www.bdniyog.com

অধ্যায় ৩ বীজগাণিতিক রাশি

I ❤ MyMahbub

বাস্তব সমস্যা সমাধানের জন্য বীজগাণিতিক সূত্র গঠন করতে পারবে এবং সূত্র প্রয়োগ করে সমস্যা সমাধান করতে পারবে।

যা মনে রাখতে হবে...

❖ **বর্গের সূত্রাবলি :**

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
  $= (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca)$
- $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$
- $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$
- $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$
- $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$
- $2(a^2 + b^2) = (a+b)^2 + (a-b)^2$
- $a^2 + b^2 = \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{2}$
- $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$
- $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$
- $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

❖ **ঘন সম্পর্কিত সূত্রবলি :**

- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$
- $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}$

❖ **রাশি :** এক বা একাধিক চলক ও ধ্রুবককে +, −, ×, ÷ ক্রিয়াসূচক চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করা হলে তার বিন্যাসকে (বীজগাণিতিক) রাশি বলে। যেমন : $ax^2 + bx + c$

❖ **চল বা চলক :** যে প্রতীক নির্দিষ্ট সেটের যে কোনো উপাদানকে বোঝায়, তাকে চল বলে। যেমন –
$A = \{x \in R : 1 \le x \le 3\}$ এক্ষেত্রে x একটি চল। x এর মান 1 হতে 3 পর্যন্ত যেকোনো বাস্তব সংখ্যা।

❖ **ঘাত :** a^n কে a এর n তম ঘাত বলে যেখানে, $n \in N$.

❖ **সূত্র :** সূত্র হলো চলক সম্বলিত সমীকরণ যা সংশ্লিষ্ট চলকের যেকোনো মানের জন্য সত্য। অন্যভাবে সূত্র হল প্রতীক দ্বারা প্রকাশিত সাধারণ নিয়ম।

❖ **উৎপাদক :** যদি একটি রাশি দুই বা ততোধিক রাশির গুণফলের সমান হয়, তাহলে শেষোক্ত রাশিগুলোর প্রত্যেকটিকে প্রথমোক্ত রাশির উৎপাদক বা গুণনীয়ক বলে।
যেমন— $a^2 + a - 6 = (a+3)(a-2)$
এখানে, $(a+3)$ ও $(a-2)$, $a^2 + a - 6$ এর দুটি উৎপাদক।

❖ **উৎপাদকে বিশ্লেষণ :** কোনো বীজগণিতীয় রাশির সবগুলো সম্ভাব্য উৎপাদক বের করে একে লব্ধ উৎপাদকগুলোর গুণফলরূপে প্রকাশ করাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ বলা হয়।

❖ **উৎপাদক নির্ণয় করার পদ্ধতি :**

(i) প্রথমে প্রদত্ত রাশিমালাটিকে পর্যবেক্ষণ করে দেখতে হবে সবগুলো পদে কোনো সাধারণ উৎপাদক অর্থাৎ এক জাতীয় রাশি আছে কিনা। যদি থাকে তবে তা Common নিতে হবে। যেমন—
$2ax^2 - 2ay^2$ রাশিটিতে সাধারণ উৎপাদক 2a. সুতরাং 2a, Common নিয়ে রাশিটিকে লেখা যায়, $2ax^2 - 2ay^2 = 2a(x^2 - y^2)$

(ii) সাধারণ উৎপাদক Common নেয়ার পর প্রাপ্ত রাশিটিকে সূত্রের সাহায্যে উৎপাদক নির্ণয় করা সম্ভব হলে তা করতে হবে। যেমন—
ওপরের উদাহরণে $2ax^2 - 2ay^2 = 2a(x^2 - y^2)$
$= 2a(x+y)(x-y)$

(iii) $ax^2 + bx + c$ আকারের রাশির জন্য – Middle term break up (মধ্যপদী বিশ্লেষণ) পদ্ধতি প্রয়োগ করতে হবে।

❖ **ফাংশন :** যদি দুটি চলরাশি x ও y এরূপভাবে সম্পর্কযুক্ত হয় যে, x এর যে কোনো মানের জন্য y এর অনুরূপ একটি মান পাওয়া যায়, তবে y-কে x-এর ফাংশন বলে। যেমন : $y = 2x^2 + 5$
এখানে, x স্বাধীন চলক এবং y অধীন চলক।
ফাংশনকে সাধারণত f, F, g, h ইত্যাদি দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যেমন, $y = f(x) = 2x^2 + 5$

www.bdniyog.com

www.bdniyog.com

❖ **ভাগশেষ উপপাদ্য :** কোনো বহুপদী ফাংশন $f(x)$-কে $(x - a)$ আকারের বহুপদী দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে তা ভাগ না করে বের করার সূত্রই হল ভাগশেষ উপপাদ্য।

যদি কোনো বহুপদী ফাংশন $f(x)$ এর মান x এর কোনো একটি নির্দিষ্ট মান a এর জন্য শূন্য অর্থাৎ $f(a) = 0$ হয়, তবে $(x - a)$ হবে এর একটি উৎপাদক। যেমন,

