বিস্তার পরিমাপ

এই অভিজ্ঞতায় শিখতে পারবে-

- পূর্ব অভিজ্ঞতা ও তার প্রতিফলন
- বস্তুনিষ্ঠ সিদ্ধান্ত গ্রহণে বিস্তার পরিমাপের প্রয়োজনীয়তা
- বিস্তার পরিমাপের প্রকারভেদ
- বিভিন্ন প্রকার বিস্তার পরিমাপ নির্ণয়

শিক্ষাবর্ষ ২০২৪

বিস্তার পরিমাপ

তোমরা ইতোমধ্যেই জেনেছ যে, পরিসংখ্যান নির্দিষ্ট লক্ষ্যে সংগৃহীত উপাত্ত নিয়ে কাজ করে। সংগৃহীত উপাত্ত বিশ্লেষণ ও ব্যাখ্যা করে আমরা কোনো বিষয়ে সিদ্ধান্ত গ্রহণ করে থাকি। পূর্বের শ্রেণিতে তোমরা উপাত্তের লেখচিত্রে উপস্থাপন সম্পর্কে জেনেছ। এই ধরনের উপস্থাপনা উপাত্তের কিছু গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্য প্রকাশ করে। নিচের ছবিটি লক্ষ করো:

আমাদের হৃদস্পন্দনের হার ও তার ছন্দ পরীক্ষা করার জন্য চিকিৎসকরা ইলেক্ট্রোকার্ডিওগ্রাম বা ইসিজি করে থাকেন, যার গ্রাফ দেখতে অনেকটা এই রকম। আর এই গ্রাফ দেখে চিকিৎসকরা হার্ট অ্যাটাক, হৃদরোগ, অস্বাভাবিক হৃদস্পন্দন ইত্যাদি শনাক্ত করে ব্যবস্থাপত্র দিয়ে থাকেন। তাছাড়া, সংগৃহীত উপাত্তের প্রতিনিধিত্বকারী মান খুঁজে বের করার জন্য তোমরা কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ সম্পর্কে পূর্বের শ্রেণিগুলোতে ধারাবাহিকভাবে জেনে এসেছ। তবে কোনো বিষয়ে সিদ্ধান্ত গ্রহণের ক্ষেত্রে কেন্দ্রীয় মান আমাদের মোটামুটি একটি ধারণা দেয়। কিন্তু অপেক্ষাকৃত নির্ভুল সিদ্ধান্তের জন্য উপাত্তগুলোকে সূক্ষ্মভাবে বিশ্লেষণ ও ব্যাখ্যা করা প্রয়োজন হয়। সেক্ষেত্রে উপাত্তগুলো কেন্দ্রীয় মানের চারপাশে কীভাবে ছড়িয়ে-ছিটিয়ে আছে, সে সম্পর্কেও আমাদের জানতে হবে।

একটি উদাহরণের মাধ্যমে বিষয়টি আলোচনা করা যাক–

তুমিতো জানো, তোমার জেলার স্কুলগুলো নিয়ে প্রতি বছর জেলাভিত্তিক "T - 20 স্কুল ক্রিকেট" প্রতিযোগিতার আয়োজন করা হয়। বরাবরের মতো এবারও তোমাদের স্কুলের ক্রিকেট দল ওই প্রতিযোগিতায় অংশগ্রহণ করে।

ধরো, প্রতিযোগিতায় দশটি ম্যাচে তোমাদের স্কুলের দু'জন ব্যাটসম্যান A ও B করা রান এবং ফাইনাল ম্যাচের নিবেশন সারণি নিম্নরূপ:

ব্যাটসম্যান A: 30, 91, 0, 64, 42, 80, 30, 5, 117, 71

ব্যাটসম্যান B: 53, 46, 48, 50, 53, 53, 58, 60, 57, 52

পরামর্শ

তোমার ক্লাসের শিক্ষার্থীদের নিয়ে দুইটি দল গঠন করে কয়েকটি ক্রিকেট ম্যাচ আয়োজন করো। তারপর যে কোনো দুই বা তিন জন ব্যাটসম্যান বা বোলারের স্কোর সংগ্রহ করো।

ফাইনাল ম্যাচের নিবেশন সারণি

ওভার	1 – 4	5 – 8	9 – 12	13 – 16	17 – 20
রান	24	32	36	38	30

ব্যাটসম্যান A এর গড় রান নির্ণয় করি:

$\overline{x}=$

$=$

$=$ 53

ব্যাটসম্যান B এর গড় রান নির্ণয় করি:

