

□ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা—

- জ্যামিতিক অনুপাত সম্পর্কে ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- রেখাংশের অঙ্কবিন্যাস ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- অনুপাত সম্পর্কিত উপপাদ্যগুলো যাচাই ও প্রমাণ করতে পারবে।
- সাদৃশতার অনুপাত সংক্রান্ত উপপাদ্যগুলো যাচাই ও প্রমাণ করতে পারবে।
- প্রতিসমতার ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- হাতে-কলমে বাস্তব উপকরণের সাহায্যে রেখা ও দূর্ণন প্রতিসমতা যাচাই করতে পারবে।

মা মনে রাখতে হবে...



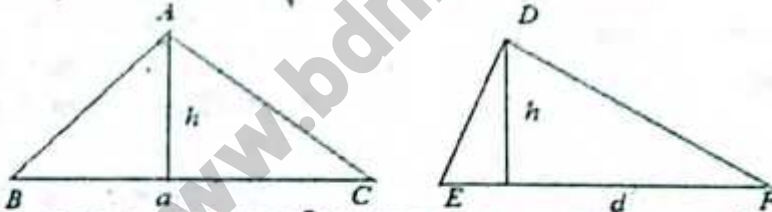
□ অনুপাত ও সমানুপাতের ধর্ম

- i) $a : b = x : y$ এবং $c : d = x : y$ হলে, $a : b = c : d$
- ii) $a : b = b : a$ হলে, $a = b$
- iii) $a : b = x : y$ হলে, $b : a = y : x$ (বাস্তকরণ)
- iv) $a : b = x : y$ হলে, $a : x = b : y$ (একান্তরকরণ)
- v) $a : b = c : d$ হলে, $ad = bc$ (আড়গুণন)
- vi) $a : b = x : y$ হলে, $a + b : b = x + y : y$ (যোজন)
এবং $a - b : b = x - y : y$ (বিয়োজন)
- vii) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হলে, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ (যোজন ও বিয়োজন)

□ জ্যামিতিক সমানুপাত:

আমরা ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে শিখেছি। এ থেকে দুইটি প্রয়োজনীয় অনুপাতের ধারণা তৈরি করা যায়।

১. দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রের উচ্চতা সমান হলে, তাদের ক্ষেত্রফল ও ভূমি সমানুপাতিক।

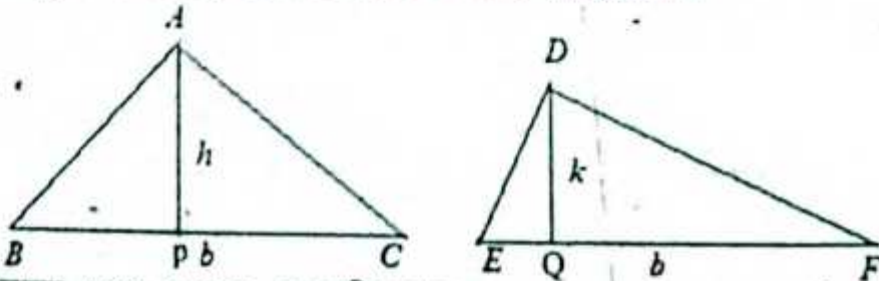


মনে করি, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC ও DEF এর ভূমি যথাক্রমে $BC = a$, $EF = d$ এবং উভয় ক্ষেত্রের উচ্চতা h । সুতরাং,

ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} a \times h$, ত্রিভুজক্ষেত্র DEF এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} d \times h$

অতএব, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল : ত্রিভুজক্ষেত্র DEF এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} a \times h : \frac{1}{2} d \times h$
 $= a : d = BC : EF$ ।

২. দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রের ভূমি সমান হলে, তাদের ক্ষেত্রফল ও উচ্চতা সমানুপাতিক।



মনে করি, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC ও DEF এর ভূমি যথাক্রমে $AP = h$, $DQ = k$ এবং উভয় ক্ষেত্রের ভূমি b । সুতরাং,

