www.bdniyog.com

অধ্যায় ১৩

সসীম ধারা

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- অনুক্রম ও ধারা বর্ণনা করতে ও তাদের পার্থক্য নিরূপণ করতে পারবে।
- সমান্তর ধারা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সমান্তর ধারার নির্দিষ্টতম পদ ও নির্দিষ্ট সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয়ের সূত্র গঠন করতে পারবে এবং সূত্র প্রয়োগ করে গাণিতিক সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের ও ঘনের সমষ্টি নির্ণয় করতে পারবে।
- ধারার বিভিন্ন সূত্র প্রয়োগ করে গাণিতিক সমস্যার সমাধান করতে পারবে।
- গুণোত্তর ধারার নির্দিষ্টতম পদ ও নির্দিষ্ট সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয়ের সূত্র গঠন করতে পারবে এবং সূত্র প্রয়োগ করে গাণিতিক সমস্যার সমাধান করতে পারবে।

যা মনে রাখতে হবে...

অনুক্রম (Sequence) : যদি কতগুলো সংখ্যা বা রাশিকে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ..... এভাবে পর পর সাজানো যায়, তবে এটিকে অনুক্রম বলে। যেমন :

a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...
b) 1, 3, 9, 27, ...
c) 1, 2, 4, 7, 11, ...
d) 3, 2, 1, 0, – 1, – 2, – 3, ...

ধারা (Series) : যদি অনুক্রমের পদগুলোকে পর পর '+' চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করা হয়, তবে তাকে ধারা বলে। যেমন:

a) 1 + 2 + 3 + 4 + ...
b) 1 + 3 + 9 + 27 + ...
c) 1 + 2 + 4 + 5 + 8 + ...
d) 3 + 2 + 1 + 0 + (–1) + (–2) + (–3) + ...

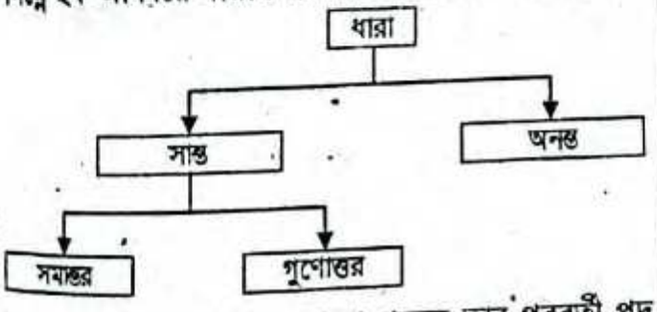
ধারার প্রকারভেদ : ধারা প্রধানত দুই প্রকার। যেমন–

ক) সান্ত বা সসীম ধারা এবং
খ) অনন্ত বা অসীম ধারা।

সান্ত ধারাকে আবার দুইভাগে ভাগ করা যায়। যেমন –

i) সমান্তর ধারা।
ii) গুণোত্তর ধারা।

নিম্নে ছক আকারে ধারার প্রকারভেদ দেখানো হলো :



সমান্তর ধারা : যে ধারায় কোনো পদকে তার পরবর্তী পদ থেকে বিয়োগ করলে একই সংখ্যা বা রাশি পাওয়া যায়, তাকে সমান্তর ধারা বলে এবং এই বিয়োগফলকে ধারার সাধারণ অন্তর বলে। যেমন–

2 + 4 + 6 + 8 + 10 ..... ধারাটি একটি সমান্তর ধারা।
কারণ পরপর দুটি পদের অন্তর সমান।
∴ সাধারণ অন্তর
= ২য় পদ – ১ম পদ = ৩য় পদ – ২য় পদ = ৪র্থ পদ – ৩য় পদ .....
= 4 – 2 = 6 – 4 = 8 – 6 = ...
= 2 = 2 = 2 = ...

গুণোত্তর ধারা : যে ধারার কোন পদের সাথে তার পরবর্তী পদের অনুপাত সব সময় সমান হয়, সে ধারাকে গুণোত্তর ধারা বলে। যেমন–

3 + 6 + 12 + 24 + ... ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা।
কারণ পরপর দুটি পদের অণুপাত সমান।

$$\therefore \text{সাধারণ অণুপাত} = \frac{\text{২য় পদ}}{\text{১ম পদ}} = \frac{\text{৩য় পদ}}{\text{২য় পদ}} = \frac{\text{৫ম পদ}}{\text{৪র্থ পদ}}$$

$$= \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \ldots\ldots$$

$$= 2 = 2 = 2 \ldots\ldots$$

অসীম ধারা : যে ধারার পদসংখ্যা অসীম, তাকে অসীম ধারা বলে। যেমন :

