www.bdniyog.com

অধ্যায় ৬ রেখা, কোণ ও ত্রিভুজ

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- সমতলীয় জ্যামিতির মৌলিক স্বীকার্যগুলো বর্ণনা করতে পারবে।
- ত্রিভুজ সংক্রান্ত উপপাদ্যগুলো প্রমাণ করতে পারবে।
- ত্রিভুজ সংক্রান্ত উপপাদ্য ও অনুসিদ্ধান্তগুলো প্রয়োগ করে সমস্যা সমাধান করতে পারবে।

যা মনে রাখতে হবে...

ব্যুৎপত্তিগতভাবে 'জ্যামিতি' বা 'Geometry' শব্দের অর্থ "ভূমি পরিমাপ"। কৃষি ভিত্তিক সভ্যতার যুগে ভূমি পরিমাপের সমস্যা সমাধানের প্রয়োজনেই জ্যামিতির সৃষ্টি হয়েছিল। তবে জ্যামিতি আজকাল কেবল ভূমি পরিমাপের জন্যই ব্যবহৃত হয় না, বরং বহু জটিল গাণিতিক সমস্যা সমাধানে ও ব্যাখ্যাদানে জ্যামিতিক জ্ঞান এখন অপরিহার্য।

জ্যামিতি গণিত শাস্ত্রের একটি প্রাচীন শাখা। আনুমানিক খ্রিস্টপূর্ব ৩০০ অব্দে গ্রীক পণ্ডিত ইউক্লিড জ্যামিতির ইতস্তত বিক্ষিপ্ত সূত্রগুলোকে বিধিবদ্ধভাবে সুবিন্যস্ত করে তাঁর বিখ্যাত গ্রন্থ "Elements" রচনা করেন। তেরো খণ্ডে সম্পূর্ণ কালোত্তীর্ণ এই "Elements" গ্রন্থটিই আধুনিক জ্যামিতির ভিত্তিস্বরূপ।

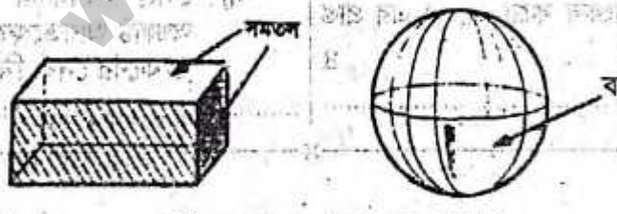
অনুশীলনী- ৬.১

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ৬.১

১। স্থান, তল, রেখা এবং বিন্দুর ধারণা দাও।

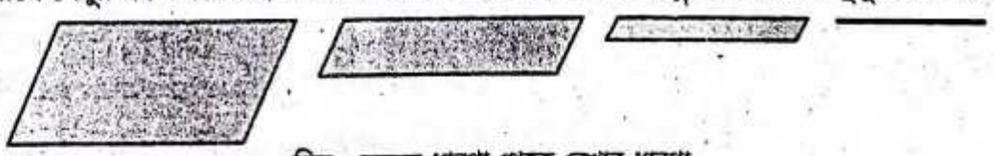
সমাধান : স্থান, তল, রেখা ও বিন্দুর যথাযথ সংজ্ঞা দেওয়া সম্ভব নয়। এগুলো জ্যামিতির প্রাথমিক ধারণা মাত্র। যেমন :

- **স্থান :** আমাদের চারপাশে ছোট বড় বিভিন্ন বস্তু স্থানের যে অংশ জুড়ে থাকে সে স্থানটুকুর আকার, আকৃতি, অবস্থান, বৈশিষ্ট্য প্রভৃতি থেকেই জ্যামিতিক ধ্যান ধারণার উদ্ভব।
- **তল :** ঘনবস্তুর উপরিভাগ তল নির্দেশ করে অর্থাৎ, প্রত্যেক ঘনবস্তু এক বা একাধিক তল দ্বারা সীমাবদ্ধ থাকে। যেমন, একটি বাক্সের ছয়টি পৃষ্ঠ ছয়টি তলের অংশ। গোলকের উপরিভাগও একটি তল। তবে বাক্সের পৃষ্ঠতলকে সমতল ও গোলকের উপরিতলকে বক্রতল বলে।