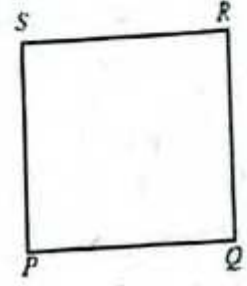
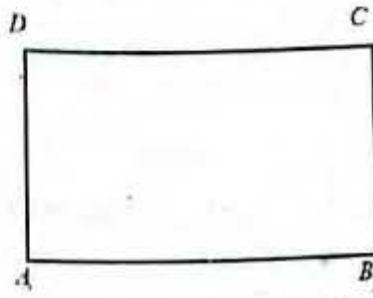
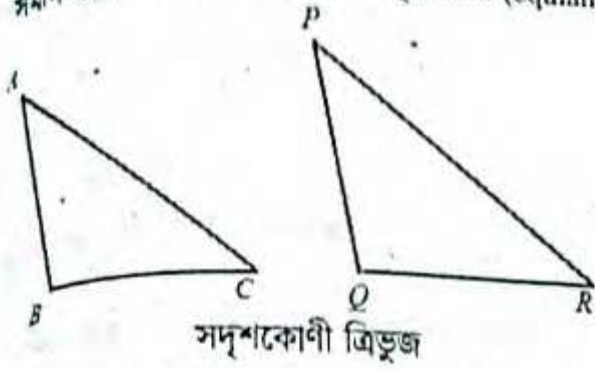
ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} b \times h$, ত্রিভুজক্ষেত্র DEF এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} b \times k$

অতএব, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল : ত্রিভুজক্ষেত্র DEF এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} b \times h : \frac{1}{2} b \times k$
 $= h : k = AP : DQ$ ।

সদৃশতা (Similarity)

সদৃশতা প্রমাণিত ত্রিভুজের সর্বসমতা ও সদৃশতা নিয়ে আলোচনা করা হয়েছে। সাধারণভাবে, সর্বসমতা সদৃশতার বিশেষ রূপ। দুইটি চিত্র সর্বসম হলে সেগুলো সদৃশ। তবে চিত্র দুইটি সদৃশ হলে সেগুলো সর্বসম নাও হতে পারে।

সদৃশকোণী বহুভুজ : সমান সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভুজের একটির কোণগুলো যদি ধারাবাহিকভাবে অপরটির কোণগুলোর সমান হয়, তবে বহুভুজ দুইটিকে সদৃশকোণী (equiangular) বলা হয়।



সদৃশ বহুভুজ : সমান সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভুজের একটির শীর্ষকিন্দুগুলোকে যদি ধারাবাহিকভাবে অপরটির শীর্ষকিন্দুগুলোর সঙ্গে এমনভাবে মিল করা যায় যে, বহুভুজ দুইটির (১) অনুরূপ কোণগুলো সমান হয় এবং (২) অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাতগুলো সমান হয়, তবে বহুভুজ দুইটিকে সদৃশ (Similar) বহুভুজ বলা হয়।

উপরের চিত্রে আমরা লক্ষ্য করি যে, ABCD আয়ত ও PQRS বর্গ সদৃশকোণী। কারণ, উভয় চিত্রে বাহুর সংখ্যা ৪ এবং আয়তের কোণগুলো ধারাবাহিকভাবে বর্গটির কোণগুলোর সমান (সবগুলো কোণ সমকোণ)। কিন্তু চিত্রগুলোর অনুরূপ কোণগুলো সমান হলেও অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান নয়। ফলে সেগুলো সদৃশ নয়। ত্রিভুজের ক্ষেত্রে অবশ্য এরকম হয় না। দুইটি ত্রিভুজের শীর্ষকিন্দুগুলোর কোণ মিলকরণের ফলে সদৃশতার সংজ্ঞায় উল্লেখিত শর্ত দুইটির একটি সত্য হলে অপরটিও সত্য হয় এবং ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ হয়। অর্থাৎ, সদৃশ ত্রিভুজ সর্বদা সদৃশকোণী এবং সদৃশকোণী ত্রিভুজ সর্বদা সদৃশ।