1 + 2 + 3 + ... ∞

প্রয়োজনীয় সূত্র :

সমান্তর ধারার সূত্র :

1. কোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d হলে,
   প্রথম হতে n-তম পদ বা শেষ পদ, $p = a + (n - 1)d$
2. কোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d হলে,
   প্রথম n পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)d\}$

গুণোত্তর ধারার সূত্র :

1. কোনো গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত q হলে,
   প্রথম হতে n-তম পদ = aq^{n-1}
2. কোনো গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত q হলে,

www.bdniyog.com

www.bdniyog.com

প্রথম n পদের সমষ্টি

(i) $S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$ [যখন $q > 1$]

(ii) $S = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$ [যখন $q < 1$]

❑ আরও কিছু গুরুত্বপূর্ণ সূত্র :

i. প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি অর্থাৎ, $1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

ii. প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি অর্থাৎ, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

iii. প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি অর্থাৎ, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

iv. প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক বিজোড় সংখ্যার সমষ্টি অর্থাৎ $1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + n = n^2$

v. প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক জোড় সংখ্যার সমষ্টি অর্থাৎ $2 + 4 + 6 + \ldots\ldots + n = n(n + 1)$

❑ অনুশীলনী- ১৩.১

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

❑ কাজ : পৃষ্ঠা : ২১৬

১। নিচে ছয়টি অনুক্রমের সাধারণ পদ দেওয়া আছে। অনুক্রমগুলি লেখ :

i) $\frac{1}{n}$ ii) $\frac{n-1}{n+1}$

iii) $\frac{1}{2^n}$ iv) $\frac{1}{2^{n-1}}$

v) $(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$ vi) $(-1)^{n-1}\frac{n}{2n+1}$

সমাধান :

i) $\frac{1}{n}$

n = 1 হলে অনুক্রমটির প্রথম পদ $\frac{1}{1} = 1$

n = 2 " " দ্বিতীয় পদ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

n = 3 " " তৃতীয় পদ $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

... ...

... ...

∴ নির্ণেয় অনুক্রম $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\ldots$

ii) $\frac{n-1}{n+1}$

n = 1 হলে অনুক্রমটির প্রথম পদ $\frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{2} = 0$

n = 2 " " দ্বিতীয় পদ $\frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$

n = 3 " " তৃতীয় পদ $\frac{3-1}{3+1} = \frac{2}{4}$

... ...

... ...

∴ নির্ণেয় অনুক্রম $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \ldots\ldots$

iii) $\frac{1}{2^n}$

n = 1 হলে অনুক্রমটির প্রথম পদ $\frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$

n = 2 " " দ্বিতীয় পদ $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

n = 3 " " তৃতীয় পদ $\frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

... ...

... ...

∴ নির্ণেয় অনুক্রম $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{27}, \ldots\ldots$

iv) $\frac{1}{2^{n-1}}$

n = 1 হলে অনুক্রমটির প্রথম পদ $\frac{1}{2^{1-1}} = \frac{1}{2^0} = \frac{1}{1} = 1$

n = 2 " " দ্বিতীয় পদ $\frac{1}{2^{2-1}} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$

n = 3 " " তৃতীয় পদ $\frac{1}{2^{3-1}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

... ...

... ...

∴ নির্ণেয় অনুক্রম $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots$

v) $(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$

n = 1 হলে অনুক্রমটির প্রথম পদ $(-1)^{1+1}\frac{1}{1+1}$

$= (-1)^2\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

n = 2 " " দ্বিতীয় পদ $(-1)^{2+1}\frac{2}{2+1}$

$= (-1)^3\frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$

n = 3 " " তৃতীয় পদ $(-1)^{3+1}\frac{3}{3+1}$

$= (-1)^4\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

... ...

... ...

∴ নির্ণেয় অনুক্রম $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\ldots$

www.bdniyog.com
www.bdniyog.com

www.bdniyog.com

(vii) $(-1)^{n-1}\frac{n}{2n+1}$

$n=1$ হলে অনুক্রমটির প্রথম পদ $(-1)^{1-1}\frac{1}{2.1+1}$

$=(-1)^0\frac{1}{3}=1.\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

$n=2$ " " দ্বিতীয় পদ $(-1)^{2-1}\frac{2}{2.2+1}$

$=(-1)^1\frac{2}{5}=(-1).\frac{2}{5}=-\frac{2}{5}$

$n=3$ " " তৃতীয় পদ $(-1)^{3-1}\frac{3}{2.3+1}$

$=\frac{3}{7}=\frac{3}{7}$

....