$\overline{x}=$

$=$

$=$

ব্যাটসম্যান A এর রানের মধ্যক নির্ণয় করি:
উপাত্তগুলোকে মানের উর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজিয়ে পাই,

$=$

$=$

$=$

ব্যাটসম্যান B এর রানের মধ্যক নির্ণয় করি:
উপাত্তগুলোকে মানের উর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজিয়ে পাই,

$=$

$=$

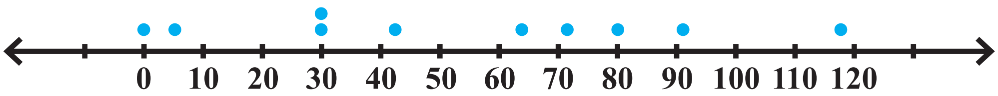
$=$ 53

উভয় ব্যাটসম্যানের করা রানের গড় ও মধ্যক নির্ণয় করে কী মান পেলে? দু'জনেরই রানের গড় এবং মধ্যক একই। তোমাদের কী মনে হয়, এই দু'জন খেলোয়াড়ের পারদর্শিতা একই? একেবারেই না। কারণ সমান সংখ্যক ম্যাচ খেলে ব্যাটসম্যান A এর রানের পরিসর (0-117) এবং ব্যাটসম্যান B এর রানের পরিসর (46-60)। ভেবে দেখো তো দু'জন ব্যাটসম্যানের পারদর্শিতার ধারাবাহিকতার মধ্যে কোনো পার্থক্য আছে কি না? যদি থাকে তবে সংক্ষেপে নিচের খালি বক্সে যুক্তিসহ তোমার মতামত লেখো:

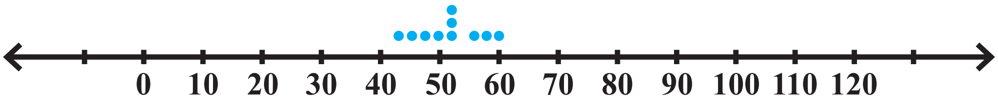
মাথা খাটাও

তোমার ভাবনাটির সঠিকতা যাচাইয়ের জন্য চলো উভয় ব্যাটসম্যানের স্কোরগুলো সংখ্যারেখায় বিন্দুর মাধ্যমে বসিয়ে দেখি:

ব্যাটসম্যান A এর স্কোরগুলোর সংখ্যারেখায় উপস্থাপন



ব্যাটসম্যান B এর স্কোরগুলোর সংখ্যারেখায় উপস্থাপন



উপরের চিত্র দুটি পর্যবেক্ষণ করে আমরা দেখতে পাই, ব্যাটসম্যান B এর স্কোরের বিন্দুগুলো কেন্দ্রীয় মানের (গড় ও মধ্যক) খুব কাছাকাছি অবস্থান করছে। অন্য দিকে ব্যাটসম্যান A এর স্কোরের বিন্দুগুলো কেন্দ্রীয় মান (গড় ও মধ্যক) থেকে অনেক দূরে দূরে ছড়িয়ে ছিটিয়ে আছে, যদিও তাদের রানের গড় ও মধ্যক একই।

সুতরাং আমরা বলতে পারি, কোনো একটি বিষয়ে বস্তুনিষ্ঠ সিদ্ধান্ত গ্রহণের ক্ষেত্রে সংগৃহীত উপাত্তের কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপই যথেষ্ট নয়। কেন্দ্রীয় মানের সাপেক্ষে উপাত্তগুলো বিস্তারও পরিমাপ করা প্রয়োজন। কেননা এটি কেন্দ্রীয় মানের যথার্থতা যাচাই করে। যে তথ্যসারির বিস্তার যত কম তার কেন্দ্রীয় মানগুলো ততো বেশি প্রতিনিধিত্বকারী। বিস্তার তথ্যসারির মানগুলোর সামঞ্জস্যতা পরিমাপ করে। যে তথ্যসারির বিস্তার যত বেশি তার মানগুলো ততো বেশি অসামঞ্জস্যপূর্ণ।

তাই, এই অভিজ্ঞতায় **বিস্তার পরিমাপ** (Measures of Dispersion) এর গুরুত্ব ও নির্ণয়ের পদ্ধতি সম্পর্কে জানবো।

উপরের আলোচনা থেকে তোমরা নিশ্চয়ই বুঝতে পারলে, কেন্দ্রীয় মান থেকে উপাত্তের অন্যান্য মানগুলোর ব্যবধানই হলো বিস্তার। এর সাহায্যে উপাত্তের কেন্দ্রীয় মান হতে অন্যান্য মানগুলো কত দূরে অবস্থান করছে সে সম্পর্কে ধারণা পাওয়া যায়। পরিসংখ্যানবিদ A.L.Bowley এর মতে "Dispersion is the measures of the variation of the items" অর্থাৎ বিস্তার হলো তথ্যসারির উপাদানগুলোর ভিন্নতার পরিমাপ।

