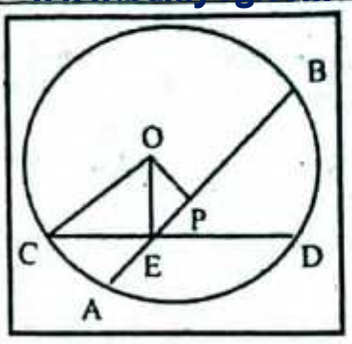
www.bdniyog.com

**বিশেষ নির্বচন :** মনে করি, ABCD বৃত্তের কেন্দ্র O এবং AB হলো একটি নির্দিষ্ট জ্যা, যার মধ্যবিন্দু P. এখন অপর একটি জ্যা CD এর মধ্যবিন্দু E, AB এর উপর অবস্থিত। দেখাতে হবে যে, E যতই P এর নিকটবর্তী হয় CD এর দৈর্ঘ্য ততই বাড়তে থাকে।




**অঙ্কন :** O, P; O, C এবং O, E যোগ করি।

**প্রমাণ :** E, CD জ্যা-এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore$ OE $\perp$ জ্যা CD [$\because$ বৃত্তের ব্যাস ভিন্ন জ্যা-এর মধ্যবিন্দু ও কেন্দ্রের সংযোজক রেখা ঐ জ্যা-এর উপর লম্ব ]

সমকোণী $\Delta OEC$ এ, অতিভুজ = OC

$\therefore OC^2 = CE^2 + OE^2$ [ পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে ]

বা, $OC^2 = (\frac{1}{2} CD)^2 + OE^2$

বা, $OC^2 = \frac{CD^2}{4} + OE^2$ ..... (i).

আবার, P, AB জ্যা -এর মধ্যবিন্দু

$\therefore$ OP $\perp$ জ্যা AB.

অর্থাৎ $\angle OPE = 90°$

সমকোণী $\Delta OEP$ এ অতিভুজ OE.

$\therefore OE^2 = OP^2 + PE^2$ [ পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে ]

(i) নং এ $OE^2$ এর মান বসিয়ে পাই, $OC^2 = \frac{CD^2}{4} + OP^2 + PE^2$

বা, $\frac{CD^2}{4} = OC^2 - OP^2 - PE^2$

বা, $CD^2 = 4(OC^2 - OP^2 - PE^2)$

বা, $CD = 2\sqrt{OC^2 - OP^2 - PE^2}$ ..... (ii)

(ii) নং সমীকরণে OC = বৃত্তের ব্যাসার্ধ এবং OP = O বিন্দু থেকে AB জ্যা-এর দূরত্ব অর্থাৎ OC এবং OP নির্দিষ্ট। কাজেই স্পষ্টত PE এর দৈর্ঘ্য যত ছোট হবে CD এর মান তত বাড়বে।

EP হলো E এবং P এর মধ্যবর্তী দূরত্ব। কাজেই E যতই P এর নিকটবর্তী হবে EP এর দৈর্ঘ্য কমবে। ফলে CD এর দৈর্ঘ্য ততই বাড়তে থাকবে। (প্রমাণিত)

---

# ❑ অনুশীলনী- ৮.২

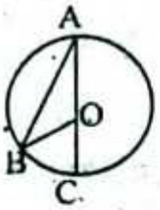
# পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

**❑ কাজ** [পৃষ্ঠা- ১৩৮]

১। O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তের AC কেন্দ্রগামী হলে উপপাদ্য ৪ প্রমাণ কর।

**সমাধান :** O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তের AC কেন্দ্রগামী হলে উপপাদ্য ৪ প্রমাণ করতে হবে।

**বিশেষ নির্বচন :** মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে BC চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle BAC$ এবং কেন্দ্রস্থ $\angle BOC$ এবং AC রেখাংশ কেন্দ্রগামী। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BOC = 2\angle BAC$।