$f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

এখানে, $x = -1$ বসালে,

$f(-1) = (-1)^3 + 6.(-1)^2 + 11.(-1) + 6$
$= -1 + 6 - 11 + 6$
$= 12 - 12$
$= 0$

$\therefore$ $x - (-1)$ অর্থাৎ $x + 1$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

❖ **উৎপাদক উপপাদ্য :** কোনো বহুপদী $f(x)$, $x - a$ দ্বারা বিভাজ্য হবে যদি এবং কেবল যদি $f(a) = 0$ হয়।

❑ অনুশীলনী- ৩.১

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

❑ **কাজ-:** সূত্রের সাহায্যে বর্গ নির্ণয় কর : [পৃষ্ঠা-৪১]

১। $3xy + 2ax$

সমাধান : $3xy + 2ax$ এর বর্গ
$= (3xy + 2ax)^2$
$= (3xy)^2 + 2.3xy.2ax + (2ax)^2$
$= 9x^2y^2 + 12ax^2y + 4a^2x^2$
$= x^2(9y^2 + 12ay + 4a^2)$ (Ans.)

২। $4x - 3y$

সমাধান : $4x - 3y$ এর বর্গ
$= (4x - 3y)^2$
$= (4x)^2 - 2.4x.3y + (3y)^2$
$= 16x^2 - 24xy + 9y^2$ (Ans.)

৩। $x - 5y + 2z$

সমাধান : $x - 5y + 2z$ এর বর্গ $= (x - 5y + 2z)^2$
$= (x - 5y)^2 + 2(x - 5y)\,2z + (2z)^2$
$= x^2 - 2.x.5y + (5y)^2 + 4xz - 20yz + 4z^2$
$= x^2 - 10xy + 25y^2 + 4xz - 20yz + 4z^2$ (Ans.)

অথবা, $x - 5y + 2z$ এর বর্গ $= (x - 5y + 2z)^2$
$= x^2 + (-5y)^2 + (2z)^2 + 2.x.(-5y) + 2.(-5y).2z + 2.x.2z$
$= x^2 + 25y^2 + 4z^2 - 10xy - 20yz + 4xz$ (Ans.)

❑ **কাজ**

১। সরল কর : $(4x + 3y)^2 + 2(4x + 3y)(4x - 3y) + (4x - 3y)^2$ [পৃষ্ঠা-৮৬]

সমাধান : ধরি, $4x + 3y = a$
এবং $4x - 3y = b$
$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= a^2 + 2ab + b^2$
$= (a + b)^2$
$= (4x + 3y + 4x - 3y)^2$ [a ও b এর মান বসিয়ে]
$= (8x)^2$
$= 64x^2$ (Ans.)

২। $x + y + z = 12$ এবং $x^2 + y^2 + z^2 = 50$ হলে, $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $x + y + z = 12$
বা, $(x + y + z)^2 = (12)^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]
বা, $x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 144$
বা, $50 + 2(xy + yz + zx) = 144$
বা, $2(xy + yz + zx) = 144 - 50$
বা, $xy + yz + zx = \frac{94}{2}$
$\therefore xy + yz + zx = 47$
$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$
$= x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2$
$= 2(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx)$
$= 2 \times 50 - 2 \times 47$ [মান বসিয়ে]
$= 100 - 94 = 6$ (Ans.)

পাঠ্যবইয়ের গুরুত্বপূর্ণ উদাহরণসমূহ

উদাহরণ- ৪। $a + b + c + d$ এর বর্গ কত?

সমাধান : $a + b + c + d$ এর বর্গ $(a + b + c + d)^2 = \{(a + b) + (c + d)\}^2$
$= (a + b)^2 + 2(a + b)(c + d) + (c + d)^2$
$= a^2 + 2ab + b^2 + 2(ac + ad + bc + bd) + c^2 + 2cd + d^2$
$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + c^2 + 2cd + d^2$
$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$ (Ans.)

উদাহরণ- ৫। সরল কর : $(5x + 7y + 3z)^2 + 2(7x - 7y - 3z)(5x + 7y + 3z) + (7x - 7y - 3z)^2$

সমাধান : ধরি, $5x + 7y + 3z = a$ এবং $7x - 7y - 3z = b$
$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= a^2 + 2.b.a + b^2$
$= a^2 + 2ab + b^2$
$= (a + b)^2$
$= \{(5x + 7y + 3z) + (7x - 7y - 3z)\}^2$ [a ও b এর মান বসিয়ে]
$= (5x + 7y + 3z + 7x - 7y - 3z)^2$
$= (12x)^2$
$= 144x^2$ (Ans.)

উদাহরণ- ৬। $x - y = 2$ এবং $xy = 24$ হলে, $x + y$ এর মান কত?

সমাধান : দেওয়া আছে, $x - y = 2$ এবং $xy = 24$
এখন, $x + y$ এর মান বের করতে হবে।
আমরা জানি, $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy = (2)^2 + 4 \times 24 = 4 + 96 = 100$
$\therefore x + y = \pm\sqrt{100} = \pm 10$ (Ans.)

www.bdniyog.com

www.bdniyog.com

উদাহরণ– ৭। যদি $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 3$ এবং $a^2 + ab + b^2 = 3$ হয়, তবে $a^2 + b^2$ এর মান কত?

সমাধান : $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 3$ এবং $a^2 + ab + b^2 = 3$ হলে $a^2 + b^2$ এর মান বের করতে হবে।

$a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2)^2 + 2a^2b^2 + (b^2)^2 - a^2b^2$

$= (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2$

$= (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$

$= (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$

$\therefore 3 = 3(a^2 - ab + b^2)$ [মান বসিয়ে]

বা, $a^2 - ab + b^2 = \frac{3}{3} = 1$

এখন, $a^2 + ab + b^2 = 3$ এবং $a^2 - ab + b^2 = 1$ যোগ করে পাই, $2(a^2 + b^2) = 4$

বা, $a^2 + b^2 = \frac{4}{2} = 2$

$\therefore a^2 + b^2 = 2$ (Ans.)

উদাহরণ– ৮। প্রমাণ কর যে, $(a + b)^4 - (a - b)^4 = 8ab(a^2 + b^2)$

সমাধান : প্রমাণ করতে হবে যে, $(a + b)^4 - (a - b)^4 = 8ab(a^2 + b^2)$

$(a + b)^4 - (a - b)^4 = \{(a + b)^2\}^2 - \{(a - b)^2\}^2$

$= \{(a + b)^2 + (a - b)^2\}\{(a + b)^2 - (a - b)^2\}$

$= 2(a^2 + b^2) \times 4ab$

[$\because (a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$ এবং $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$]

$= 8ab(a^2 + b^2)$

$\therefore (a + b)^4 - (a - b)^4 = 8ab(a^2 + b^2)$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ– ৯। $a + b + c = 15$ এবং $a^2 + b^2 + c^2 = 83$ হলে, $ab + bc + ca$ এর মান কত?

সমাধান : $a + b + c = 15$ এবং $a^2 + b^2 + c^2 = 83$ হলে, $ab + bc + ca$ এর মান বের করতে হবে।

এখানে, $2(ab + bc + ac)$

$= (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$

$= (15)^2 - 83$

$= 225 - 83$ [মান বসিয়ে]

$= 142$

$\therefore ab + bc + ac = \frac{142}{2} = 71$ (Ans.)

বিকল্প পদ্ধতি :

আমরা জানি,

$(a + b + c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ac)$

বা, $(15)^2 = 83 + 2(ab + bc + ac)$

বা, $255 - 83 = 2(ab + bc + ac)$

বা, $2(ab + bc + ac) = 142$

$\therefore ab + bc + ca = \frac{142}{2} = 71$ (Ans.)

উদাহরণ–১০। $a + b + c = 2$ এবং $ab + bc + ac = 1$ হলে, $(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2$ এর মান কত?

সমাধান : $a + b + c = 2$ এবং $ab + bc + ac = 1$ হলে, $(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2$ এর মান বের করতে হবে।

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি, $(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2$

$= a^2 + 2ab + b^2 + b^2 + 2ab + c^2 + c^2 + 2ca + a^2$

$= (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) + (a^2 + b^2 + c^2)$

$= (a + b + c)^2 + \{(a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ac)\}$

$= 4 + 4 - 2 = 8 - 2 = 6$ (Ans.)

উদাহরণ– ১১। $(2x + 3y)(4x - 5y)$ কে দুটি বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ কর।

সমাধান : $(2x + 3y)(4x - 5y)$ কে দুটি বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ করতে হবে।

ধরি, $2x + 3y = a$ এবং $4x - 5y = b$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= ab$

আমরা জানি, $ab = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a - b}{2}\right)^2$

$\therefore (2x + 3y)(4x - 5y) = \left(\frac{2x + 3y + 4x - 5y}{2}\right)^2 - \left(\frac{2x + 3y - 4x + 5y}{2}\right)^2$

[a ও b এর মান বসিয়ে]

$= \left(\frac{2(3x - y)}{2}\right)^2 - \left(\frac{2(4y - x)}{2}\right)^2$

$= (3x - y)^2 - (4y - x)^2$

$\therefore (2x + 3y)(4x - 5y) = (3x - y)^2 - (4y - x)^2$ (প্রকাশিতরূপ)

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ৩.১

১। সূত্রের সাহায্যে বর্গ নির্ণয় কর।

ক) $2a + 3b$ এর বর্গ কত?

সমাধান : $(2a + 3b)^2$

$= (2a)^2 + 2.2a.3b + (3b)^2$

$= 4a^2 + 12ab + 9b^2$ (Ans.)

খ) $2ab + 3bc$

সমাধান : $(2ab + 3bc)^2$

$= (2ab)^2 + 2.2ab.3bc + (3bc)^2$

$= 4a^2b^2 + 12ab^2c + 9b^2c^2$ (Ans.)

গ) $x^2 + \frac{2}{y^2}$

সমাধান : $\left(x^2 + \frac{2}{y^2}\right)^2$

$= (x^2)^2 + 2.x^2.\frac{2}{y^2} + \left(\frac{2}{y^2}\right)^2$

$= x^4 + 4\frac{x^2}{y^2} + \frac{4}{y^4}$

$= x^4 + \frac{4x^2}{y^2} + \frac{4}{y^4}$ (Ans.)