সুতরাং যে গাণিতিক পরিমাপের সাহায্যে কোনো নিবেশনের কেন্দ্রীয় মান হতে অন্যান্য মানগুলোর ব্যবধান নির্ণয় করা হয় তাকে আমরা বিস্তার পরিমাপ বলতে পারি।

পরিসংখ্যানবিদ A. L. Bowley

তোমরা ইতোমধ্যেই জেনেছ, দুই বা ততোধিক তথ্যসারির মধ্যে তুলনা করাই হলো বিস্তার পরিমাপ নির্ণয়ের মূল উদ্দেশ্য। তথ্যসারিগুলোর প্রকৃতির উপর ভিত্তি করে বিভিন্ন প্রকার বিস্তার পরিমাপ ব্যবহার করা হয়। তবে

এই শ্রেণিতে আমরা বিভিন্ন প্রকার বিস্তার পরিমাপগুলো থেকে পরিসর, গড় ব্যবধান, ভেদাঙ্ক ও পরিমিত ব্যবধান সম্পর্কে সংক্ষিপ্ত পরিসরে জানার চেষ্টা করব।

পরিসর (Range)

পরিসর হলো কোনো তথ্যরাশির বা নিবেশনের বৃহত্তম মান ও ক্ষুদ্রতম মানের ব্যবধান বা পার্থক্য। তবে শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের ক্ষেত্রে সর্বশেষ শ্রেণির উচ্চসীমা ও প্রথম শ্রেণির নিম্নসীমার ব্যবধান হবে পরিসর। পরিসরকে সাধারণত R দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

একক কাজ:

তোমার পরিবারের সদস্যদের উচ্চতা সেমি বা ইঞ্চিতে পরিমাপ করে প্রাপ্ত উপাত্তের পরিসর নির্ণয় করো।

মাথা খাটাও

পরিসর সর্বদাই ধনাত্মক, কেন?

অবিন্যস্ত বা অশ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে:

কোনো চলক x এর n সংখ্যক মান যথাক্রমে $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$। যাদের মধ্যে ক্ষুদ্রতম মান ধরি, x_L এবং বৃহত্তম মান x_H. সুতরাং পরিসর $R = x_H - x_L$ বা $R = |x_H - x_L|$

বিন্যস্ত বা শ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে:

ধরি, সর্বশেষ শ্রেণির উচ্চসীমা L_u এবং সর্বনিম্ন শ্রেণির নিম্নসীমা L_l

সুতরাং পরিসর $R = L_u - L_l$

নির্দেশনা

কোনো নিবেশনের প্রথম শ্রেণির গণসংখ্যা 0 (শূন্য) হলে, পরিসর নির্ণয়ে প্রথম শ্রেণির পরবর্তী শ্রেণিকে প্রথম শ্রেণি হিসেবে ধরতে হবে। তারপর পরিসর নির্ণয় করতে হবে।

একক কাজ: ১

ক) $-12, -7, -2, 0, 7, 8$ তথ্যসারির পরিসর নির্ণয় করো।

খ) ধরো, গড় মাসে তোমার ক্লাসের 62 জন শিক্ষার্থীর উপস্থিতির শ্রেণি বিন্যস্ত তালিকাটি নিম্নরূপ ছিল।

উপস্থিতির দিনসংখ্যা	1 – 3	4 – 6	7 – 9	10 – 12	13 – 15	16 – 18
শিক্ষার্থীর সংখ্যা	2	3	7	12	30	8

প্রত্যেকেই নিজ নিজ খাতায় হিসাব করো এবং ফলাফল নিচের বক্সে লেখো:

- ক) হিসাব করে পাই পরিসর, R =
- খ) হিসাব করে পাই পরিসর, R =

একক কাজ ২

তোমার বাগানের সবচেয়ে বড়ো ফুলগাছটির উচ্চতা 75.06 সেমি এবং গাছগুলোর উচ্চতার পরিসর 15.37 সেমি। সবচেয়ে ছোটো ফুলগাছটির উচ্চতা নির্ণয় করো।