নির্দিষ্ট অনুপাতে রেখাংশের বিভক্তিকরণ

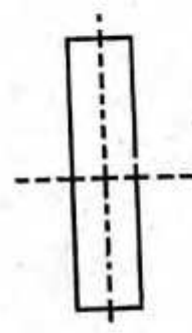
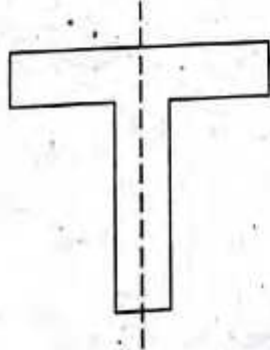
সমতলে দুইটি ভিন্ন বিন্দু A ও B এবং m ও n যেকোনো স্বাভাবিক সংখ্যা হলে আমরা স্বীকার করে নিই যে, AB রেখায় এমন অনন্য বিন্দু X আছে যে, X বিন্দুটি A ও B বিন্দুর অন্তর্বর্তী এবং $AX : XB = m : n$.



ওপরের চিত্রে, AB রেখাংশ X বিন্দুতে $m : n$ অনুপাতে অন্তর্বর্তীভুক্ত হয়েছে। তাহলে, $AX : XB = m : n$.

প্রতিসমতা

প্রতিসমতা একটি প্রয়োজনীয় জ্যামিতিক ধারণা যা প্রকৃতিতে বিদ্যমান এবং যা আমাদের কর্মকাণ্ডে প্রতিনিয়ত ব্যবহার করে থাকি। প্রতিসমতার ধারণাকে শিল্পী, কারিগর, ডিজাইনার, সুতাররা প্রতিনিয়ত ব্যবহার করে থাকেন। গাছের পাতা, ফুল, মৌচাক, ঘরবাড়ি, টেবিল, চেয়ার সবকিছুর মধ্যে প্রতিসমতা বিদ্যমান। যদি কোনো সরলরেখা বরাবর কোনো চিত্র ভাঁজ করলে, তার অংশ দুইটি সম্পূর্ণভাবে মিলে যায় সেক্ষেত্রে সরলরেখাটিকে প্রতিসাম্য রেখা বলা হয়।

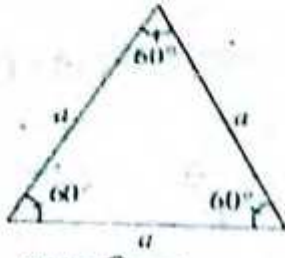


উপরের চিত্রগুলোর প্রতিটির প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে। শেষের চিত্রটির একাধিক প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে।

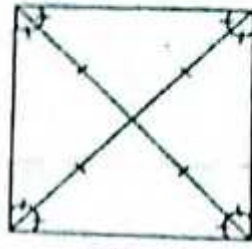
সুষম বহুভুজের প্রতিসাম্য রেখা

সুষম বহুভুজের রেখাংশগুলোর দৈর্ঘ্য সমান ও কোণগুলো সমান হলে তাকে সুষম বহুভুজ বহুভুজ কতকগুলো রেখাংশ দ্বারা আবদ্ধ চিত্র। বহুভুজের রেখাংশগুলোর দৈর্ঘ্য সমান ও কোণগুলো সমান হলে তাকে সুষম বহুভুজ বহুভুজ বলা হয়। ত্রিভুজ হলো সবচেয়ে কম সংখ্যক রেখাংশ দিয়ে গঠিত বহুভুজ। সমবাহু ত্রিভুজ হলো তিন বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজ।