ঘ) $a + \frac{1}{a}$

সমাধান : $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2$

$= a^2 + 2.a.\frac{1}{a} + \left(\frac{1}{a}\right)^2$

$= a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}$ (Ans.)

www.bdniyog.com

ঙ) $4y - 5x$

সমাধান : $(4y - 5x)^2$
$= (4y)^2 - 2.4y.5x + (5y)^2$
$= 16y^2 - 40xy + 25y^2$ (Ans.)

চ) $ab - c$

সমাধান : $(ab - c)^2$
$= (ab)^2 - 2.ab.c + c^2$
$= a^2b^2 - 2abc + c^2$ (Ans.)

ছ) $5x^2 - y$

সমাধান : $(5x^2 - y)^2$
$= (5x^2)^2 - 2.5x^2.y + y^2$
$= 25x^4 - 10x^2y + y^2$ (Ans.)

জ) $x + 2y + 4z$

সমাধান : $(x + 2y + 4z)^2$
$= \{(x + 2y) + 4z\}^2$
$= (x + 2y)^2 + 2.(x + 2y).4z + (4z)^2$
$= x^2 + 2.x.2y + 4y^2 + 8z(x + 2y) + 16z^2$
$= x^2 + 4xy + 4y^2 + 8xz + 16yz + 16z^2$
$= x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 4xy + 8xz + 16yz$ (Ans.)

ঝ) $3p + 4q - 5r$

সমাধান : $(3p + 4q - 5r)^2$
$= \{(3p + 4q) - 5r\}^2$
$= (3p + 4q)^2 - 2.(3p + 4q).5r + (5r)^2$
$= (3p)^2 + 2.3p.4q + (4q)^2 - 10r(3p + 4q) + 25r^2$
$= 9p^2 + 24pq + 16q^2 - 30pr - 40qr + 25r^2$
$= 9p^2 + 16q^2 + 25r^2 + 24pq - 30pr - 40qr$ (Ans.)

ঞ) $3b - 5c - 2a$

সমাধান : $(3b - 5c - 2a)^2$
$= \{(3b - 5c) - 2a\}^2$
$= (3b - 5c)^2 - 2.(3b - 5c).2a + (2a)^2$
$= (3b)^2 - 2.3b.5c + (5c)^2 - 4a(3b - 5c) + 4a^2$
$= 9b^2 - 30bc + 25c^2 - 12ab + 20ac + 4a^2$
$= 4a^2 + 9b^2 + 25c^2 - 12ab - 30bc + 20ca$ (Ans.)

ট) $ax - by - cz$

সমাধান : $(ax - by - cz)^2$
$= \{(ax - by) - cz\}^2$
$= (ax - by)^2 - 2.(ax - by).cz + (cz)^2$
$= (ax)^2 - 2ax.by + (by)^2 - 2cz(ax - by) + c^2z^2$
$= a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 - 2cz.ax + 2cz.by + c^2z^2$
$= a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - 2abxy - 2acxz + 2bcyz$ (Ans.)

ঠ) $a - b + c - d$

সমাধান : $(a - b + c - d)^2$
$= \{(a - b) + (c - d)\}^2$
$= (a - b)^2 + 2(a - b)(c - d) + (c - d)^2$
$= a^2 - 2ab + b^2 + 2ac - 2ad - 2bc + 2bd + c^2 - 2cd + d^2$
$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab + 2ac - 2ad - 2bc + 2bd - 2cd$
(Ans.)

ড) $2a + 3x - 2y - 5z$

সমাধান : $2a + 3x - 2y - 5z$
$= \{(2a + 3x) - (2y + 5z)\}^2$
$= (2a + 3x)^2 - 2.(2a + 3x).(2y + 5z) + (2y + 5z)^2$
$= (2a)^2 + 2.2a.3x + (3x)^2 - 2\{4ay + 10az + 6xy + 15xz\} + (2y)^2 + 2.2y.5z + (5z)^2$
$= 4a^2 + 9x^2 + 4y^2 + 25z^2 + 12ax - 8ay - 20az - 12xy - 30xz + 20yz$
(Ans.)

ঢ) 101

সমাধান : $(101)^2$
$= (100 + 1)^2$
$= (100)^2 + 2.100.1 + 1^2$
$= 10,000 + 200 + 1$
$= 10201$ (Ans.)

ণ) 997

সমাধান : $(997)^2$
$= (1000 - 3)^2$
$= (1000)^2 - 2.1000.3 + 3^2$
$= 1000000 - 6000 + 9$
$= 1000009 - 6000$
$= 994009$ (Ans.)

ত) 1007

সমাধান : $(1007)^2$
$= (1000 + 7)^2$
$= (1000)^2 + 2.1000.7 + (7)^2$
$= 1000000 + 14000 + 49$
$= 1014049$ (Ans.)

২। সরল কর :

ক) $(2a + 7)^2 + 2(2a + 7)(2a - 7) + (2a - 7)^2$

সমাধান : মনে করি, $2a + 7 = a$
এবং $2a - 7 = b$

প্রদত্ত রাশি,
$a^2 + 2ab + b^2$
$= (a + b)^2$
$= \{(2a + 7) + (2a - 7)\}^2$ [a ও b এর মান বসিয়ে]
$= (2a + 7 + 2a - 7)^2$
$= (4a)^2$
$= 16a^2$ (Ans.)

খ) $(3x + 2y)^2 + 2(3x + 2y)(3x - 2y) + (3x - 2y)^2$

সমাধান : মনে করি, $(3x + 2y) = a$
এবং $3x - 2y = b$

প্রদত্ত রাশি,
$= (a)^2 + 2.a.b + (b)^2$
$= a^2 + 2ab + b^2$
$= (a + b)^2$
$= \{(3x + 2y)^2 + (3x - 2y)\}^2$ [a ও b এর মান বসিয়ে]
$= (3x + 2y + 3x - 2y)^2$
$= (6x)^2$
$= 36x^2$ (Ans.)

গ) $(7p + 3r - 5x)^2 - 2(7p + 3r - 5x)(8p - 4r - 5x) + (8p - 4r - 5x)^2$

সমাধান : মনে করি, $7p + 3r - 5x = a$
$8p - 4r - 5x = b$

প্রদত্ত রাশি,
$= (a)^2 - 2.a.b + (b)^2$
$= a^2 - 2ab + b^2$
$= (a - b)^2$
$= \{(7p + 3r - 5x) - 8p - 4r - 5x)\}^2$
$= (7p + 3r - 5x - 8p + 4r + 5x)^2$ [a ও b এর মান বসিয়ে]
$= (-p + 7r)^2$
$= (7r - p)^2$
$= (7r)^2 - 2.7r.p + (p)^2$
$= 49r^2 - 14rp + p^2$
$= p^2 + 49r^2 - 14rp$ (Ans.)

www.bdniyog.com

ঘ) $(2m + 3n - p)^2 + (2m - 3n + p)^2 - 2(2m + 3n - p)(2m - 3n + p)$

সমাধান : মনে করি, $2m + 3n - p = a$
$2m - 3n + p = b$

প্রদত্ত রাশি,
$= (a)^2 + (b)^2 - 2.a.b$
$= a^2 - 2ab + b^2$
$= (a - b)^2$
$= \{(2m + 3n - p) - (2m - 3n + p)\}^2$ [a, b এর মান বসিয়ে]
$= (2m + 3n - p - 2m + 3n - p)^2$
$= (6n - 2p)^2$
$= (6n)^2 - 2.6n.2p + (2p)^2$
$= 36n^2 - 24np + 4p^2$ (Ans.)

ঙ) $6.35 \times 6.35 + 2 \times 6.35 \times 3.65 + 3.65 \times 3.65$

সমাধান : মনে করি, $6.35 = a$
$3.65 = b$

∴ প্রদত্ত রাশি,
$= a \times a + 2 \times a \times b + b \times b$
$= a^2 + 2ab + b^2$
$= (a + b)^2$
$= (6.35 + 3.65)^2$ [a, b এর মান বসিয়ে]
$= (10)^2$
$= 100$ (Ans.)

চ) $5874 \times 5874 + 3774 \times 3774 - 7548 \times 5874$

সমাধান : মনে করি, $5874 = a$
$3774 = b$

প্রদত্ত রাশি,
$5874 \times 5874 + 3774 \times 3774 - 7548 \times 5874$
$= a \times a + b \times b - 2 \times b \times a$
$= a^2 + b^2 - 2ab$
$= a^2 - 2ab + b^2$
$= (a - b)^2$
$= (5874 - 3774)^2$ [a ও b এর মান বসিয়ে]
$= (2100)^2$
$= 4410000$ (Ans.)

ছ) $\dfrac{7529 \times 7529 - 7519 \times 7519}{7529 + 7519}$

সমাধান : মনে করি, $7529 = a$
$7519 = b$

$\therefore \dfrac{a \times a - b \times b}{a + b}$
$= \dfrac{a^2 - b^2}{a + b}$
$= \dfrac{(a + b)(a - b)}{(a + b)}$
$= (a - b)$
$= (7529 - 7519)$ [a ও b এর মান বসিয়ে]
$= 10$ (Ans.)

জ) $\dfrac{2345 \times 2345 - 759 \times 759}{2345 - 759}$

সমাধান : মনে করি, $2345 = a$
$759 = b$

$\therefore \dfrac{a \times a - b \times b}{a - b}$
$= \dfrac{a^2 - b^2}{(a - b)}$
$= \dfrac{(a + b)(a - b)}{(a - b)}$
$= (a + b)$
$= (2345 + 759)$ [a ও b এর মান বসিয়ে]
$= 3104$ (Ans.)

৩। $a - b = 4$ এবং $ab = 60$ হলে $a + b$ এর মান কত?

সমাধান : দেয়া আছে, $a - b = 4$
এবং $ab = 60$
$\therefore a + b = ?$

আমরা জানি, $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$
$= (4)^2 + 4.60$
$= 16 + 240$
$= 256$
$\therefore a + b = \pm\sqrt{256}$
$= \pm 16$ (Ans.)

৪। $a + b = 7$ এবং $ab = 12$ হলে $a - b$ এর মান কত?

সমাধান : দেয়া আছে, $a + b = 7$
এবং $ab = 12$
$\therefore a - b = ?$

আমরা জানি, $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$
$= (7)^2 - 4 \times 12$
$= 49 - 48$
$= 1$
$\therefore a - b = \pm\sqrt{1}$
$= \pm 1$ (Ans.)

৫। $a + b = 9m$ এবং $ab = 18\ m^2$ হলে $a - b$ এর মান কত?

সমাধান : দেয়া আছে, $a + b = 9m$
এবং $ab = 18m^2$
$\therefore a - b = ?$

আমরা জানি, $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$
$= (9m)^2 - 4 \times 18m^2$
$= 81m^2 - 72m^2$
$= 9m^2$
$\therefore a - b = \pm\sqrt{9m^2}$
$= \pm 3m$ (Ans.)

৬। $x - y = 2$ এবং $xy = 63$ হলে, $x^2 + y^2$ এর মান কত?

সমাধান : দেয়া আছে, $x - y = 2$
এবং $xy = 63$
$\therefore x^2 + y^2 = ?$

আমরা জানি, $x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$
$= (2)^2 + 2 \times 63$
$= 4 + 126$
$= 130$ (Ans.)

৭। $x - \dfrac{1}{x} = 4$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^4 - \dfrac{1}{x^4} = 322$.

সমাধান : দেয়া আছে, $x - \dfrac{1}{x} = 4$

বা, $\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 = (4)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $x^2 - 2.x.\dfrac{1}{x} + \left(\dfrac{1}{x}\right)^2 = 16$

বা, $(x)^2 + \left(\dfrac{1}{x}\right)^2 = 16 + 2$

www.bdniyog.com

www.bdniyog.com

বা, $x^2 + \frac{1}{x^2} = 18$

বা, $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = (18)^2$ [পুনরায় উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $(x^2)^2 + 2x^2.\frac{1}{x^2} + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 = 324$

বা, $x^4 + \frac{1}{x^4} = 324 - 2$

বা, $x^4 + \frac{1}{x^4} = 322$ (প্রমাণিত)

৮। $2x + \frac{2}{x} = 3$ হলে, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ এর মান কত?

সমাধান: দেয়া আছে, $2x + \frac{2}{x} = 3$

বা, $\left(2x + \frac{2}{x}\right)^2 = (3)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $4x^2 + 2.2x.\frac{2}{x} + \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 9$

বা, $4x^2 + 8 + \frac{4}{x^2} = 9$

বা, $4x^2 + \frac{4}{x^2} = 9 - 8$

বা, $4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$

বা, $x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}$

$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= \frac{1}{4}$

৯। $a + \frac{1}{a} = 2$ হলে, দেখাও যে, $a^2 + \frac{1}{a^2} = a^4 + \frac{1}{a^4}$

সমাধান: দেয়া আছে, $a + \frac{1}{a} = 2$

বা, $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = (2)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $a^2 + 2.a.\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} = 4$

বা, $a^2 + \frac{1}{a^2} = 4 - 2$

$\therefore a^2 + \frac{1}{a^2} = 2$

আবার, $a^2 + \frac{1}{a^2} = 2$

বা, $\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 = (2)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $(a^2)^2 + 2a^2.\frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{a^2}\right)^2 = 4$

বা, $a^4 + \frac{1}{a^4} = 4 - 2$

$\therefore a^4 + \frac{1}{a^4} = 2$

অতএব, $a^2 + \frac{1}{a^2} = a^4 + \frac{1}{a^4}$ [দেখানো হলো]

১০। $a + b = \sqrt{7}$ এবং $a - b = \sqrt{5}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $8ab(a^2 + b^2) = 24$

সমাধান: দেয়া আছে, $a + b = \sqrt{7}$

$a - b = \sqrt{5}$

এখন, বামপক্ষ $= 8ab(a^2 + b^2)$

$= 4ab \times 2(a^2 + b^2)$

$= \{(a + b)^2 - (a - b)^2\} \times \{(a + b)^2 + (a - b)^2\}$ [সূত্র প্রয়োগ করে]

$= \{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2\} \times \{(\sqrt{7})^2 + (\sqrt{5})^2\}$

$= (7 - 5) \times (7 + 5)$

$= 2 \times 12$

$= 24$

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ $=$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

১১। $a + b + c = 9$ এবং $ab + bc + ca = 31$ হলে, $a^2 + b^2 + c^2$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেয়া আছে, $a + b + c = 9$

এবং $ab + bc + ca = 31$

আমরা জানি,

$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$

$= (9)^2 - 2 \times 31$

$= 81 - 62$

$= 19$ (Ans.)

১২। $a^2 + b^2 + c^2 = 9$ এবং $ab + bc + ca = 8$ হলে, $(a + b + c)^2$ এর মান কত?

সমাধান: দেয়া আছে, $a^2 + b^2 + c^2 = 9$

এবং $ab + bc + ca = 8$

আমরা জানি,

$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$

বা, $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

$= 9 + 2 \times 8$ [মান বসিয়ে]

$= 9 + 16$

$= 25$ (Ans.)

১৩। $a + b + c = 6$ এবং $a^2 + b^2 + c^2 = 14$ হলে, $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেয়া আছে, $a + b + c = 6$

এবং $a^2 + b^2 + c^2 = 14$

এখন, $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$

$= a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2$

$= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca$

$= 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca)$

$= 2(a^2 + b^2 + c^2) + (a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2$

$[\because a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)]$

$= 2 \times 14 + 14 - (6)^2$

$= 28 + 14 - 36$

$= 42 - 36$

$= 6$ (Ans.)

www.bdniyog.com

www.bdniyog.com

১৪। $x + y + z = 10$ এবং $xy + yz + zx = 31$ হলে, $(x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2$ এর মান কত?

সমাধান : দেয়া আছে, $x + y + z = 10$

$xy + yz + zx = 31$

এখন, $(x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2$

$= x^2 + 2xy + y^2 + y^2 + 2yz + z^2 + z^2 + 2xz + x^2$

$= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$

$= 2(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + xz)$

$= 2\{(x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)\} + 2(xy + yz + xz)$

$= 2(x + y + z)^2 - 4(xy + yz + zx) + 2(xy + yz + xz)$

$= 2 \times (10)^2 - 4 \times 31 + 2 \times 31$

$= 2 \times 100 - 124 + 62$

$= 200 - 124 + 62$

$= 262 - 124$

$= 138$ (Ans.)

১৫। $x = 3$, $y = 4$ এবং $z = 5$ হলে, $9x^2 + 16y^2 + 4z^2 - 24xy - 16yz + 12zx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান :

দেয়া আছে, $x = 3$

$y = 4$

এবং $z = 5$

এখন, $9x^2 + 16y^2 + 4z^2 - 24xy - 16yz + 12zx$

$= 9 \times (3)^2 + 16(4)^2 + 4(5)^2 - 24 \times 3 \times 4 - 16 \times 4 \times 5 + 12 \times 5 \times 3$

$= 9 \times 9 + 16 \times 16 + 4 \times 25 - 288 - 320 + 180$

$= 81 + 256 + 100 - 288 - 320 + 180$

$= 617 - 608$

$= 9$ (Ans.)

১৬। প্রমাণ কর যে,

$$\left\{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2\right\}^2 = \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)^2$$

সমাধান :

বামপক্ষ $= \left\{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2\right\}^2$

$= \left\{\frac{(x+y)^2}{4} - \frac{(x-y)^2}{4}\right\}^2$

$= \left\{\frac{x^2+2xy+y^2}{4} - \frac{x^2-2xy+y^2}{4}\right\}^2$

$= \left\{\frac{x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2}{4}\right\}^2$

$= \left(\frac{4xy}{4}\right)^2$

$= x^2y^2$

ডানপক্ষ $= \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)^2$

$= \frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{4} - \frac{x^4-2x^2y^2+y^4}{4}$

$= \frac{x^4+2x^2y^2+y^4-x^4+2x^2y^2-y^4}{4}$

$= \frac{4x^2y^2}{4}$

$= x^2y^2$

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

১৭। $(a + 2b)(3a + 2c)$ কে দুইটি বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ কর।

সমাধান : মনে করি, $a + 2b = x$

$3a + 2c = y$

প্রদত্ত রাশি $= (a + 2b)(3a + 2c)$

$= xy$

$= \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$

$= \left(\frac{a+2b+3a+2c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+2b-3a-2c}{2}\right)^2$ [x ও y এর মান বসিয়ে]

$= \left(\frac{4a+2b+2c}{2}\right)^2 - \left(\frac{2b-2a-2c}{2}\right)^2$

$= \left\{\frac{2(2a+b+c)}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{2(b-a-c)}{2}\right\}^2$

$= (2a + b + c)^2 - (b - a - c)^2$

এটিই দুইটি বর্গের বিয়োগফল।

∴ $(a + 2b)(3a + 2c) = (2a + b + c)^2 - (b - a - c)^2$ (Ans.)

১৮। $(x + 7)(x - 9)$ কে দুইটি বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ কর।

সমাধান : মনে করি, $x + 7 = a$

$x - 9 = b$

প্রদত্ত রাশি $= (x + 7)(x - 9)$

$= ab$

$= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

$= \left(\frac{x+7+x-9}{2}\right)^2 - \left(\frac{x+7-x+9}{2}\right)^2$

$= \left(\frac{2x-2}{2}\right)^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2$ [a ও b এর মান বসিয়ে]

$= \left\{\frac{2(x-1)}{2}\right\}^2 - (8)^2$

$= (x - 1)^2 - (8)^2$

এটি-ই দুইটি বর্গের বিয়োগফল

∴ $(x + 7)(x - 9) = (x - 1)^2 - (8)^2$ (Ans.)