সিদ্ধান্ত গ্রহণে পরিসর

পরিসর নির্ণয়ের মাধ্যমে বিস্তার পরিমাপ করা খুবই সহজ একটি পদ্ধতি। খুব অল্প সময়ের মধ্যেই এটির মান নির্ণয় করা যায়। পরিসর নির্ণয়ে উপাত্তগুলোর কেবল সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন রাশি দুটির মানই ব্যবহৃত হয় এবং অন্য সব রাশির মানগুলোকে উপেক্ষা করা হয়। শুধু তাই নয়, শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তে প্রান্তীয় শ্রেণির নিম্নসীমা ও উচ্চসীমা যদি মুক্ত থাকে তবে পরিসর পরিমাপ করা যায় না। তবে এটি তাৎক্ষণিকভাবে কোনো তথ্যসারির বিস্তার সম্পর্কে একটা সর্বোপরি ধারণা দেয়। বাস্তব ক্ষেত্রে বিস্তার পরিমাপ হিসেবে পরিসরের চেয়ে গড় ব্যবধানের ব্যবহার অনেক বেশি।

প্রথম 15টি মৌলিক সংখ্যার পরিসর

দৈনন্দিন জীবনে পরিসরের ব্যবহার

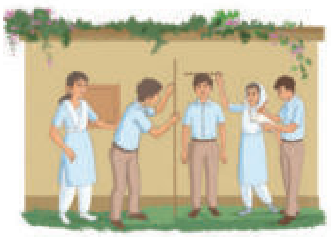
আমরা জেনেছি, পরিসর প্রতিনিধিত্বশীল বিস্তার পরিমাপক নয়। তাই এটি ব্যবহারিক জীবনে ঢালাওভাবে খুব একটা ব্যবহৃত হতে দেখা যায় না। তবে বিশেষ কয়েকটি ক্ষেত্রে পরিসরের ব্যবহার অনস্বীকার্য। যেমন:

(i) তোমরা প্রতিদিন রেডিও বা টেলিভিশনে আবহাওয়ার পূর্বাভাস জেনে থাকো। লক্ষ করলে দেখবে বা শুনবে আবহাওয়াবিদগণ দৈনিক তাপমাত্রার বিবরণ দেয়ার সময় গড় তাপমাত্রার কথা না বলে সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন তাপমাত্রার কথা বলে থাকেন। অর্থাৎ তাঁরা উপাত্তের পরিসর ব্যবহার করে থাকেন।

(ii) তোমরা অনেকেই শেয়ার বাজারের কথা শুনে থাকবে। শেয়ার বাজারে প্রতিনিয়ত শেয়ারের দাম কমে অথবা বাড়ে। তাই শেয়ার ক্রেতা ও বিক্রেতা উভয়কেই শেয়ারের সর্বনিম্ন ও সর্বোচ্চ মূল্যের পরিসর জানতে হয়। শেয়ার মূল্যের পরিসর জানা থাকলে দর কষাকষিতে শেয়ার ক্রেতা ও বিক্রেতার ক্ষতির সম্ভাবনা কম থাকে।

শিক্ষাবর্ষ ২০২৪

দলগত কাজ:



(i) দলে বিভক্ত হয়ে তোমাদের ক্লাসের সকল শিক্ষার্থীর উচ্চতা (ইঞ্চিতে) পরিমাপ করো। প্রাপ্ত উপাত্তের পরিসর নির্ণয় করো।

(ii) সুবিধামতো শ্রেণি ব্যবধান নিয়ে উপাত্তগুলোকে শ্রেণি বিন্যস্ত করো। এবার শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের পরিসর নির্ণয় করো।

গড় ব্যবধান (Mean Deviation)

গড় ব্যবধান এমন এক প্রকার বিস্তার পরিমাপক যা তথ্যসারির প্রতিটি মানের গড় হতে ব্যবধান পরিমাপ করে। অর্থাৎ তথ্যসারির কেন্দ্রীয় মান থেকে তথ্যগুলো গড়ে কত দূরে, তা পরিমাপ করা। আমরা জানি, "তথ্যসারির প্রতিটি মান হতে এদের গাণিতিক গড়ের বিচ্যুতির সমষ্টি শূন্য।" তাই ব্যবধান পরিমাপের সময় যদি ধনাত্মক ও ঋণাত্মক চিহ্ন বিবেচনা করা হয় তবে গড় ব্যবধান পরিমাপ করা পুরোপুরি অর্থহীন। সেজন্য প্রতিটি মান হতে ব্যবধান পরিমাপের সময় চিহ্ন বিবেচনায় না এনে ব্যবধানের পরম মান নেয়া হয়। কোনো নিবেশনের গড়, মধ্যমা ও প্রচুরক থেকে সংখ্যাগুলোর ব্যবধানের পরম মানের সমষ্টিকে মোট গণসংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যাবে, তাকেই আমরা গড় ব্যবধান বলে থাকি।