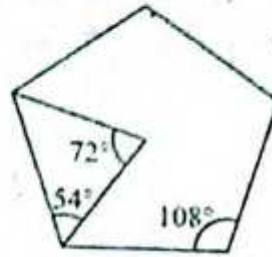
সমবাহু ত্রিভুজের বাহু ও কোণগুলো সমান। চার বাহুবিশিষ্ট সুখম বহুভুজ হলো বর্গক্ষেত্র। বর্গক্ষেত্রেরও বাহু ও কোণগুলো সমান। অনুল্লপভাবে, সুখম পঞ্চভুজ ও সুখম ষড়ভুজের বাহু ও কোণগুলো সমান।



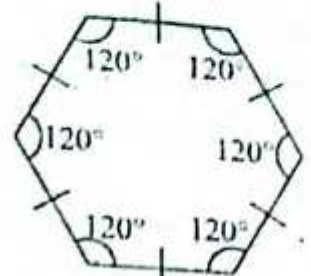
সমবাহু ত্রিভুজ



বর্গক্ষেত্র



সুখম পঞ্চভুজ

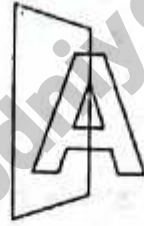


সুখম ষড়ভুজ

প্রত্যেক সুখম বহুভুজ একটি প্রতিসম চিত্র। সুতরাং তাদের প্রতিসাম্য রেখার সম্পর্কে জানা আবশ্যিক। সুখম বহুভুজের অনেক বাহুর পাশাপাশি একাধিক প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে।

তিনটি প্রতিসাম্য রেখা	চারটি প্রতিসাম্য রেখা	পাঁচটি প্রতিসাম্য রেখা	ছয়টি প্রতিসাম্য রেখা
সমবাহু ত্রিভুজ	বর্গক্ষেত্র	সুখম পঞ্চভুজ	সুখম ষড়ভুজ

প্রতিসমতার ধারণার সাথে আয়নার প্রতিফলনের সম্পর্ক রয়েছে। কোনো জ্যামিতিক চিত্রের প্রতিসাম্য রেখা তখনই থাকে, যখন তার অর্ধাংশের প্রতিচ্ছবি বাকি অর্ধাংশের সাথে মিলে যায়। এজন্য প্রতিসাম্য রেখা নির্ণয়ে কাল্পনিক আয়নার অবস্থান রেখার সাহায্য নেয়া হয়। রেখা প্রতিসমতাকে প্রতিফলন প্রতিসমতাও বলা হয়।

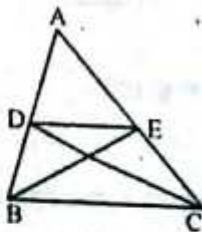


□ অনুশীলনী- ১৪.১

পাঠ্যবইয়ের অনুসিদ্ধান্তের সমাধান

অনুসিদ্ধান্ত-১। ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল কোনো রেখা যদি AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। তবে, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ এবং $\frac{AC}{BD} = \frac{AC}{CE}$ হবে।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল কোনো রেখা যদি AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। তবে, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ এবং $\frac{AC}{BD} = \frac{AC}{CE}$ হবে।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $\triangle ABC$ এর BC বাহুর সমান্তরাল DE রেখাংশ AB ও AC বাহুদ্বয়কে অথবা তাদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ এবং $\frac{AC}{BD} = \frac{AC}{CE}$ ।

অঙ্কন : B, E এবং C, D যোগ করি।

প্রধান : ধাপসমূহ

১। $\triangle ABC$ এবং $\triangle ADC$ একই উচ্চতা বিশিষ্ট।

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle ADC} = \frac{AB}{AD}$$

$$২। \frac{\triangle ABC}{\triangle ABE} = \frac{AC}{AE}$$

$$৩। \text{কিন্তু } \triangle BDE = \triangle DEC$$

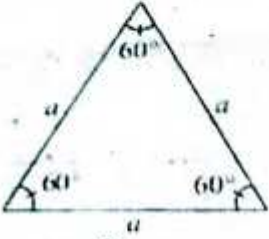
যথার্থতা

১। একই উচ্চতা বিশিষ্ট ত্রিভুজসমূহের ক্ষেত্রফল ভূমির সমানুপাতিক।

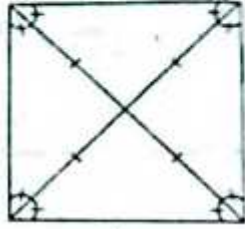
২। [একই]

