www.bdniyog.com

অধ্যায় ৪

সূচক ও লগারিদম

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- মূলদ সূচক ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ধনাত্মক পূর্ণ–সাংখ্যিক সূচক, শূন্য ও ঋণাত্মক পূর্ণ–সাংখ্যিক সূচক ব্যাখ্যা ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- সূচকের নিয়মাবলি বর্ণনা ও [illegible]
- n তম মূল ও মূলদ [illegible] সমস্যা [illegible]
- লগারিদম ব্যাখ্যা [illegible]
- লগারিদমের সূত্রাবলি প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- সাধারণ লগারিদম ও স্বাভাবিক লগারিদম ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সংখ্যার বৈজ্ঞানিক রূপ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সাধারণ লগারিদমের পূর্ণক ও অংশক ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ক্যালকুলেটরের সাহায্যে সাধারণ ও স্বাভাবিক লগারিদম নির্ণয় করতে পারবে।

I ❤ MyMahbub

যা মনে রাখতে হবে...

সূচক ঃ n সংখ্যক a এর ক্রমিক গুণফল যদি a^n হয় তাহলে n কে a এর সূচক এবং a কে n এর ভিত্তি বলে।

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলি ঃ

- $a^n = a \times a \times a \times$ .....(n সংখ্যক a)
- $a^{-1} = \frac{1}{a}$
- $a^m . a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $a^0 = 1$
- $\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$
- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
- $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$
- $a^x = a^y$ হলে, $x = y$ $[a \neq 0, 1]$
- $a^x = b^x$ হলে, $a = b$ $[x \neq 0]$

❖ **লগারিদম ঃ** যদি কোন সংখ্যাকে অন্য একটি সংখ্যার ভিত্তিতে সূচক বা শক্তিতে উন্নীত করা হয়, তবে সূচকটিকে দ্বিতীয় সংখ্যার ভিত্তিতে প্রথম সংখ্যার লগারিদম সংক্ষেপে লগ বলে। যেমন ঃ

100 কে 10 এর ভিত্তির শক্তিতে উন্নীত করলে দাড়ায়, $100 = 10^2$. এখানে 2 হল 10 এর ভিত্তিতে 100 এর লগ। একে গাণিতিকভাবে $\log_{10} 100 = 2$ লেখা হয়।

x অঋণাত্মক বা ঋণাত্মক, যাই হোক না কেন, a^x সর্বদাই ধনাত্মক সংখ্যা। তাই শুধু ধনাত্মক সংখ্যারই লগারিদম আছে। শূন্য বা ঋণাত্মক সংখ্যার লগারিদম নেই।

$a^x = n$ হলে, $x = \log_a n$ যখন, $a > 0, a \neq 1$, n ধনাত্মক সংখ্যা।

লগারিদমের সূত্র ঃ

- $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
- $\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$
- $\log_a x^n = n \log_a x$
- $\log_a x = N$ হলে, $x = a^N$
- $\log_a a^n = n$
- $\log_a a = 1$

[বিঃ দ্রঃ অনেক ক্ষেত্রে log এর ভিত্তি উল্লেখ থাকে না। এ ক্ষেত্রে log এর ভিত্তিকে 10 ধরা হয়ে থাকে। এরূপ লগারিদমকে সাধারণ লগারিদম বলে। যেমন ঃ logx বা logy]

❖ **সংখ্যার বৈজ্ঞানিক রূপ ঃ** যদি a এর মান 1 এর চেয়ে বড় কিন্তু 10 এর চেয়ে ছোট হয় তবে, অনেক বড় বা অনেক ছোট সংখ্যাকে $a \times 10^n$ এর আকারে প্রকাশ করলে একে বৈজ্ঞানিক বা আদর্শরূপ বলে। যেমন ঃ 100000 এর আদর্শরূপ 10^5 এবং .00001 এর আদর্শরূপ 10^{-5} (n-এর মান যে কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা)।