চিত্র : ঘনবস্তু থেকে তলের ধারণা

- **রেখা :** দুইটি তল পরস্পরকে ছেদ করলে ছেদস্থলে একটি রেখা উৎপন্ন হয়। যেমন, বাক্সের দুইটি পৃষ্ঠ–তল বাক্সের একধারে একটি রেখায় মিলিত হয়। এই রেখা একটি সরলরেখা। একটি লেবুকে একটি পাতলা ছুরি দিয়ে কাটলে, ছুরির সমতল যেখানে লেবুর বক্রতলকে ছেদ করে সেখানে একটি বক্ররেখা উৎপন্ন হয়। রেখার শুধু দৈর্ঘ্য আছে, প্রস্থ ও বেধ নেই।



চিত্র : তলের ধারণা থেকে রেখার ধারণা

- **বিন্দু :** দুইটি রেখা পরস্পর ছেদ করলে বিন্দুর উৎপত্তি হয়, অর্থাৎ দুইটি রেখার ছেদস্থান বিন্দু দ্বারা নির্দিষ্ট হয়। বাক্সের দুইটি ধার–রেখা বাক্সের এক কোণায় একটি বিন্দুতে মিলিত হয়।
  বিন্দুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ নেই, শুধু অবস্থান আছে। একটি রেখার দৈর্ঘ্য ক্রমশ হ্রাস পেয়ে অবশেষে শূন্য হলে, একটি বিন্দু মাত্র অবশিষ্ট থাকে। বিন্দুকে শূন্য মাত্রার সত্তা বলে গণ্য করা হয়।

www.bdniyog.com

www.bdniyog.com

২। ইউক্লিডের পাঁচটি স্বীকার্য বর্ণনা কর।

সমাধান : ইউক্লিডের পাঁচটি স্বীকার্য হলো–

স্বীকার্য ১। একটি কিন্দু থেকে অন্য একটি কিন্দু পর্যন্ত একটি সরলরেখা আঁকা যায়।

স্বীকার্য ২। খন্ডিত রেখাকে যথেচ্ছভাবে বাড়ানো যায়।

স্বীকার্য ৩। যেকোনো কেন্দ্র ও যেকোনো ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকা যায়।

স্বীকার্য ৪। সকল সমকোণ পরস্পর সমান।

স্বীকার্য ৫। একটি সরলরেখা দুইটি সরল রেখাকে ছেদ করলে এবং ছেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের চেয়ে কম হলে, রেখা দুইটিকে যথেচ্ছভাবে বর্ধিত করলে সেদিকে কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের চেয়ে কম, সেদিকে মিলিত হয়।

৩। পাঁচটি আপতন স্বীকার্য বর্ণনা কর।

সমাধান : আপতন স্বীকার্য : বিমূর্ত জ্যামিতিক ধারণা হিসেবে স্থানকে কিন্দুসমূহের সেট ধরা হয় এবং সরলরেখা ও সমতলকে এই সার্বিক সেটের উপসেট বিবেচনা করা হয়। এ সংক্রান্ত ৫টি স্বীকার্যকে আপতন স্বীকার্য বলে।

স্বীকার্য–১ : স্থান সকল কিন্দুর সেট এবং সমতল ও সরলরেখা এই সেটের উপসেট।

এই স্বীকার্য থেকে আমরা লক্ষ করি যে, প্রত্যেক সমতল ও প্রত্যেক সরলরেখা এক একটি সেট, যার উপাদান হচ্ছে কিন্দু। জ্যামিতিক বর্ণনায় সাধারণত সেট প্রতীকের ব্যবহার পরিহার করা হয়। যেমন : কোনো কিন্দু একটি সরলরেখার (বা সমতলের) অন্তর্ভুক্ত হলে 'কিন্দুটি ঐ সরলরেখায় (বা সমতলে) অবস্থিত' অথবা, 'সরলরেখাটি (বা সমতলটি) ঐ কিন্দু দিয়ে যায়' অথবা অনুরূপ অর্থবহ বাক্য দ্বারা তা প্রকাশ করা হয়। একইভাবে, একটি সরলরেখা একটি সমতলের উপসেট হলে 'সরলরেখাটি ঐ সমতলে অবস্থিত' অথবা 'সমতলটি ঐ সরলরেখা দিয়ে যায়' এ রকম বাক্য দ্বারা তা বর্ণনা করা হয়।