৩। এরা একই ভূমি DE এর একই পাশে একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত।

সমবাহু ত্রিভুজের বাহু ও কোণগুলো সমান। চার বাহুবিশিষ্ট সুস্থম বহুভুজ হলো বর্গক্ষেত্র। বর্গক্ষেত্রের বাহু ও কোণগুলো সমান। অনুরূপভাবে, সুস্থম পঞ্চভুজ ও সুস্থম ষড়ভুজের বাহু ও কোণগুলো সমান।



সমবাহু ত্রিভুজ



বর্গক্ষেত্র



সুস্থম পঞ্চভুজ



সুস্থম ষড়ভুজ

প্রত্যেক সুস্থম বহুভুজ একটি প্রতিসম চিত্র। সুতরাং তাদের প্রতিসাম্য রেখার সম্পর্কে জানা আবশ্যিক। সুস্থম বহুভুজের অনেক বাহুর পাশাপাশি একাধিক প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে।

তিনটি প্রতিসাম্য রেখা	চারটি প্রতিসাম্য রেখা	পাঁচটি প্রতিসাম্য রেখা	ছয়টি প্রতিসাম্য রেখা
সমবাহু ত্রিভুজ	বর্গক্ষেত্র	সুস্থম পঞ্চভুজ	সুস্থম ষড়ভুজ

প্রতিসমতার ধারণার সাথে আয়নার প্রতিফলনের সম্পর্ক রয়েছে। কোনো জ্যামিতিক চিত্রের প্রতিসাম্য রেখা তখনই থাকে, যখন তার অর্ধাংশের প্রতিচ্ছবি বাকি অর্ধাংশের সাথে মিলে যায়। এজন্য প্রতিসাম্য রেখা নির্ণয়ে কার্যনিক আয়নার ব্যবহৃত রেখার সাহায্য নেয়া হয়। রেখা প্রতিসমতাকে প্রতিফলন প্রতিসমতাও বলা হয়।

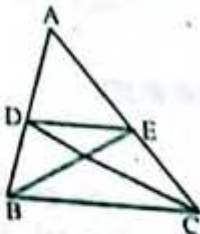


□ অনুশীলনী- ১৪.১

পাঠ্যবইয়ের অনুসিদ্ধান্তের সমাধান

অনুসিদ্ধান্ত-১। ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল কোনো রেখা যদি AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। তবে, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ এবং $\frac{AC}{BD} = \frac{AC}{CE}$ হবে।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল কোনো রেখা যদি AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। তবে, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ এবং $\frac{AC}{BD} = \frac{AC}{CE}$ হবে।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $\triangle ABC$ এর BC বাহুর সমান্তরাল DE রেখাংশ AB ও AC বাহুদ্বয়কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ এবং $\frac{AC}{BD} = \frac{AC}{CE}$ ।

অঙ্কন : B, E এবং C, D যোগ করি।

প্রধান : ধাপসমূহ

১। $\triangle ABC$ এবং $\triangle ADC$ একই উচ্চতা বিশিষ্ট।

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle ADC} = \frac{AB}{AD}$$

$$২। \frac{\triangle ABC}{\triangle ABE} = \frac{AC}{AE}$$

$$৩। \text{কিন্তু } \triangle BDE = \triangle DEC$$

যথার্থতা

১। একই উচ্চতা বিশিষ্ট ত্রিভুজসমূহের ক্ষেত্রফল ভূমির সমানুপাতিক।

২। [একই]

৩। এরা একই ভূমি DE এর একই পাশে একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত।