক টানা হল। প্রমাণ কর যে, OP সরলরেখা স্পর্শ-জ্যা এর লম্ব-দ্বিখণ্ডক।

সমাধান সাধারণ নির্বচন : O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু P থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক টানা হল। প্রমাণ করতে হবে যে, OP সরলরেখা স্পর্শ-জ্যা এর লম্ব-দ্বিখণ্ডক।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, P, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের বহিঃস্থ একটি বিন্দু। P থেকে বৃত্তটির উপর PA ও PB দুইটি স্পর্শক টানা হল। অতএব, AB তার স্পর্শ জ্যা।

মনে করি OP, AB কে E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, OP, AB কে E বিন্দুতে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।



অঙ্কন : O, A এবং O, B যোগ করি।

প্রমাণ : (১) ΔOAP এবং ΔOBP দ্বয়ের মধ্যে,

$OA = OB$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]

$PA = PB$ [বহিঃস্থ বিন্দু থেকে বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় সমান বলে]

এবং OP উভয় ত্রিভুজের সাধারণ বাহু।

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ $\angle AOP = \angle BOP$

অর্থাৎ, $\angle AOE = \angle BOE$

(২) ΔAOE এবং ΔBOE দ্বয়ের মধ্যে,

$OA = OB$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]

$\angle AOE = \angle BOE$ [পূর্বে প্রমাণিত]

এবং OE সাধারণ বাহু

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ AE = BE অর্থাৎ E, AB এর মধ্যবিন্দু

www.bdniyog.com

www.bdniyog.com

এবং ∠AEO = ∠BEO

কিন্তু কোণ দুইটি সন্নিহিত কোণ এবং একই সরলরেখায় অবস্থিত বলে প্রত্যেকে এক সমকোণ।

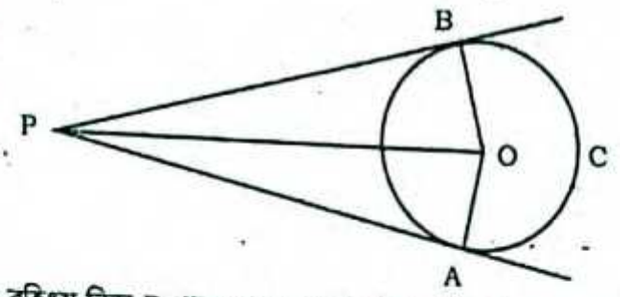
অর্থাৎ, ∠AEO = ∠BEO = এক সমকোণ

∴ OE বা OP, AB এর উপর লম্ব।

∴ OP, AB কে সমকোণে সমদ্বিখন্ডিত করে। (প্রমাণিত)

২। দেওয়া আছে, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং PA ও PB স্পর্শকদ্বয় বৃত্তকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। প্রমাণ কর যে, PO, ∠APB কে সমদ্বিখন্ডিত করে।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : O বৃত্তের কেন্দ্র এবং PA ও PB স্পর্শকদ্বয় বৃত্তকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে স্পর্শ করলে, প্রমাণ করতে হবে যে, PO, ∠APB -কে সমদ্বিখন্ডিত করে।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC বৃত্তের কেন্দ্র O এবং এর বহিঃস্থ বিন্দু P থেকে PA ও PB দুটি স্পর্শক আঁকা হয়েছে। OP কেন্দ্র ও বহিঃস্থ বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা এবং স্পর্শকদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত ∠APB.

প্রমাণ করতে হবে যে, PO রেখা, ∠APB-কে সমদ্বিখন্ডিত করে।

অর্থাৎ ∠APO = ∠BPO

অঙ্কন : O, A এবং O,B যোগ করি।

প্রমাণ : OA এবং OB স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ।

সুতরাং PA এবং PB যথাক্রমে OA এবং OB-এর উপর লম্ব

[∵ বৃত্তের যেকোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব।]

সুতরাং ∠PAO = এক সমকোণ।

এবং ∠PBO= এক সমকোণ।

এখন, ΔAOP এবং ΔBOP-এ PA = PB [∵ বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক টানলে, ঐ বিন্দু থেকে স্পর্শ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব সমান।]