সরলরেখা ও সমতলের বৈশিষ্ট্য হিসেবে স্বীকার করে নেওয়া হয় যে,

স্বীকার্য–২। দুইটি ভিন্ন কিন্দুর জন্য একটি ও কেবল একটি সরলরেখা আছে, যাতে উভয় কিন্দু অবস্থিত।

স্বীকার্য–৩। একই সরলরেখায় অবস্থিত নয় এমন তিনটি ভিন্ন কিন্দুর জন্য একটি ও কেবল একটি সমতল আছে, যাতে কিন্দু তিনটি অবস্থিত।

স্বীকার্য–৪। কোনো সমতলের দুইটি ভিন্ন কিন্দু দিয়ে যায় এমন সরলরেখা ঐ সমতলে অবস্থিত।

স্বীকার্য–৫। ক) স্থানে একাধিক সমতল বিদ্যমান।

খ) প্রত্যেক সমতলে একাধিক সরলরেখা অবস্থিত।

গ) প্রত্যেক সরলরেখার কিন্দুসমূহ এবং বাস্তব সংখ্যাসমূহকে এমনভাবে সম্পর্কিত করা যায় যেন, রেখাটির প্রত্যেক কিন্দুর সঙ্গে একটি অনন্য বাস্তব সংখ্যা সংশ্লিষ্ট হয় এবং প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যার সঙ্গে রেখাটির একটি অনন্য কিন্দু সংশ্লিষ্ট হয়।

৪। দূরত্ব স্বীকার্যটি বর্ণনা কর।

সমাধান : দূরত্ব স্বীকার্য : স্বীকার্য–৬ কে দূরত্ব স্বীকার্য বলা হয়। জ্যামিতিতে দূরত্বের ধারণাও একটি প্রাথমিক ধারণা। এজন্য স্বীকার করে নেওয়া হয় যে,

ক) কিন্দুযুগল (P, Q) একটি অনন্য বাস্তব সংখ্যা নির্দিষ্ট করে যাকে P কিন্দু থেকে Q কিন্দুর দূরত্ব বলা হয় এবং PQ দ্বারা সূচিত করা হয়।

খ) P ও Q ভিন্ন কিন্দু হলে PQ সংখ্যাটি ধণাত্মক। অন্যথায়, PQ = 0।

গ) P থেকে Q এর দূরত্ব এবং Q থেকে P এর দূরত্ব একই। অর্থাৎ PQ = QP।

PQ = QP হওয়াতে এই দূরত্বকে সাধারণত P কিন্দু ও Q কিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব বলা হয়। ব্যবহারিকভাবে এই দূরত্ব পূর্ব নির্ধারিত এককের সাহায্যে পরিমাপ করা হয়।

৫। রুলার স্বীকার্যটি বর্ণনা কর।

সমাধান : রুলার স্বীকার্য : স্বীকার্য–৫ (গ) অনুযায়ী প্রত্যেক সরলরেখায় অবস্থিত কিন্দুসমূহের সেট ও বাস্তব সংখ্যা সেটের মধ্যে এক–এক মিল স্থাপন করা যায়। এ প্রসঙ্গে স্বীকার করে নেওয়া হয় যে,

স্বীকার্য : কোনো সরলরেখায় অবস্থিত কিন্দুসমূহের সেট এবং বাস্তব সংখ্যা সেটের মধ্যে এমনভাবে এক–এক মিল স্থাপন করা যায়, যেন রেখাটির যেকোনো কিন্দু P, Q এর জন্য PQ = |a — b| হয়, যেখানে মিলকরণের ফলে P ও Q এর সঙ্গে যথাক্রমে a ও b বাস্তব সংখ্যা সংশ্লিষ্ট হয়।

এই স্বীকার্যে বর্ণিত মিলকরণ করা হলে, রেখাটি একটি সংখ্যারেখায় পরিণত হয়েছে বলা হয়। সংখ্যারেখায় P কিন্দুর সঙ্গে a সংখ্যাটি সংশ্লিষ্ট হলে P কে a এর লেখকিন্দু এবং a কে P এর স্থানাঙ্ক বলা হয়। এই স্বীকার্যকে রুলার স্বীকার্য বলা হয়।