চলো হিসাব করে দেখি,"তথ্যসারির মানগুলোর গাণিতিক গড় হতে বিচ্যুতির সমষ্টি শূন্য।" হয় কি না।

মনে করো, তোমার পরিবারে 5 জন সদস্য। যাদের বয়স (বছরে) 5, 12, 36, 40 ও 67। পরিবারের সদস্যদের বয়সের গড় $\overline{x}=32$

$\therefore$ গড় হতে বিচ্যুতির সমষ্টি $\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})=(5-32)+(12-32)+(36-32)+(40-32)+(67-32)$

$=-27-20+4+8+35=47-47=0$

সুতরাং আমরা বলতে পারি, "তথ্যসারির প্রতিটি মান হতে এদের গাণিতিক গড়ের বিচ্যুতির সমষ্টি শূন্য।"

মাথা খাটাও

- দেখাও যে, মধ্যক থেকে নির্ণীত গড় ব্যবধানই ক্ষুদ্রতম।
- প্রমাণ করো যে, দুইটি অসমান উপাত্তের গড় ব্যবধান তাদের পরিসরের অর্ধেক।

একক কাজ:

ব্যাটসম্যান A ও B এর করা রান ও এদের গাণিতিক গড়ের বিচ্যুতির সমষ্টি নির্ণয় করো।

অবিন্যস্ত বা অশ্রেণিকৃত উপাত্তের গড় ব্যবধান নির্ণয়:

মনে করো, তোমার ক্লাসে গত আট দিনের শিক্ষার্থীদের অনুপস্থিত সংখ্যা: 3, 6, 6, 7, 8, 11, 15, 16

তথ্যসারির গড় ব্যবধান বের করার জন্য আমাদের তিনটি কাজ করতে হবে।

গড় ব্যবধান নির্ণয়ে কী কী করণীয়:

- প্রথমেই তথ্যসারির গড় নির্ণয় করা
- নির্ণেয় গড় থেকে প্রতিটি উপাত্তের পার্থক্য বের করা
- পার্থক্যগুলোর গড় নির্ণয় করা

ধাপ – ১: প্রথমেই অনুপস্থিত সংখ্যাগুলোর গড় নির্ণয় করি:

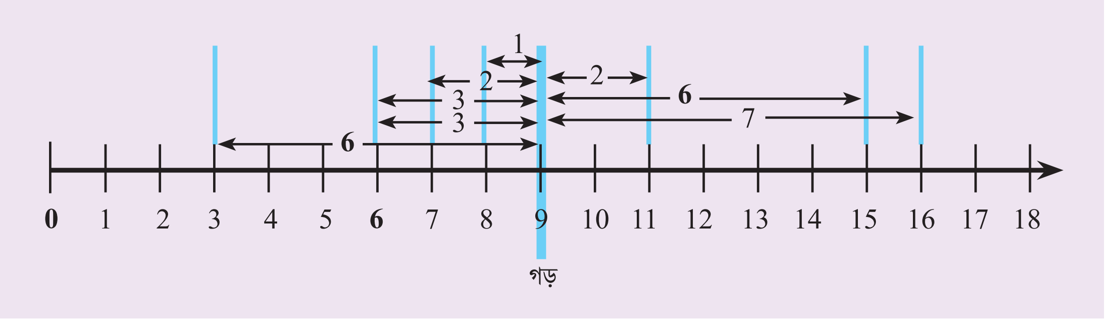
$$\text{সংখ্যাগুলোর গড়} = \frac{3+6+6+7+8+11+15+16}{8}$$

$$= \frac{72}{8} = 9$$

ধাপ – ২: সংখ্যাগুলোর গড় 9 থেকে উপাত্তগুলোর প্রতিটি মানের পার্থক্য বের করি:

অনুপস্থিত সংখ্যা	3	6	6	7	8	11	15	16
গড় ৯ থেকে প্রতিটি মানের পার্থক্য	6	3	3	2	1	2	6	7

চলো, গড় থেকে প্রতিটি মানের পার্থক্যকে চিত্রের মাধ্যমে দেখি ও বুঝতে চেষ্টা করি:

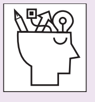


ধাপ – ৩: এখন গড় 9 থেকে প্রতিটি মানের পার্থক্য বা ব্যবধানগুলোর গড় নির্ণয় করি:

$$\text{গড় ব্যবধান} = \frac{6+3+3+2+1+2+6+7}{8}$$

$$= \frac{30}{8} = 3.75$$

মাথা খাটাও



গড় ব্যবধানের ক্ষেত্রে সংখ্যা রেখায় গড়ের বামের ও ডানের ব্যবধানের সমষ্টি সমান হবে। চিত্রটিতে গড় 9। উক্তিটির সঠিকতা যাচাই করে দেখো।

শিক্ষাবর্ষ ২০২৪

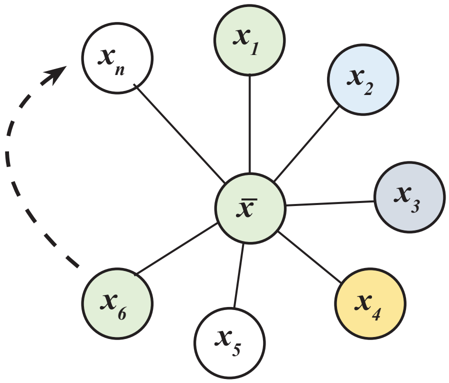
সুতরাং, তোমার ক্লাসে গত আট দিনের শিক্ষার্থীদের অনুপস্থিত সংখ্যাগুলোর গড় 9 এবং গড় ব্যবধান 3.75।

গড় ব্যবধান নির্ণয় করে তোমরা বুঝতে পারলে গড় থেকে অন্যান্য মানগুলো কত দূরে অবস্থিত।

সূত্রের মাধ্যমে অবিন্যস্ত বা অশ্রেণিকৃত উপাত্তের গড় ব্যবধান নির্ণয়:

মনে করো, কোনো একটি চলক x এর n সংখ্যক মান যথাক্রমে $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n$

সুতরাং তথ্যসারির গড় ব্যবধান নির্ণয়ের জন্য আমরা নিচের ধাপগুলো অনুসরণ করতে পারি:



ধাপ – ১: উপাত্তসমূহের গাণিতিক গড় $\bar{x}$ নির্ণয় করা।

ধাপ – ২: উপাত্তের প্রতিটি মান থেকে $\bar{x}$ এর ব্যবধান বের করা।

ধাপ – ৩: উপাত্তের প্রতিটি মান থেকে $\bar{x}$ এর ব্যবধানের পরম মান নির্ণয় করা।

যেমন: $|x_1 - \bar{x}|, |x_2 - \bar{x}|, |x_3 - \bar{x}|, \ldots\ldots |x_n - \bar{x}|.$

ধাপ – ৪: n সংখ্যক ব্যবধানের গড় নির্ণয় করা।

অর্থাৎ গড় $= \dfrac{\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|}{n}$

এই চারটি ধাপ অনুসরণ করে আমরা যে n সংখ্যক ব্যবধানের গড় নির্ণয় করলাম, এটিই হলো অবিন্যস্ত বা অশ্রেণিকৃত উপাত্তের "গাণিতিক গড় হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান" নির্ণয়ের সূত্র।

সুতরাং,
গাণিতিক গড় হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান,

$$\text{M. D}(\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|}{n}$$

একইভাবে অশ্রেণিকৃত উপাত্তের ব্যবধান, মধ্যক (M_e) হতে নির্ণীত হলে এটিকে "মধ্যক হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান" এবং প্রচুরক (M_o) হতে নির্ণীত হলে এটিকে "প্রচুরক হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান" বলে অভিহিত করা হয়।

$\therefore$ মধ্যক হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান, $\text{M.D}(M_e) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}|x_i - M_e|}{n}$

$\therefore$ প্রচুরক হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান, $\text{M.D}(M_o) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}|x_i - M_o|}{n}$

উদাহরণ - ১: চলো সূত্র ব্যবহার করে ব্যাটসম্যান A এর করা রানের গাণিতিক গড় হতে গড় ব্যবধান নির্ণয় করি:

ধাপ – ১: ব্যাটসম্যান A এর করা রানের গাণিতিক গড়, $\bar{x} = 53$ [তোমরা ইতোমধ্যেই নির্ণয় করেছ]

ধাপ – ২: গাণিতিক গড়, $\bar{x} = 53$ থেকে উপাত্তগুলোর প্রতিটি মানের পার্থক্য ($|x_i - \bar{x}|$) নির্ণয় করি:

রান (x_i)	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$
30	23
91	38
0	53
64	11
42	11
80	27
30	23
5	48
117	64
71	18
$\sum\lvert x_i - \bar{x}\rvert = 316$	

ধাপ – ৩:

∴ গড় ব্যবধান $M.D(\bar{x})$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{316}{10}$$

$= 31.6$

অর্থাৎ গাণিতিক গড় থেকে ব্যাটসম্যান A এর করা রানগুলোর ব্যবধান 31.6 এক্ষেত্রে ব্যবধান অনেক বেশি বলে আমরা বলতে পারি, ব্যাটসম্যান A এর পারদর্শিতার ধারাবাহিকতা কম।

একক কাজ:

ক) ব্যাটসম্যান A এর করা রানের মধ্যক ও প্রচুরক হতে গড় ব্যবধান নির্ণয় করো।

খ) ব্যাটসম্যান B এর করা রানের গাণিতিক গড়, মধ্যক ও প্রচুরক হতে গড় ব্যবধান নির্ণয় করো।

গ) ব্যাটসম্যান A ও B থেকে প্রাপ্ত তথ্যরাশির গড় ব্যবধান পর্যালোচনা করে তাদের পারদর্শিতা সম্পর্কে তোমার মতামত উপস্থাপন করো।

শ্রেণিবিন্যস্ত উপাত্তের গড় ব্যবধান নির্ণয়

মনে করো, কোনো গণসংখ্যা নিবেশনের n সংখ্যক শ্রেণির মধ্যবিন্দু $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n$ এবং এদের গণসংখ্যা যথাক্রমে $f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots\ldots, f_n$।

প্রথমে শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের গাণিতিক গড় ($\bar{x}$), মধ্যক (M_e) ও প্রচুরক (M_o) নির্ণয় করতে হবে। অতঃপর নিচের সূত্র ব্যবহার করে উপাত্তসমূহের গড় ব্যবধান নির্ণয় করা যাবে।

শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের গড় ব্যবধান নির্ণয়ের সূত্র:

(i) গাণিতিক গড় হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান

$$= \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{n}$$

(ii) মধ্যক হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান

$$= \frac{\sum f_i |x_i - M_e|}{n}$$

(iii) প্রচুরক হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান

$$= \frac{\sum f_i |x_i - M_o|}{n}$$

আমি পূর্বের শ্রেণিতে শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের গাণিতিক গড় ($\bar{x}$), মধ্যক (M_e) ও প্রচুরক (M_o) নির্ণয় করা শিখেছি।

উদাহরণ ২: চলো ফাইনাল ম্যাচের নিবেশন সারণি ব্যবহার করে গাণিতিক গড় থেকে গড় ব্যবধান নির্ণয় করি:

ওভার	1 – 4	5 – 8	9 – 12	13 – 16	17 – 20
রান	24	32	36	38	30

ধরি, অনুমিত গড়, $a = 10.5$

শ্রেণি ব্যবধান, $h = 4$

মোট রান, $n = 160$

$\sum f_i u_i = 18$

গাণিতিক গড়, $\overline{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{n} \times h$

$= 10.5 + \frac{18}{160} \times 4$

$= 10.5 + 0.45$

$= 10.95$

গড় ব্যবধান নির্ণয়ের জন্য প্রথমে নিচের সারণিটি তৈরি করি:

শ্রেণি ব্যাপ্তি (ওভার)	শ্রেণির মধ্যবিন্দু (x_i)	রান সংখ্যা (f_i)	ধাপ বিচ্যুতি $u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$	$x_i - \overline{x}$ $\overline{x} = 10.95$	$f_i \lvert x_i - \overline{x} \rvert$
1 – 4	2.5	24	–2	–48	8.45	202.8
5 – 8	6.5	32	–1	–32	4.45	142.4
9 – 12	10.5 = a	36	0	0	0.45	16.2
13 – 16	14.5	38	1	38	3.55	134.9
17 – 20	18.5	30	2	60	7.55	226.5
		$n = 160$	$\sum f_i u_i = 18$		$\sum f_i \lvert x_i - \overline{x} \rvert = 722.8$	

সুতরাং গাণিতিক গড় হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান $= \frac{\sum f_i \lvert x_i - \overline{x} \rvert}{n} = \frac{722.8}{160} = 4.52$ (প্রায়)।

উদাহরণ ৩: ফাইনাল ম্যাচের নিবেশন সারণি ব্যবহার করে মধ্যক থেকে গড় ব্যবধান নির্ণয় করি:

শ্রেণি ব্যাপ্তি (ওভার)	1 – 4	5 – 8	9 – 12	13 – 16	17 – 20
রান সংখ্যা	24	32	36	38	30

মধ্যক, $M_e = L + (\frac{n}{2} - F_c) \times \frac{h}{f_m}$

$= 9 + (80 - 56) \times \frac{4}{36}$

$= 9 + 2.67$

$= 11.67$ (প্রায়)