**অঙ্কন :** BO বর্ধিত করি।

**প্রমাণ :**

| | যথার্থতা |
|---|---|
| $\Delta AOB$ এ OA = OB<br>$\therefore \angle OAB = \angle OBA$ | [ত্রিভুজের সমান বাহু দুটির বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সমান] |
| ii. $\Delta AOB$ এর বহিঃস্থ $\angle BOC = \angle OAB + \angle OBA$<br>$\therefore \angle BOC = \angle OAB + \angle OAB$<br>$= 2\angle OAB$<br>$\therefore \angle BOC = 2\angle BAC$<br>[প্রমাণিত] | [ত্রিভুজের বহিঃস্থকোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান] |

**❑ কাজ** [পৃষ্ঠা- ১৩৯]

১। প্রমাণ কর যে, কোনো বৃত্তের উপচাপে অন্তর্লিখিত কোণ স্থূলকোণ।

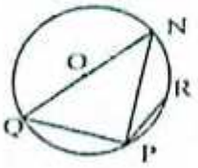
**সমাধান :** সাধারণ নির্বাচন : প্রমাণ করতে হবে যে, কোনো বৃত্তের উপচাপে অন্তর্লিখিত কোণ স্থূলকোণ।

www.bdniyog.com

www.bdniyog.com



**বিশেষ নির্বচন :** O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের QPR চাপটি একটি উপচাপ। Q, P ও P, R যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে, ∠QPR একটি স্থূলকোণ।




**অঙ্কন :** QN ব্যাস আঁকি। P, N যোগ করি।

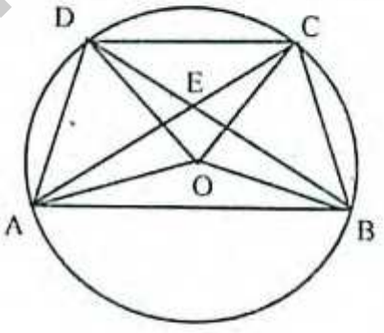
| প্রমাণ : | ধাপ | যথার্থতা |
|---|---|---|
| ১। | ∠QPN একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।<br>∴ ∠QPN = এক সমকোণ। | [এটি অর্ধবৃত্তের উপর অবস্থিত]<br>[অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ] |
| ২। | ∠QPN < ∠QPR<br>∴ ১ সমকোণ ∠QPN, ∠QPR<br>∴ ১ সমকোণ < ∠QPR < ২ সমকোণ<br>∴ ∠QPR একটি স্থূলকোণ।<br>[প্রমাণিত] | [১ নং হতে]<br>[∠QPR সরলরৈখিক কোণের অংশ]<br>একটি অংশ] |

# পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ৮.২

১। **O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোন বৃত্তে ABCD একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ। AC, BD কর্ণদ্বয় E বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, ∠AOB + ∠COD = 2 ∠AEB.**

**সমাধান :** **সাধারণ নির্বচন ঃ** O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোন বৃত্তে ABCD একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ। AC, BD কর্ণদ্বয় E বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ করতে হবে যে, ∠AOB + ∠COD = 2 ∠AEB.

**বিশেষ নির্বচন ঃ** ধরি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে ABCD একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ। ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করেছে।




প্রমাণ করতে হবে যে, ∠AOB + ∠COD = 2 ∠AEB.

**অঙ্কন ঃ** O, A; O, B; O, C ও O, D যোগ করি।

**প্রমাণ ঃ** একই চাপ AB এর উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ ∠AOB এবং পরিধিস্থ ∠ADB।

∴ ∠AOB = 2 ∠ADB ..... (i)

আবার, চাপ CD এর উপর ∠COD কেন্দ্রস্থ এবং ∠DAC পরিধিস্থ।

∴ ∠COD = 2 ∠DAC ---------- (ii)

এখন, (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

∠AOB + ∠COD = 2 ∠ADB + 2∠DAC

বা, ∠AOB + ∠COD = 2 (∠ADB + ∠DAC)

= 2 (∠ADE + ∠DAE)

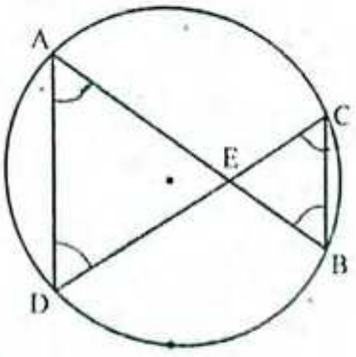
= 2 ∠AEB [∵ ∠AEB, Δ ADE-এর বহিঃস্থ কোণ]

∴ ∠AOB + ∠COD = 2 ∠AEB. **(প্রমাণিত)**

২। **ABCD বৃত্তে AB ও CD জ্যা দুইটি পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করেছে। দেখাও যে, ΔAED ও ΔBEC সদৃশকোণী।**

**সমাধান :** **সাধারণ নির্বচন ঃ** ABCD বৃত্তে AB ও CD জ্যা দুইটি পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করেছে। দেখাতে হবে যে, ΔAED ও ΔBEC সদৃশকোণী।

**বিশেষ নির্বচন ঃ** দেওয়া আছে ABCD বৃত্তে AB এবং CD জ্যা দুইটি পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করেছে। A, D এবং B, C যোগ করা হলে যথাক্রমে ΔAED এবং ΔBEC পাওয়া যায়।




দেখাতে হবে যে, ΔAED ও ΔBEC সদৃশকোণী।

**প্রমাণ ঃ** আমরা জানি, বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো পরস্পর সমান।

এখন, একই চাপ BD এর উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ ∠BAD এবং ∠BCD.

∴ ∠BAD = ∠BCD

অর্থাৎ, ∠EAD = ∠ECB

আবার, একই চাপ AC এর উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ ∠ADC এবং ∠ABC.

∴ ∠ADC = ∠ABC

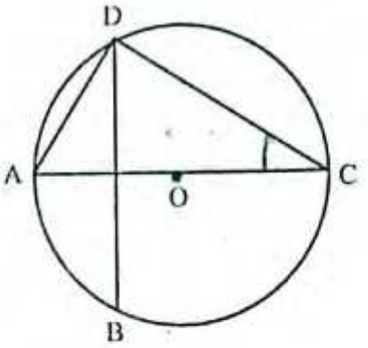
www.bdniyog.com

www.bdniyog.com

অর্থাৎ, $\angle ADE = \angle CBE$
এখন, $\triangle AED$ এবং $\triangle BEC$ এ
$\angle EAD = \angle ECB$;
$\angle ADE = \angle CBE$
এবং $\angle AED = \angle BEC$ [$\because$ বিপ্রতীপ কোণ]
অর্থাৎ $\triangle AED$ এবং $\triangle BEC$ সদৃশকোণী। (প্রমাণিত)

**O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABCD বৃত্তে, $\angle ADB + \angle BDC$ = এক সমকোণ। প্রমাণ কর যে, A, O এবং C একই সরলরেখায় অবস্থিত।**

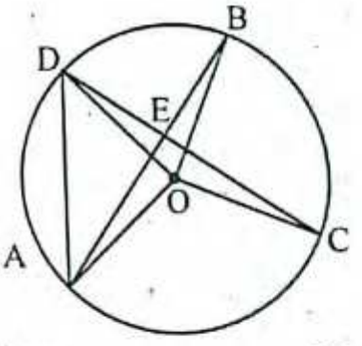
**সমাধান:** সাধারণ নির্বচন ঃ O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABCD বৃত্তে, $\angle ADB + \angle BDC$ = এক সমকোণ।
প্রমাণ করতে হবে যে, A, O এবং C একই সরলরেখায় অবস্থিত।
বিশেষ নির্বচন ঃ দেয়া আছে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABCD বৃত্তে, $\angle ADB + \angle BDC$ = এক সমকোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, A, O এবং C একই সরলরেখায় অবস্থিত।