৬। সংখ্যারেখা বর্ণনা কর।

সমাধান : কোনো সরলরেখায় অবস্থিত কিন্দুসমূহের সেট এবং বাস্তব সংখ্যাসেটের মধ্যে এমনভাবে এক এক মিল স্থাপন করা যায়, যেমন, রেখাটির মিলকরণের ফলে P, Q এর জন্যে PQ = |a–b| হয়, যেখানে মিলকরণের ফলে P ও Q এর সঙ্গে যথাক্রমে a ও b বাস্তব সংখ্যা সংশ্লিষ্ট হয়।

এভাবে বর্ণিত মিলকরণ করা হলে, রেখাটি একটি সংখ্যারেখায় পরিণত হয়েছে বলা হয়। সংখ্যারেখায় P কিন্দুর সঙ্গে সংখ্যাটি সংশ্লিষ্ট হলে P ও a এর লেখকিন্দু এবং a কে P এর স্থানাঙ্ক বলা হয়।

www.bdniyog.com

www.bdniyog.com

৭। রুলার স্থাপন স্বীকার্যটি বর্ণনা কর।

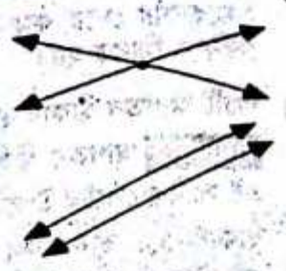
সমাধান : রুলার স্থাপন স্বীকার্য : কোনো সরলরেখাকে সংখ্যারেখায় পরিণত করার জন্য প্রথমে রেখাটির একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক 0 এবং অপর একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক 1 ধরে নেওয়া হয়। এতে রেখাটিতে একটি একক দূরত্ব এবং একটি ধনাত্মক দিক নির্দিষ্ট হয়। এ জন্য স্বীকার করে নেওয়া হয় যে,

স্বীকার্য : যেকোনো সরলরেখা AB কে এমনভাবে সংখ্যারেখায় পরিণত করা যায় যে, A এর স্থানাঙ্ক 0 এবং B এর স্থানাঙ্ক ধনাত্মক হয়। একে রুলার স্থাপন স্বীকার্য বলা হয়।

৮। পরস্পরছেদী সরলরেখা ও সমান্তরাল সরলরেখার সংজ্ঞা দাও।

সমাধান : পরস্পরচ্ছেদী রেখা : দুইটি ভিন্ন সরলরেখাকে পরস্পরচ্ছেদী বলা হয়, যদি উভয়রেখায় অবস্থিত একটি সাধারণ বিন্দু থাকে।

সমান্তরাল রেখা : একই সমতলস্থ দুইটি ভিন্ন সরলরেখাকে সমান্তরাল বলা হয়, যদি তাদের কোন সাধারণ বিন্দু না থাকে।



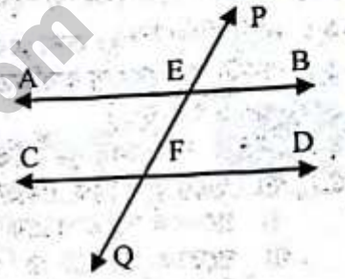
❑ অনুশীলনী- ৬.২

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

❑ কাজ–১: সমান্তরাল সরলরেখার বিকল্প সংজ্ঞার সাহায্যে সমান্তরাল সরলরেখা সংক্রান্ত উপপাদ্যগুলো প্রমাণ কর। [পৃষ্ঠা- ১১২]

সমাধান : সমান্তরাল সরলরেখার বিকল্প সংজ্ঞা : দুইটি সরলরেখার একটি ছেদক দ্বারা উৎপন্ন অনুরূপ কোণ জোড়া সমান হলে রেখাদ্বয় সমান্তরাল। দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার একটি ছেদক দ্বারা উৎপন্ন প্রত্যেক একান্তর কোণ জোড়া সমান হবে।

মনে করি, AB ∥ CD এবং PQ ছেদক তাদের যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, ∠AEF = একান্তর ∠EFD



প্রমাণ :

ধাপসমূহ	যথার্থতা
∠PEB = অনুরূপ ∠EFD	[সমান্তরাল রেখার সংজ্ঞানুসারে অনুরূপ কোণ সমান]
∠PEB = বিপ্রতীপ ∠AEF	[বিপ্রতীপ কোণদ্বয় পরস্পর সমান]
∠AEF = ∠EFD (প্রমাণিত)	[১নং ও ২নং থেকে]