∴ OA = OB [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ।]

এবং অন্তর্ভুক্ত ∠PAO =অন্তর্ভুক্ত ∠PBO [∵ প্রত্যেকে এক সমকোণ।]

∴ ΔAOP ≅ ΔBOP

সুতরাং ∠APO = ∠BPO

অর্থাৎ PO রেখা, ∠APB কে সমদ্বিখন্ডিত করে। (প্রমাণিত)

৩। প্রমাণ কর যে, দুইটি বৃত্ত এককেন্দ্রিক হলে এবং বৃহত্তর বৃত্তটির কোনো জ্যা ক্ষুদ্রতর বৃত্তটিকে স্পর্শ করলে উক্ত জ্যা স্পর্শবিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয়।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, দুইটি বৃত্ত এককেন্দ্রিক হলে এবং বৃহত্তর বৃত্তটির কোনো জ্যা ক্ষুদ্রতর বৃত্তটিকে স্পর্শ করলে উক্ত জ্যা স্পর্শবিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয়।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC এবং PQR দুইটি এককেন্দ্রিক বৃত্তের কেন্দ্র O এবং ABC বৃত্তটি বৃহত্তর। বৃহত্তর ABC বৃত্তের AB জ্যা-টি ক্ষুদ্রতর PQR বৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, AB জ্যা-ট স্পর্শ বিন্দু P তে সমদ্বিখন্ডিত হয়েছে অর্থাৎ P, AB জ্যা-এর মধ্যবিন্দু বা PA = PB.

অঙ্কন : O, A; O, B এবং O, P যোগ করি।

প্রমাণ : PQR বৃত্তের P বিন্দুতে স্পর্শক AB এবং OP স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ।

∴ AB ⊥ OP

অর্থাৎ ∠OPA = ∠OPB = এক সমকোণ।

[∵ বৃত্তের কোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের সাথে লম্ব]

এখন, সমকোণী ΔOAP এবং সমকোণী ΔOBP এ,

অতিভুজ OA = অতিভুজ OB [∵ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এবং OP উভয় ত্রিভুজের সাধারণ বাহু।

∴ ΔOAP ≅ ΔOBP

[∵ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অতিভুজ এবং অন্য একটি অনুরূপ বাহু পরস্পর সমান]

সুতরাং, PA = PB

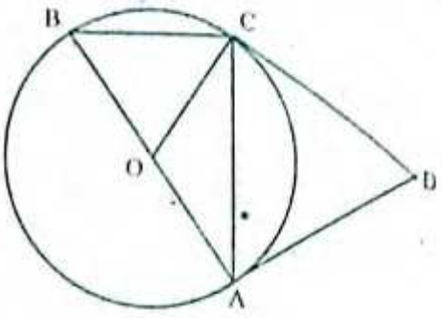
অর্থাৎ P, AB এর মধ্যবিন্দু। (প্রমাণিত)

www.bdniyog.com

www.bdniyog.com

৪। **AB** কোনো বৃত্তের ব্যাস এবং **BC** ব্যাসার্ধের সমান একটি জ্যা। যদি **A** ও **C** বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর **D** বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, **ACD** একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

সমাধান ঃ **সাধারণ নির্বচন ঃ** AB কোনো বৃত্তের ব্যাস এবং BC ব্যাসার্ধের সমান একটি জ্যা। যদি A ও C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর D বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে প্রমাণ করতে হবে যে, ACD একটি সমবাহু ত্রিভুজ।



বিশেষ নির্বচন ঃ মনে করি, O কেন্দ্র বিশিষ্ট ABC একটি বৃত্ত এবং AB তার ব্যাস। OB ব্যাসার্ধের সমান BC একটি জ্যা। A ও C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় AD ও CD পরস্পর D বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। A,C যোগ করায় ACD ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, ACD একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

অঙ্কন ঃ O, C যোগ করি

$\therefore \angle OBC = \angle OCB = 60°$

সুতরাং, $\angle AOC = \angle OBC + \angle OCB$ [ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান বলে]

বা, $\angle AOC = 60° + 60°$

$\therefore \angle AOC = 120°$

আবার, AO এবং OC স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ হওয়ায়;

$\angle DAO =$ এক সমকোণ $= \angle DCO$

সুতরাং, ADCO চতুর্ভুজে $\angle A + \angle C =$ দুই সমকোণ

$\therefore \angle ADC + \angle AOC = 180°$

বা, $\angle ADC = 180° - \angle AOC = 180° - 120° = 60°$

আবার, AD = CD [∵ বহিঃস্থ বিন্দু থেকে স্পর্শ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব সমান]

$\therefore \angle ACD = \angle CAD$

এখন, $\triangle ADC$-এ, $\angle ADC = 60°$

অপর কোণদ্বয় সমান হওয়ায় প্রত্যেকটি কোণ $60°$

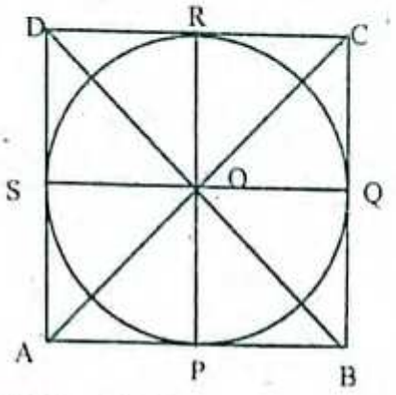
অতএব, $\triangle ACD$ সমবাহু। (প্রমাণিত)

৫। প্রমাণ কর যে, কোনো বৃত্তের পরিলিখিত চতুর্ভুজের যেকোনো দুইটি বিপরীত বাহু কেন্দ্রে যে দুইটি কোণ ধারণ করে তারা পরস্পর সম্পূরক।

সমাধান ঃ **সাধারণ নির্বচন ঃ** প্রমাণ করতে হবে যে, কোনো বৃত্তের পরিলিখিত চতুর্ভুজের যেকোনো দুইটি বিপরীত বাহু কেন্দ্রে যে দুইটি কোণ ধারণ করে তারা পরস্পর সম্পূরক।

বিশেষ নির্বচন ঃ মনে করি, O কেন্দ্র বিশিষ্ট PQRS বৃত্তের পরিলিখিত চতুর্ভুজ ABCD। AB, BC, CD ও DA–বাহুগুলো বৃত্তকে যথাক্রমে P,Q, R,S বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। O,A; O, B; O,C এবং O, D যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AOD + \angle BOC$= দুই সমকোণ এবং $\angle AOB + \angle COD$ = দুই সমকোণ।

অঙ্কন ঃ P, O; Q, O; R, O; S,O যোগ করি।



প্রমাণ ঃ যেহেতু A বিন্দু থেকে AP ও AS বৃত্তের দুইটি স্পর্শক।

$\therefore$ AP = AS

$\therefore \angle AOS = \angle AOP$ ..... (i)

[∵ বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে কোনো বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর সমান এবং তারা কেন্দ্রে সমান সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে।]

অনুরূপভাবে, $\angle DOS = \angle DOR$ -------- (ii)

$\angle COQ = \angle COR$ -------- (iii)

এবং $\angle BOQ = \angle BOP$ -------- (iv)

এখন, (i), (ii), (iii) ও (iv) নং যোগ করে পাই,

$\angle AOS + \angle DOS + \angle COQ + \angle BOQ = \angle AOP + \angle DOR + \angle COR + \angle BOP$

বা, $\angle AOD + \angle BOC = \angle AOP + \angle BOP + \angle DOR + \angle COR$

বা, $\angle AOD + \angle BOC = \angle AOB + \angle COD$

যেহেতু $(\angle AOD + \angle BOC) + (\angle AOB + \angle COD) =$ চার সমকোণ।

সুতরাং, $\angle AOD + \angle BOC =$ দুই সমকোণ

এবং $\angle AOB + \angle COD =$ দুই সমকোণ (প্রমাণিত)

www.bdniyog.com