প্রমাণ ঃ যেহেতু, $\angle ADB + \angle BDC$ = এক সমকোণ
অর্থাৎ, $\angle ADC$ = এক সমকোণ
$\therefore$ $\angle ADC$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ [$\because$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ = এক সমকোণ]
$\therefore$ AC বৃত্তের ব্যাস এবং O তার কেন্দ্র
$\therefore$ A, O এবং C একই সরলরেখায় অবস্থিত। (প্রমাণিত)

**৩। AB ও CD দুইটি জ্যা বৃত্তের অভ্যন্তরে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ কর যে, AC ও BD চাপদ্বয় কেন্দ্রে যে দুইটি কোণ উৎপন্ন করে, তাদের সমষ্টি $\angle AEC$ এর দ্বিগুণ।**

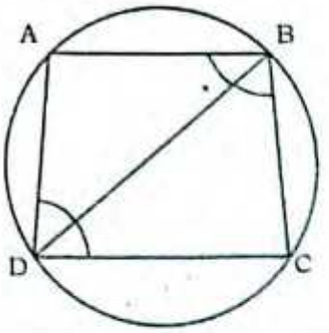
**সমাধান:** সাধারণ নির্বচন ঃ AB ও CD দুইটি জ্যা বৃত্তের অভ্যন্তরে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, AC ও BD চাপদ্বয় কেন্দ্রে যে দুইটি কোণ উৎপন্ন করে তাদের সমষ্টি $\angle AEC$-এর দ্বিগুণ।
বিশেষ নির্বচন ঃ ধরি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ADBC বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরে E বিন্দুতে ছেদ করেছে।
প্রমাণ করতে হবে যে, AC ও BD চাপদ্বয় কেন্দ্রে যে দুইটি কোণ উৎপন্ন করেছে তাদের সমষ্টি $\angle AEC$ এর দ্বিগুণ। অর্থাৎ $\angle BOD + \angle AOC = 2\angle AEC$.




অঙ্কন ঃ A, D যোগ করি।
প্রমাণ ঃ BD চাপের উপর কেন্দ্রস্থ $\angle BOD$ এবং পরিধিস্থ $\angle BAD$ এবং AC চাপের উপর কেন্দ্রস্থ $\angle AOC$ ও পরিধিস্থ $\angle ADC$.
সুতরাং $\angle BOD = 2\angle BAD$..... (i) [কারণ কেন্দ্রস্থ কোণ পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ]
এবং $\angle AOC = 2\angle ADC$.....(ii)
এখন, (i) নং এবং (ii) নং যোগ করে পাই,
$\angle BOD + \angle AOC = 2\angle BAD + 2\angle ADC$
$\therefore$ $\angle BOD + \angle AOC = 2(\angle BAD + \angle ADC)$
$= 2(\angle EAD + \angle ADE)$
$= 2\angle AEC$ [$\because$ $\angle AEC$, $\Delta$ ADE এর বহিঃস্থ কোণ]
$\therefore$ $\angle BOD + \angle AOC = 2\angle AEC$. (প্রমাণিত)

**৪। দেখাও যে, বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহুদ্বয় পরস্পর সমান।**

**সমাধান:** সাধারণ নির্বচন ঃ দেখাতে হবে যে, বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহুদ্বয় পরস্পর সমান।
বিশেষ নির্বচন ঃ মনে করি, ABCD একটি বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয় যথাক্রমে AB ও CD। সুতরাং তীর্যক বাহুদ্বয় হল AD ও BC।
দেখাতে হবে যে, AD = BC