❖ **লগের পূর্ণক ও অংশক ঃ** কোন ধনাত্মক সংখ্যার লগারিদম একটি দশমিক যুক্ত সংখ্যা। উক্ত লগারিদমের দশমিক যুক্ত অংশকে অংশক এবং পূর্ণ অংশকে পূর্ণক বলা হয়। যেমন– কোন সংখ্যার লগ 3·2456 হলে এর পূর্ণক 3 এবং অংশক 0·2456। লগারিদমের পূর্ণক ধনাত্মক, ঋণাত্মক বা শূন্য হতে পারে।

পূর্ণক নির্ণয় পদ্ধতি ঃ

1) একের চেয়ে বড় সংখ্যার পূর্ণক নির্ণয়ের জন্য দশমিকের বামের অংক সংখ্যা গণনা করতে হবে। পূর্ণক উক্ত অংক সংখ্যার চেয়ে 1 কম। যেমন ঃ 646·28 এর লগের পূর্ণক = 3 – 1 = 2

2) একের চেয়ে ছোট সংখ্যার দশমিকের বামে শূন্য থাকে। এ ক্ষেত্রে দশমিকের ঠিক পরে যতগুলো শূন্য থাকে তা থেকে পূর্ণক দশমিকের ডানে শূন্যের সংখ্যার চেয়ে 1 বেশি।

www.bdniyog.com

www.bdniyog.com

যেমন ঃ 0·000301 এর দশমিকের ডানে পর পর তিনটি শূন্য রয়েছে (3 এর পরের শূন্য ধর্তব্য নয়) ।
কাজেই পূর্ণক $= -(3+1) = -4$
-4 কে $\bar{4}$ আকারেও লেখা হয় ।

❑ অংশক নির্ণয় পদ্ধতি :

অংশক নির্ণয়ে আমাদের লগ সারণীর সাহায্য নিতে হয় । লগারিদমের সারণী ব্যবহারের পূর্বে আমাদের এর সাথে পরিচিত হওয়া দরকার । এ সারণীর সর্ব বামের কলামে 10, 11, 12, ...99 পর্যন্ত সংখ্যা আছে । আবার এ কলামটির ডানে রয়েছে 10 টি কলামের (0 থেকে 9 পর্যন্ত) মূল লগ সারণী । এর পরে আরো 9 টি কলাম (1 থেকে 9 পর্যন্ত) রয়েছে যার নাম অন্তর সারণী ।

উদাহরণ ঃ log 995·6 এর অংশক কত?

i) এখানে সংখ্যাটিকে অর্থাৎ 995·6 কে দশমিক বিহীন ধরতে হবে অর্থাৎ তা 9956 হবে ।
ii) 9956 কে তিনটি অংশে ভাগ করে নিতে হবে । যথা ঃ 99, 5 এবং 6.
iii) এখন লগ সারণীর সর্ব বামের কলামের 99 নং সারির 5 শীর্ষক কলামের মান দেখতে হবে । আমরা এই মান 99739 পাই; এরপর একই সারির (99 নং সারি) অন্তর কলামের 6 শীর্ষক কলামের মান নিতে হবে যা আমরা 26 পাই ।
iv) এখন 99739 + 26 = 99765 । তাই, log 995·6 এর অংশক হবে 0.99765.

❑ অনুশীলনী- ৪.১

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

❑ কাজ-১ : খালিঘর পূরণ কর : পৃষ্ঠা- ৭৪

(i) $3\times3\times3\times3 = 3^{\square}$ (ii) $5^{\square}\times5^3 = 5^5$
(iii) $a^2\times a^{\square} = a^{-3}$ (iv) $\frac{4}{4^{\square}} = 1$
(v) $(-5)^0 = \square$

সমাধান :

(i) $3\times3\times3\times3 = 3^{\boxed{4}}$ (ii) $5^{\boxed{2}}\times5^3 = 5^5$
(iii) $a^2\times a^{\boxed{-5}} = a^{-3}$ (iv) $\frac{4}{4^{\boxed{1}}} = 1$
(v) $(-5)^0 = \boxed{1}$

❑ কাজ-২ : সরল কর : পৃষ্ঠা- ৭৫

(i) $\frac{2^4.2^2}{32}$ (ii) $\left(\frac{2}{3}\right)^5\times\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$ (iii) $8^{\frac{3}{4}}+8^{\frac{1}{2}}$

সমাধান :

(i) $\frac{2^4.2^2}{32} = \frac{2^4.2^2}{2^5} = \frac{2^{4+2}}{2^5} = \frac{2^6}{2^5} = 2^{6-5} = 2^1 = 2$ (Ans.)