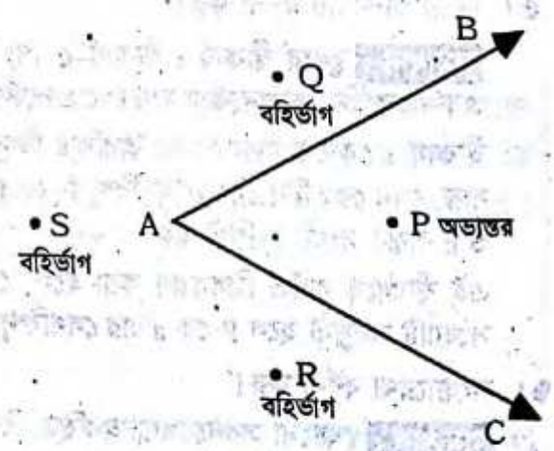
পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ৬.২

১। কোণের অভ্যন্তর ও বহির্ভাগের সংজ্ঞা দাও।

সমাধান : কোণের অভ্যন্তর : ∠BAC এর অভ্যন্তর হলো $\overset{\times}{AB}$ এর C পার্শ্বে এবং $\overset{\times}{AC}$ এর B পার্শ্বে অবস্থিত সমতলের সকল বিন্দুর সেট।

কোণের বহির্ভাগ : কোণটির অভ্যন্তরে অথবা কোনো বাহুতে অবস্থিত নয় সমতলস্থ এমন সকল বিন্দুর সেটকে তার বহির্ভাগ বলা হয়। কোণটির অভ্যন্তরে প্রত্যেক বিন্দুকে তার একটি অন্তঃস্থ বিন্দু এবং বহির্ভাগের প্রত্যেক বিন্দুকে তার একটি বহিঃস্থ বিন্দু বলা হয়।

অর্থাৎ চিত্রে, P বিন্দু ∠BAC এর অভ্যন্তরে এবং Q, S ও R বিন্দুগুলো তার বহির্ভাগে অবস্থিত।



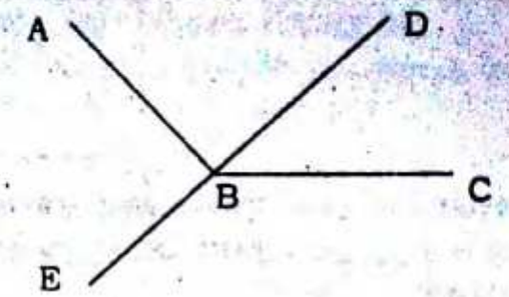
২। যদি একই সরলরেখাস্থ তিনটি ভিন্ন ভিন্ন বিন্দু হয়, তবে চিত্রের উৎপন্ন কোণগুলোর নামকরণ কর।

সমাধান : চিত্রে উৎপন্ন কোণগুলোর নাম যথাক্রমে : ∠DBE, ∠ABD, ∠DBC, ∠CBE, ∠EBC, ∠ABE.

www.bdniyog.com

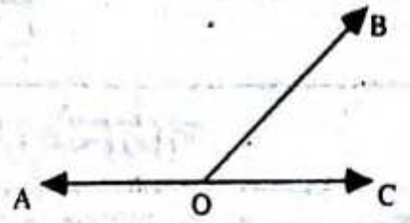
www.bdniyog.com

উৎপন্ন কোণগুলোর নামকরণ :
∠DBE = সরলকোণ
∠ABD = সমকোণ
∠DBC = সূক্ষ্মকোণ
∠CBE = স্থূলকোণ
∠EBC = প্রবৃদ্ধ কোণ
∠ABE = সমকোণ।



৩। সন্নিহিত কোণের সংজ্ঞা দাও এবং এর বাহুগুলো চিহ্নিত কর।

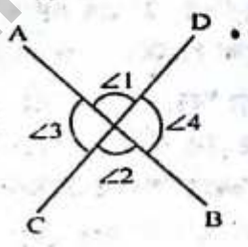
সমাধান : সন্নিহিত কোণ : সমতলস্থ দুইটি কোণের যদি (১) একই শীর্ষবিন্দু থাকে, (২) একটি সাধারণ বাহু থাকে এবং (৩) তাদের অভ্যন্তরদ্বয়ের কোনো সাধারণ বিন্দু না থাকে, তবে কোণদ্বয়ের একটিকে অপরটির সন্নিহিত কোণ বলা হয়।
চিত্রে ∠AOB ও ∠BOC একে অপরের সন্নিহিত কোণ।