অঙ্কন ঃ B, D যোগ করি।
প্রমাণ ঃ ABCD ট্রাপিজিয়ামে,
AB || CD এবং BD ছেদক [কল্পনা অনুসারে]
$\therefore$ $\angle ABD = \angle BDC$ [একান্তর কোণ]
বা, D চাপের উপর বৃত্তস্থ কোণ BC চাপের উপর বৃত্তস্থ কোণ সমান।

www.bdniyog.com

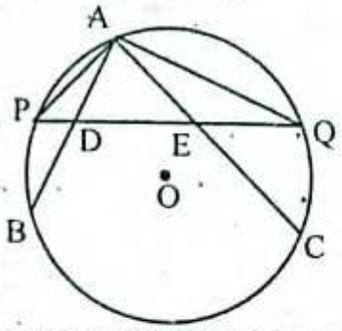
www.bdniyog.com

বা, চাপ AD = চাপ BC [∵ বৃত্তে সমান সমান চাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো পরস্পর সমান]
বা, AD জ্যা = BC জ্যা [ ∵ বৃত্তে সমান সমান চাপ সমান জ্যা ছিন্ন করে]
∴ AD = BC (প্রমাণিত)

৬। AB ও AC কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা এবং P ও Q যথাক্রমে তাদের দ্বারা ছিন্ন উপচাপ দুইটির মধ্যবিন্দু। PQ জ্যা AB ও AC জ্যা-কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে, AD = AE.

**সমাধান:** সাধারণ নির্বচন ঃ AB ও AC কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা এবং P ও Q যথাক্রমে তাদের দ্বারা ছিন্ন উপচাপ দুইটির মধ্যবিন্দু। PQ জ্যা AB ও AC জ্যা কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাতে হবে যে, AD = AE.

বিশেষ নির্বচন ঃ মনে করি, O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের AB ও AC দুটি জ্যা। P, AB উপচাপের মধ্যবিন্দু এবং Q, AC উপচাপের মধ্যবিন্দু। PQ জ্যা AB ও AC জ্যা-দ্বয়কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাতে হবে যে, AD = AE.




অঙ্কন ঃ A, P এবং A, Q যোগ করি।

প্রমাণ ঃ P, APB চাপের মধ্যবিন্দু।

∴ চাপ AP = চাপ BP

বা, বৃত্তস্থ ∠AQP = বৃত্তস্থ ∠BAP [ ∵ সমান সমান চাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো পরস্পর সমান ]
বা, ∠AQE = ∠PAD ..... (i)
আবার, Q, AQC চাপের মধ্যবিন্দু।
∴ চাপ AQ = চাপ CQ.
বা, বৃত্তস্থ ∠APQ = বৃত্তস্থ ∠CAQ [ সমান সমান চাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো পরস্পর সমান ]
বা, ∠APD = ∠EAQ
বা, ∠EAQ = ∠APD ..... (ii)
এখন, (i) + (ii) নং থেকে পাই, ∠AQE + ∠EAQ = ∠PAD + ∠APD ..... (iii)
AD রশ্মির প্রান্ত বিন্দুতে D তে PE সরলরেখা মিলিত হয়েছে।
ফলে, ∠ADP এবং ∠ADE সন্নিহিত কোণদ্বয় উৎপন্ন হয়েছে।
∴ ∠ADP + ∠ADE = দুই সমকোণ
আবার, ΔAPD এ, এবং বহিঃস্থ ∠ADE, ইহার অন্তঃস্থ দুই বিপরীত ∠APD ও ∠PAD এর সমষ্টির সমান।
অর্থাৎ, ∠ADE = ∠APD + ∠PAD ..... (iv).
অনুরূপে, ΔAQE এ, এর বহিঃস্থ ∠AED, ইহার অন্তঃস্থ দুই বিপরীত ∠AQE ও ∠EAQ এর সমষ্টির সমান
অর্থাৎ, ∠AED = ∠AQE + ∠EAQ
= ∠PAD + ∠APD [ (iii) নং থেকে ]
= ∠ADE [ (iv) নং থেকে ]
∴ ∠AED = ∠ADE.
অর্থাৎ ΔADE এর ∠AED = ∠ADE
∴ AD = AE ( প্রমাণিত ) [ ∵ সমান সমান কোণের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান ]

I ❤ MyMahbub

www.bdniyog.com