(ii) $\left(\frac{2}{3}\right)^5\times\left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{5-5} = \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$ (Ans.)

(iii) $8^{\frac{3}{4}}\div8^{\frac{1}{2}} = \frac{8^{\frac{3}{4}}}{8^{\frac{1}{2}}} = 8^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}} = 8^{\frac{3-2}{4}} = 8^{\frac{1}{4}}$ (Ans.)

পাঠ্যবইয়ের উদাহরণসমূহ

উদাহরণ- ৩॥ দেখাও যে, $(a^p)^{q-r}.(a^q)^{r-p}.(a^r)^{p-q} = 1$

সমাধান : L. H. S $= (a^p)^{q-r}.(a^q)^{r-p}.(a^r)^{p-q}$
$= a^{p(q-r)}.a^{q(r-p)}.a^{r(p-q)}$ [$\because (a^m)^n = a^{mn}$]
$= a^{pq-pr}.a^{qr-pq}.a^{pr-qr}$
$= a^{pq-pr+qr-pq+pr-qr}$
$= a^0 = 1$ = R. H. S
$\therefore$ L. H. S = R. H. S (Showed)

উদাহরণ- ৫॥ সরল কর :

(ক) $(12)^{-\frac{1}{2}}\times\sqrt[3]{54}$ (খ) $(-3)^3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2$

সমাধান :

(ক) $(12)^{-\frac{1}{2}}\times\sqrt[3]{54}$

$= \frac{1}{(12)^{\frac{1}{2}}}\times(54)^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{(2^2\times3)^{\frac{1}{2}}}\times(3^3\times2)^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{(2^2)^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{2}}}\times(3^3)^{\frac{1}{3}}.2^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{2^1.3^{\frac{1}{2}}}\times3.2^{\frac{1}{3}} = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{2^1}\times\frac{3^1}{3^{\frac{1}{2}}}$

$= \frac{3^{1-\frac{1}{2}}}{2^{1-\frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{2}{3}}} = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}$ (Ans.)

(খ) $(-3)^3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2$

$= (-3)(-3)(-3)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$

$= -27\times\frac{1}{4} = -\frac{27}{4}$ (Ans.)

অনুশীলনী

1. $a>0, a\neq1, x, y$ হলে, $x = y$
2. $a>0, b>0, x\neq0$ শর্তে $a^x = b^x$ হলে, $a = b$

I ❤ MyMahbub

www.bdniyog.com

www.bdniyog.com

উদাহরণ– ৬। সমাধান কর : $4^{x+1} = 32$

সমাধান : $4^{x+1} = 32$

বা, $(2^2)^{x+1} = 32$

বা, $2^{2x+2} = 2^5$

বা, $2x + 2 = 5$, [$a^x = a^y$ হলে, $x = y$]

বা, $2x = 5 - 2$

বা, $2x = 3$

$\therefore x = \frac{3}{2}$ (Ans.)

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান 8.১

সরল কর (১ – ১০)

১। $\frac{3^3.3^5}{3^6}$

সমাধান : $\frac{3^3.3^5}{3^6}$

$= \frac{3^{3+5}}{3^6}$

$= \frac{3^8}{3^6}$

$= 3^{8-6}$

$= 3^2$

$= 9$ (Ans)

২। $\frac{5^3.8}{2^4.125}$

সমাধান : $\frac{5^3.8}{2^4.125}$

$= \frac{5^3.2^3}{2^4.5^3}$

$= \frac{5^3}{5^3} \cdot \frac{2^3}{2^4}$

$= 2^{3-4}$

$= 2^{-1}$

$= \frac{1}{2}$ (Ans.)

৩। $\frac{7^3 \times 7^{-3}}{3 \times 3^{-1}}$

সমাধান : $\frac{7^3 \times 7^{-3}}{3 \times 3^{-1}}$

$= \frac{7^{3-3}}{3^{1-1}}$

$= \frac{3^0}{3^{-3}}$

$= \frac{1}{\frac{1}{27}}$

$= 27$ (Ans.)

৪। $\frac{\sqrt[3]{7^2} \cdot \sqrt[3]{7}}{\sqrt{7}}$

সমাধান : $\frac{\sqrt[3]{7^2} \cdot \sqrt[3]{7}}{\sqrt{7}}$

$= \frac{7^{\frac{2}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{3}}}{7^{\frac{1}{2}}} = \frac{7^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}}{7^{\frac{1}{2}}}$

$= \frac{7^{\frac{2+1}{3}}}{7^{\frac{1}{2}}} = \frac{7^{\frac{3}{3}}}{7^{\frac{1}{2}}}$

$= 7^{1-\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{7}$ (Ans.)

৫। $(2^{-1} + 5^{-1})^{-1}$

সমাধান : $(2^{-1} + 5^{-1})^{-1}$

$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)^{-1}$

$= \left(\frac{5+2}{10}\right)^{-1}$

$= \left(\frac{5+2}{10}\right)^{-1}$

$= \frac{1}{\frac{7}{10}} = \frac{10}{7}$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলকৃতমান $\frac{10}{7}$

৬। $(2a^{-1} + 3b - 1)^{-1}$

সমাধান : $(2a^{-1} + 3b^{-1})^{-1}$

$= \left(2\frac{1}{a} + 3\frac{1}{b}\right)^{-1}$

$= \left(\frac{2}{a} + \frac{3}{b}\right)^{-1}$

$= \left(\frac{2b + 3a}{ab}\right)^{-1}$

$= \frac{1}{\frac{2b + 3a}{ab}}$

$= \frac{ab}{2b + 3a}$

$= \frac{ab}{3b + 2b}$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলকৃত মান $\frac{ab}{3b + 2b}$

৭। $\left(\frac{a^2b^{-1}}{a^{-2}b}\right)^2$

সমাধান : $\left(\frac{a^2b^{-1}}{a^{-2}b}\right)^2$

$= \left(\frac{a^2 \cdot \frac{1}{b}}{\frac{1}{a^2} \cdot b}\right)^2 = \left(\frac{\frac{a^2}{b}}{\frac{b}{a^2}}\right)^2$

$= \left(\frac{a^2}{b} \times \frac{a^2}{b}\right)^2$

$= \left(\frac{a^4}{b^2}\right)^2 = \frac{a^8}{b^4}$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলকৃত মান $\frac{a^8}{b^4}$

৮। $\sqrt{x^{-1}y} \cdot \sqrt{y^{-1}z} \cdot \sqrt{z^{-1}x}$, $(x > 0, y > 0, z > 0)$

সমাধান : $= \sqrt{x^{-1}y} \cdot \sqrt{y^{-1}z} \cdot \sqrt{z^{-1}x}$

$= \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \sqrt{\frac{z}{y}} \cdot \sqrt{\frac{x}{z}}$

$= \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{z^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{z^{\frac{1}{2}}}$

I ❤ MyMahbub

www.bdniyog.com

www.bdniyog.com

$= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{y^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{z^{\frac{1}{2}}}{z^{\frac{1}{2}}}$

$= x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \cdot z^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$

$= x^0 \times x^0 \times x^0$

$= 1 \times 1 \times 1$

$= 1$

অতএব নির্ণেয় সরলকৃত মান 1

৯। $\frac{2^{n+4} - 4.2^{n+1}}{2^{n+2} \div 2}$

সমাধান : $\frac{2^{n+4} - 4.2^{n+1}}{2^{n+2} \div 2}$

$= \frac{2^n.2^4 - 4.2^n.21}{2^n.2^2 \div 2^1}$

$= \frac{2^n(2^4 - 8)}{2^n.2^{2-1}}$

$= \frac{2^n(16-8)}{2^n.2^1}$

$= \frac{16-8}{2} = \frac{8}{2}$

$= 4$

∴ নির্ণেয় সরলকৃত মান 4

১০। $\frac{3^{m+1}}{(3^m)^{m-1}} \div \frac{9^{m+1}}{(3^{m-1})^{m+1}}$

সমাধান : $\frac{3^{m+1}}{(3^m)^{m-1}} \div \frac{9^{m+1}}{(3^{m-1})^{m+1}}$

$= \frac{3^{m+1}}{3^{m^2-m}} \div \frac{(3^2)^{m+1}}{3^{(m-1)(m+1)}}$

$= \frac{3^{m+1}}{3^{m^2-m}} \div \frac{3^{2m+2}}{3^{m^2-1}}$

$= 3^{m+1-m^2+m} \div 3^{2m+2-m^2+1}$

$= 3^{-m^2+2m+1} \div 3^{-m^2+2m+3}$

$= 3^{-m^2+2m+1+m^2-2m-3}$

$= 3^{-2}$

$= \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

অতএব, নির্ণেয় সরলকৃত মান $\frac{1}{9}$

প্রমাণ কর : (১১ – ১৮)

১১। $\frac{4^n - 1}{2^n - 1} = 2^n + 1$

সমাধান : $\frac{4^n-1}{2^n-1} = 2^n + 1$

L.H.S $= \frac{4^n-1}{2^n-1}$

$= \frac{2^{2n}-1}{2^n-1}$

$= \frac{(2^{2n}-1)(2^n+1)}{(2^n-1)(2^n+1)}$ [লব ও হরকে (2^n+1) দ্বারা গুণ করে]

$= \frac{(2^{2n}-1)(2^n+1)}{(2^n)^2-(1)^2}$

$= \frac{(2^{2n}-1)(2^n+1)}{(2^{2n}-1)}$

$= (2^n + 1)$

= R.H.S.

∴ L.H.S = R.H.S (Proved)

১২। $\frac{2^{p+1}.3^{2p-1}.5^{p+q}.6^q}{6^p.10^{q+2}.15^p} = \frac{1}{50}$

সমাধান : L.H.S $= \frac{2^{p+1}.3^{2p-1}.5^{p+q}.6^q}{6^p.10^{q+2}.15^p}$

$= \frac{2^{p+1}.3^{2p-1}.5^{p+q}.(2\times3)^q}{(2\times3)^p.(2\times5)^{q+2}.(3\times5)^p}$

$= \frac{2^{p+1}.3^{2p-1}.5^{p+q}.2^q.3^q}{2^p.3^p.2^{q+2}.5^{q+2}.3^p.5^p}$

$= \frac{2^{p+1+q}.3^{2p-q+q}.5^{p+q}}{2^{p+q+2}.3^{p+p}.5^{q+2+p}}$

$= 2^{p+1+q-p-q-2}.3^{2p-p-p}.3^{p+q-q-2-p}$

$= 2^{-1}.3^0.5^{-2}$

$= \frac{1}{2}.1.\frac{1}{5^2}$

$= \frac{1}{50}$ = R.H.S

∴ L.H.S = R.H.S (Proved)

১৩। $\left(\frac{a^l}{a^m}\right)^n \cdot \left(\frac{a^m}{a^n}\right)^l \cdot \left(\frac{a^n}{a^l}\right)^m = 1$

সমাধান : L.H.S $= \left(\frac{a^l}{a^m}\right)^n \cdot \left(\frac{a^m}{a^n}\right)^l \cdot \left(\frac{a^n}{a^l}\right)^m$

$= \frac{a^{ln}}{a^{mn}} \cdot \frac{a^{ml}}{a^{nl}} \cdot \frac{a^{mn}}{a^{ml}}$

$= \frac{l(an+ml+mn)}{a(mn+nl+ml)} = 1$ = R.H.S

∴ L.H.S = R.H.S (Proved)

১৪। $\frac{a^{p+q}}{a^{2r}} \times \frac{a^{q+r}}{a^{2p}} \times \frac{a^{p+p}}{a^{2q}} = 1$

সমাধান : L.H.S $= \frac{a^{p+q}}{a^{2r}} \times \frac{a^{q+r}}{a^{2p}} \times \frac{a^{p+p}}{a^{2q}}$

$= \frac{a^{p+q+q+r+r+p}}{a^{2r+2p+2q}}$

$= \frac{a^{2p+2q+2r}}{a^{2p+2q+2r}}$

$= \frac{a^{2p+2q+2r}}{a^{2p+2q+2r}}$

$= 1$ = R.H.S

∴ L.H.S = R.H.S (Proved)

১৫। $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{ab}} \cdot \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{\frac{1}{bc}} \cdot \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{ca}} = 1$

সমাধান : L.H.S $= \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{ab}} \cdot \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{\frac{1}{bc}} \cdot \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{ca}}$

$= \frac{x^{\frac{a}{ab}}}{x^{\frac{a}{ab}}} \cdot \frac{x^{\frac{b}{bc}}}{x^{\frac{c}{bc}}} \cdot \frac{x^{\frac{c}{ca}}}{x^{\frac{a}{ca}}}$

www.bdniyog.com

www.bdniyog.com

$$= \frac{x^{\frac{1}{b}} \cdot x^{\frac{1}{c}} \cdot x^{\frac{1}{a}}}{x^{\frac{1}{a}} \cdot x^{\frac{1}{b}} \cdot x^{\frac{1}{c}}}$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}}{x^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}}$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}}{x^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}}$$

$= 1 = R.H.S$

$\therefore$ L.H.S = R.H.S (Proved)

১৬। $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} \cdot \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \cdot \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a} = 1$

সমাধান :

$$L.H.S = \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} \cdot \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \cdot \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a}$$

$$= \left(x^{a-b}\right)^{a+b} \cdot \left(x^{b-c}\right)^{b+c} \cdot \left(x^{c-a}\right)^{c+a}$$

$$= x^{a^2-b^2} \cdot x^{b^2-c^2} \cdot x^{c^2-a^2}$$

$$= x^{a^2-b^2+b^2-c^2+c^2-a^2}$$

$$= x^0$$

$= 1 = R.H.S$

$\therefore$ L.H.S = R.H.S (Proved)

১৭। $\left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{p+q-r} \times \left(\frac{x^q}{x^r}\right)^{q+r-p} \times \left(\frac{x^r}{x^p}\right)^{r+p-q} = 1$

সমাধান :

$$L.H.S = \left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{p+q-r} \times \left(\frac{x^q}{x^r}\right)^{q+r-p} \times \left(\frac{x^r}{x^p}\right)^{r+p-q}$$

$$= \left(x^{p-q}\right)^{p+q-r} \times \left(x^{q-r}\right)^{q+r-p} \times \left(x^{r-p}\right)^{r+p-q}$$

$$= x^{p^2-q^2-rp+qr} \times x^{q^2-r^2-pq+rp} \times x^{r^2-p^2-qr+pr}$$

$$= x^{p^2-q^2-rp+qr+q^2-r^2+rq+rp+r^2-p^2+pq}$$

$$= x^0$$

$= 1 = R.H.S$

$\therefore$ L.H.S = R.H.S (Proved)

১৮। যদি $a^x = b$, $b^y = c$, এবং $c^z = a$ হয়, তবে দেখাও যে, $xyz = 1$

সমাধান : দেওয়া আছে, $a^x = b$

$b^y = c$

$c^z = a$

রাশি তিনটি যোগ করে পাই,

$a^x + b^y + c^z = b + c + a$

বা, $a^x + b^y + c^z = a^1 + b^1 + c^1$

এখানে, $ax = a^1$

$\therefore x = 1$

একইভাবে, $y = 1$

$z = 1$

$\therefore$ L.H.S = xyz

$= 1.1.1$

$= 1 = R.H.S$

$\therefore$ L.H.S = R.H.S (Showed)

সমাধান কর : (১৯ – ২২)

১৯। $4^x = 8$

সমাধান : $4^x = 8$

বা, $(2^2)^x = 2 \times 2 \times 2$

বা, $2^{2x} = 2^3$

বা, $2x = 3$

$\therefore x = \frac{3}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{3}{2}$

২০। $2^{2x+1} = 128$

সমাধান : $2^{2x+1} = 128$

বা, $2^{2x+1} = 2^7$

বা, $2x + 1 = 7$

বা, $2x = 7 - 1$

বা, $2x = 6$

বা, $x = \frac{6}{2}$

$\therefore x = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 3$

২১। $(\sqrt{3})^{x+1} = \left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)^{2x-1}$

সমাধান : $(\sqrt{3})^{x+1} = \left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)^{2x-1}$

বা, $\left(\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}\right)^{x+1} = \left(\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}}\right)^{2x-1}$

বা, $3^{\frac{x+1}{2}} = 3^{\frac{2x-1}{3}}$

বা, $\frac{x+1}{2} = \frac{2x-1}{3}$

বা, $3(x+1) = 2(2x-1)$

বা, $3x + 3 = 4x - 2$

বা, $4x - 2 = 3x + 3$

বা, $4x - 3x = 3 + 2$

$\therefore x = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 5$

২২। $2^x + 2^{1-x} = 3$

সমাধান : $2^x + 2^{1-x} = 3$

বা, $2^x + 2^1 \cdot \frac{1}{2^x} = 3$

বা, $2^x + \frac{1}{2^x} = 3$

বা, $\frac{2^{2x}+2}{2^x} = 3$

বা, $2^{2x} + 2 = 3.2^x$

বা, $2^{2x} + 2 - 3.2^x = 0$

বা, $(2x)^2 - 2.2^x.1 + 1^2 - 2^x + 1 = 0$

বা, $(2^x - 1)^2 - 2^x + 1 = 0$

বা, $(2^x - 1)^2 - 1(2^x - 1) = 0$

বা, $(2^x - 1)(2^x - 1 - 1) = 0$

বা, $(2^x - 1)(2^x - 2) = 0$

$\therefore 2^x - 1 = 0$ অথবা, $2^x - 2 = 0$

বা, $2^x = 1$ বা, $2^x = 2$

বা, $2^x = 2^0$ বা, $2^x = 2^1$

বা, $x = 0$ $\therefore x = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 0, 1$

www.bdniyog.com

www.bdniyog.com

❑ অনুশীলনী- ৪.২

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

❑ কাজ-১ : সূচকের মাধ্যমে প্রকাশ কর :

সমাধান :

(i) $10^2 = 100$	$\log_{10}100 = 2$
(ii) $3^{-2} = \frac{1}{9}$	$\log_3\frac{1}{9} = -2$
(iii) $2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\log_2\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$
(iv) $\sqrt[4]{2} = 4$	$\log_2 4 = \frac{1}{4}$

❑ কাজ-২ : ফাঁকা জায়গা পূরণ কর :

সমাধান :

সূচকের মাধ্যমে	লগের মাধ্যমে
$10^0 = 1$	$\log_{10}1 = 0$
$e^0 = 1$	$\log_e 1 = 0$
$a^0 = 1$	$\log_a 1 = 0$
$10^1 = 10$	$\log_{10}10 = 1$
$e^1 = e$	$\log_e e = 1$
	$\log_a a = 1$

পাঠ্যবইয়ের উদাহরণসমূহ

উদাহরণ– ৭॥ মান নির্ণয় কর : ক) $\log_{10}100$ খ) $\log_3\left(\frac{1}{9}\right)$ গ) $\log_{\sqrt{3}}81$

সমাধান :

ক) $\log_{10}100 = \log_{10}10^2 = 2\log_{10}10$ [$\because \log_{10}M^r = r\log_{10}M$]
$= 2 \times 1$ [$\because \log_a a = 1$]
$= 2$ (Ans.)

খ) $\log_3\left(\frac{1}{9}\right) = \log_3\left(\frac{1}{3^2}\right) = \log_3 3^{-2} = -2\log_3 3$ [$\log_a M^r = r\log_a M$]
$= -2 \times 1$ [$\because \log_a a = 1$]
$= -2$ (Ans.)

গ) $\log_{\sqrt{3}}81 = \log_{\sqrt{3}}3^4 = \log_{\sqrt{3}}\{(\sqrt{3})\}^4 = \log_{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^8$
$= 8\log_{\sqrt{3}}\sqrt{3}$ [$\because \log_a M^r = r\log_a M$]
$= 8 \times 1$ [$\because \log_a a = 1$]
$= 8$ (Ans.)

উদাহরণ– ৮॥ ক) $5\sqrt{5}$ এর 5 ভিত্তিক লগ কত?

খ) 400 এর লগ 4; ভিত্তি কত?

সমাধান :

ক) ∴ $5\sqrt{5}$ এর 5 ভিত্তিক লগ
$= \log_5 5\sqrt{5} = \log_5(5 \times 5^{\frac{1}{2}}) = \log_5 5^{\frac{3}{2}}$
$= \frac{3}{2}\log_5 5$ [$\because \log_a M^r = r\log_a M$]
$= \frac{3}{2} \times 1$ [$\because \log_a a = 1$]
$= \frac{3}{2}$ (Ans.)

খ) ধরি, ভিত্তি a
∴ প্রশ্নমতে, $\log_a 400 = 4$
বা, $a^4 = (20)^2$
বা, $a^4 = (4 \times 5)^2$
বা, $a^4 = (2\sqrt{5})^4$
∴ $a = 2\sqrt{5}$ [$\because a^x = b^x$ হলে, $a = b$]
∴ ভিত্তি $2\sqrt{5}$ (Ans.)

উদাহরণ– ৯॥ x এর মান নির্ণয় কর :
ক) $\log_{10}x = -2$
খ) $\log_x 324 = 4$

সমাধান :

ক) $\log_{10}x = -2$
∴ $x = 10^{-2} = \frac{1}{10^2}$
বা, $x = \frac{1}{100} = 0.01$
∴ $x = 0.01$ (Ans.)

খ) $\log_x 324 = 4$
∴ $x^4 = 324 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2$
$= 3^4 \times 2^2 = 3^4 \times (\sqrt{2})^4$
বা, $x^4 = (3\sqrt{2})^4$
∴ $x = 3\sqrt{2}$ (Ans.)

উদাহরণ– ১০॥ প্রমাণ কর যে, $3\log_{10}2 + \log_{10}5 = \log_{10}40$

সমাধান :

বামপক্ষ $= 3\log_{10}2 + \log_{10}5$
$= \log_{10}2^3 + \log_{10}5$ [$\because \log_a M^r = r\log_a M$]
$= \log_{10}8 + \log_{10}5$
$= \log_{10}(8 \times 5)$ [$\because \log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$]
$= \log_{10}40$
= ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

উদাহরণ– ১১॥ সরল কর : $\frac{\log_{10}\sqrt{27} + \log_{10}8 - \log_{10}\sqrt{1000}}{\log_{10}1.2}$

সমাধান : $\frac{\log_{10}\sqrt{27} + \log_{10}8 - \log_{10}\sqrt{1000}}{\log_{10}1.2}$

$= \frac{\log_{10}(3^3)^{\frac{1}{2}} + \log_{10}2^3 - \log_{10}(10^3)^{\frac{1}{2}}}{\log_{10}\frac{12}{10}}$

www.bdniyog.com