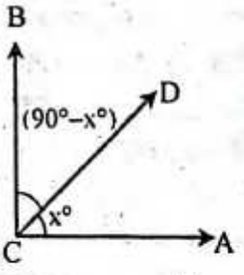
বহিঃস্থ বাহু : সাধারণ বাহু ব্যতীত সন্নিহিত কোণ দুটির অপর দুই বাহুকে তাদের বহিঃস্থ বাহু বলা হয়।
চিত্রে ∠AOB ও ∠BOC সন্নিহিত কোণদ্বয়ের একই শীর্ষবিন্দু O, একটি সাধারণ বাহু $\overrightarrow{OB}$ এবং কোণদ্বয়ের অভ্যন্তরের কোনো সাধারণ বিন্দু নাই। $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{OC}$ কোণ দুইটির বহিঃস্থ বাহু।

৪। চিত্রসহ সংজ্ঞা দাও : বিপ্রতীপ কোণ, পূরক কোণ, সম্পূরক কোণ, সমকোণ, সূক্ষ্মকোণ এবং স্থূলকোণ।

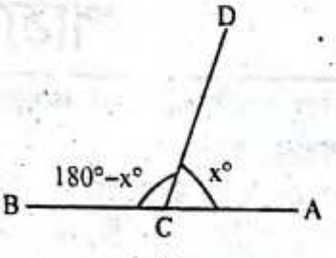
সমাধান : বিপ্রতীপ কোণ : কোনো কোণের বাহুদ্বয়ের বিপরীত রশ্মিদ্বয় যে কোণ তৈরি করে তা ঐ কোণের বিপ্রতীপ কোণ।
চিত্রে ∠1 এবং ∠3 একযুগল বিপ্রতীপ কোণ যা AB এবং CD এর ছেদের ফলে উৎপন্ন হয়েছে। একইভাবে চিত্রে ∠2 এবং ∠4 আরেক যুগল বিপ্রতীপ কোণ একই সরলরেখাদ্বয় দ্বারা উৎপন্ন।



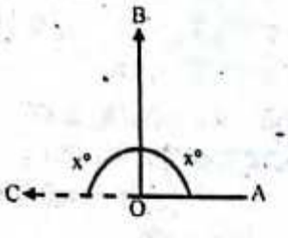
পূরককোণ : দুইটি কোণের পরিমাপের সমষ্টি এক সমকোণ হলে কোণ দুইটিকে পরস্পরের পূরককোণ বলা হয়।
চিত্রে, ∠ACB ও ∠BCD পূরককোণ।



সম্পূরক কোণ : দুইটি কোণের পরিমাপের সমষ্টি দুই সমকোণ হলে, কোণ দুইটিকে পরস্পরের সম্পূরক কোণ বলা হয়।
চিত্রে, ∠ACB ও ∠BCD সম্পূরক কোণ।



সমকোণ : একটি সরল কোণের সমদ্বিখণ্ডককে লম্ব এবং সংশ্লিষ্ট সন্নিহিত কোণের প্রত্যেকটিকে সমকোণ বলে।
চিত্রে, ∠AOB সমকোণ।



উল্লেখ যে, দুইটি কোণ সমান অর্থ তাদের ডিগ্রি পরিমাপ সমান। লক্ষণীয় যে, ওপরের চিত্রে ∠AOB ও ∠BOC রৈখিক যুগল কোণ এবং কোণ যোজন স্বীকার্য অনুযায়ী ∠AOB + ∠BOC = সরলকোণ AOC। সুতরাং ∠AOB = x হলে সরলকোণ স্বীকার্য। x + x = 180° বা, x = 90°। অতএব দেখা যাচ্ছে যে, সমকোণের ডিগ্রি পরিমাণ 90°। ∠AOB যে সমকোণ তা পাশের চিত্রের মতো চিহ্নিত করা হয়। এই চিত্রে, OA ও OB পরস্পর লম্ব। (প্রতীক : OA ⊥OB).

সূক্ষ্মকোণ ও স্থূলকোণ : এক সমকোণ থেকে ছোট কোণকে সূক্ষ্মকোণ এবং সমকোণ থেকে বড় কিন্তু দুই সমকোণ থেকে ছোট কোণকে স্থূলকোণ বলা হয়।

www.bdniyog.com