....

∴ নির্ণেয় অনুক্রম $\frac{1}{3}, -\frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \ldots\ldots$

২। তোমরা প্রত্যেকে একটি করে অনুক্রমের সাধারণ পদ লিখে অনুক্রমটি লিখ।

সমাধান :

$(-1)^2\frac{n+1}{4n-2}$

$n=1$ হলে অনুক্রমটির প্রথম পদ $(-1)^{2.1}\frac{1+1}{4.1-2}=1.\frac{2}{2}=1$

$n=2$ " " দ্বিতীয় পদ $(-1)^{2.2}\frac{2+1}{4.2-2}=1.\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$n=3$ " " তৃতীয় পদ $(-1)^{3.1}\frac{3+1}{4.3-2}=1.\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

....

....

∴ নির্ণেয় অনুক্রম $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \ldots\ldots$

❑ কাজ : পৃষ্ঠা : ২১৭

কোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ 5 এবং সাধারণ অন্তর 7 হলে, ধারাটির প্রথম ছয়টি পদ, ২২তম পদ, rতম এবং (2p + 1) তম পদ নির্ণয় কর।

সমাধান : কোনো সমান্তর ধারার ১ম পদ a, সাধারণ অন্তর d, পদ সংখ্যা n হলে,

ধারাটির n তম পদ = a + (n – 1)d

দেওয়া আছে,

প্রথম পদ, a = 7

সাধারণ অন্তর, d = 7

∴ ধারাটির দ্বিতীয় পদ = a + (2 – 1) d = 5 + 1.7 = 12

ধারাটির তৃতীয় পদ = a + (3 – 1) d = 5 + 2.7 = 19

ধারাটির চতুর্থ পদ = a + (4 – 1) d = 5 + 3.7 = 26

ধারাটির পঞ্চম পদ = a + (5 – 1) d = 5 + 4.7 = 33

ধারাটির ষষ্ঠ পদ = a + (6 – 1) d = 5 + 5.57 = 40

ধারাটির 22 তম পদ = a + (22 – 1) d = 5 + 21.7 = 152

ধারাটির r তম পদ = a + (r – 1) d = 5 + (r – 1) 7

= 5 + 7r – 7

= 7r – 2

ধারাটির (2p + 1) তম পদ = a + (2p + 1 – 1) d

= 5 + 2p.7

= 5 + 14p

= 14p + 5

পাঠ্যবইয়ের উদাহরণসমূহ

উদাহরণ–১। 5 + 8 + 11 + 14 + ... ধারাটির কোন পদ 383?

সমাধান : ধারাটির প্রথম পদ a = 5, সাধারণ অন্তর d = 8 – 5 = 11 – 8 = 3

∴ ইহা একটি সমান্তর ধারা।

মনে করি, ধারাটির n তম পদ = 383

আমরা জানি, n তম পদ = a + (n – 1) d

∴ a + (n – 1) d = 383

বা, 5 + (n – 1)3 = 383

বা, 5 + 3n – 3 = 383

বা, 3n = 383 – 5 + 3

বা, 3n = 381

বা, $n=\frac{381}{3}$ ∴ n = 127

∴ প্রদত্ত ধারার 127 তম পদ = 383. (Ans.)

উদাহরণ–২। প্রথম 50টি স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল নির্ণয় কর।

সমাধান : আমরা জানি, $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$

$S_{50}=\frac{50(50+1)}{2}=25\times 51=1275$

∴ প্রথম 50টি স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল 1275 (Ans.)

উদাহরণ–৩। 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 99 = কত?

সমাধান : ধারাটির প্রথম পদ a = 1, সাধারণ অন্তর d = 2 – 1 = 1 এবং শেষ পদ p = 99

∴ ইহা একটি সমান্তর ধারা।

মনে করি, ধারাটির n তম পদ = 99

আমরা জানি, সমান্তর ধারার n তম পদ = a + (n – 1)d

∴ a + (n – 1)d = 99

বা, 1 + (n – 1) 1 = 99

বা, 1 + n – = 99

∴ n = 99

বিকল্প পদ্ধতি :

যেহেতু $S_n=\frac{n}{2}(a+p)$

∴ $S_{99}=\frac{99}{2}(1+99)$

$=\frac{99\times 100^{50}}{2}=4950$

(iv) নং সূত্র হতে, সমান্তর ধারার প্রথম n–সংখ্যক পদের সমষ্টি, $S_n=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$

সুতরাং, ধারাটির 99টি পদের সমষ্টি S_{99}

www.bdniyog.com