১৯। $x^2 + 10x + 24$ কে দুইটি বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ কর।

সমাধান : এখানে, $x^2 + 10x + 24$

$= x^2 + 6x + 4x + 24$

$= x(x + 6) + 4(x + 6)$

$= (x + 6)(x + 4)$

মনে করি, $x + 6 = a$

$x + 4 = b$

∴ প্রদত্ত রাশি $= (x + 6)(x + 4)$

$= ab$

$= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

$= \left(\frac{x+6+x+4}{2}\right)^2 - \left(\frac{x+6-x-4}{2}\right)^2$

$= \left(\frac{2x+10}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2$

$= \left\{\frac{2(x+5)}{2}\right\}^2 - (1)^2$

$= (x + 5)^2 - (1)^2$

এটিই দুইটি বর্গের বিয়োগফল।

∴ $(x + 6)(x + 4) = (x + 5)^2 - (1)^2$ (Ans.)

www.bdniyog.com

www.bdniyog.com

২০। $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 8$ এবং $a^2 + ab + b^2 = 4$ হলে, (i) $a^2 + b^2$ (ii) ab এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেয়া আছে, $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 8$

বা, $(a^2)^2 + 2a^2b^2 + (b^2)^2 - a^2b^2 = 8$

বা, $(a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 = 8$

বা, $(a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab) = 8$

$[\because a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)]$

বা, $4(a^2 - ab + b^2) = 8$ $[\because a^2 + b^2 + ab = 4]$

বা, $a^2 - ab + b^2 = \frac{8}{4}$

$\therefore a^2 - ab + b^2 = 2$ ——— (i)

এবং $a^2 + ab + b^2 = 4$ ——— (ii)

(i) + (ii) নং হতে, $a^2 + ab + b = 4$

$a^2 - ab + b^2 = 2$

$2(a^2 + b^2) = 6$

$\therefore a^2 + b^2 = \frac{6}{2}$

$\therefore a^2 + b^2 = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় মান, $a^2 + b^2 = 3$

আবার (i) – (ii) নং হতে, $a^2 + ab + b^2 = 4$

$a^2 - ab + b^2 = 2$

$2ab = 2$

বা, $ab = \frac{2}{2}$

$= 1$

$\therefore$ নির্ণেয় মান, $ab = 1$

❑ অনুশীলনী- ৩.২

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

❑ কাজ-: সূত্রের সাহায্যে ঘন নির্ণয় কর : [পৃষ্ঠা-৪৬]

১। $3x + 2y$

সমাধান : $3x + 2y$

এখানে, $(3x + 2y)$ এর ঘন

$(3x + 2y)^3 = (3x)^3 + 3(3x)^2.2y + 3.3x.(2y)^2 + (2y)^3$

$= 27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$. (Ans.)

২। $3x - 4y$

সমাধান : $3x - 4y$

এখানে, $(3x - 4y)$ এর ঘন

$(3x - 4y)^3 = (3x)^3 - 3.(3x)^2.4y + 3.3x.(4y)^2 - (4y)^3$

$= 27x^3 - 108x^2y + 144xy^2 - 64y^3$ (Ans.)

৩। 397

সমাধান : 397

এখানে, 397 এর ঘন

$(397)^3 = (400 - 3)^3$

$= (400)^3 - 3.(400)^2.3 + 3.400.3^2 - (2)^3$

$= 64000000 - 1440000 + 10800 - 27$

$= 64010800 - 140027$

$= 62570773$ (Ans.)

❑ কাজ-: [পৃষ্ঠা-৪৮]

১। $x = -2$ হলে, $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$ এর মান কত?

সমাধান : দেওয়া আছে, $x = -2$

$\therefore 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$

$= (3x)^3 - 3.(3x)^2.2 + 3.3x.2^2 - (2)^3$

$= (3x - 2)^3$

$= \{3.(-2) - 2\}^3$ [মান বসিয়ে]

$= (-6 - 2)^3$

$= (-8)^3$

$= -512$ (Ans.)

২। $a + b = 5$ এবং $ab = 6$ হলে, $a^3 + b^3 + 4(a - b)^3$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $a + b = 5$ এবং $ab = 6$

এখন, $a^3 + b^3 + 4(a - b)^2$ এর মান নির্ণয় করতে হবে।

এখন, $a^3 + b^3 + 4(a - b)^2$

$= (a + b)^3 - 3ab(a + b) + 4\{(a + b)^2 - 4ab\}$

$= (5)^3 - 3.6.5 + 4\{(5)^2 - 4.6\}$

$= 125 - 90 + 4(25 - 24)$

$= 125 - 90 + 41$

$= 129 - 90$

$= 39$ (Ans.)

৩। $x = \sqrt{5} + \sqrt{3}$ হলে, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $x = \sqrt{5} + \sqrt{3}$

$= 2.2361 + 1.7321$

$= 3.9682$

$\therefore \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

$= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})}$

[লব ও হরকে $(\sqrt{5} - \sqrt{3})$ দ্বারা গুণ করে]

$= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2}$

$= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} = \frac{2.2361 - 1.7321}{2} = 0.252$

$\therefore x^3 + \frac{1}{x^3} = (3.9682)^3 + (0.252)^3$

$= 62.4857 + 0.0160$

$= 62.5017$ (Ans.)

www.bdniyog.com