এখানে,

$L = 9$, $F_c = 56$,

$f_m = 36$, $h = 4$

এবং $n = 160$

শ্রেণি ব্যাপ্তি (ওভার)	শ্রেণির মধ্যবিন্দু (x_i)	রান সংখ্যা (f_i)	ক্রমযোজিত রান সংখ্যা (F_c)	$\lvert x_i - M_e \rvert$ $M_e = 11.67$	$f_i \lvert x_i - M_e \rvert$
1 – 4	2.5	24	24	9.17	220.08
5 – 8	6.5	32	56	5.17	165.44
9 – 12	10.5	36	92	1.17	42.12
13 – 16	14.5	38	130	2.83	107.54
17 – 20	18.5	30	160	6.83	204.9
		$n = 160$	$\sum f_i \lvert x_i - M_e \rvert = 740.08$		

এখানে, $\frac{n}{2} = \frac{160}{2} = 80$ $\therefore$ মধ্যক হবে 80তম পদ। যেহেতু 80তম পদটি (9 – 12) শ্রেণিতে রয়েছে, সুতরাং উপাত্তের মধ্যক শ্রেণি হবে (9 – 12)।

সুতরাং মধ্যক হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান $= \frac{\sum f_i \lvert x_i - M_e \rvert}{n} = \frac{740.08}{160} = 4.62$ (প্রায়)।

দলগত কাজ

তোমার ক্লাসের সকল শিক্ষার্থী কয়েকটি দলে বিভক্ত হয়ে দল অনুসারে প্রত্যেকের উচ্চতা (সেমি) মেপে নাও। এবার উপযুক্ত শ্রেণি ব্যবধান নিয়ে প্রাপ্ত উচ্চতার একটি শ্রেণি বিন্যস্ত নিবেশন সারণি তৈরি করো। সারণি ব্যবহার করে (i) গাণিতিক গড়, (ii) মধ্যক ও (iii) প্রচুরক থেকে গড় ব্যবধান নির্ণয় করো।

শিক্ষাবর্ষ ২০২৪

পরিমিত ব্যবধান (Standard Deviation)

নিচের উপাত্ত সেট তিনটি ভালোভাবে পর্যবেক্ষণ করো।

$X = \{12, 7, 6, 5, 4, 3, 2\}$

$Y = \{12, 10, 10, 9, 9, 9, 2, 2\}$

$Z = \{12, 4, 4, 3, 2, 2, 2\}$

Karl Pearson

এটা স্পষ্ট যে, উপরের তিন সেট উপাত্তের পরিসর একই এবং তা হলো 10। তাছাড়া পরিসর তথ্যসারির সকল মানের উপর নির্ভর করে না। এটি চরম মান ও নমুনা বিচ্যুতি দ্বারা প্রভাবিত হয়। কিন্তু উপরের উপাত্ত সেট তিনটি নিবিড়ভাবে লক্ষ করলে দেখতে পাবে সংখ্যাগুলোর মধ্যে ভিন্নতা রয়েছে এবং এদের কেন্দ্রীয় মানও ভিন্ন ভিন্ন। গড় ব্যবধান তথ্যসারির প্রত্যেকটি মানের উপর নির্ভরশীল হলেও এটি আবার বিচ্যুতির পরম মান নিয়ে নির্ণয় করা হয়। এজন্য পরবর্তীতে কোনো বীজগাণিতিক প্রক্রিয়ায় এটি ব্যবহার করা যায় না। তাছাড়া পরমমান প্রাপ্তির জন্য গাণিতিকভাবে ঋণাত্মক ব্যবধানগুলো ধনাত্মক হিসেবে বিবেচনা করায় এতে অনেকক্ষেত্রে ভুল হওয়ার সম্ভাবনা থাকে। তাই তথ্যসারির সকল মানের মধ্যে প্রকৃত বৈচিত্র্য নির্ণয় করতে হলে নতুন একটি পরিমাপের প্রয়োজনীয়তা রয়েছে। এক্ষেত্রে **পরিমিত ব্যবধান** অনেক বেশি কার্যকর ভূমিকা পালন করে। ১৯৮৩ খ্রিষ্টাব্দে কার্ল পিয়ারসন পরিমিত ব্যবধান সম্পর্কে ধারণা প্রদান করেন।

কিন্তু পরিমিত ব্যবধান জানার পূর্বে আমাদের **ভেদাঙ্ক** (Variance) সম্পর্কে জানতে হবে।

ভেদাঙ্ক (Variance)

তোমাদের নিশ্চয়ই মনে আছে, গাণিতিক গড় বা মধ্যক থেকে গড় ব্যবধান নির্ণয়ের সময় ব্যবধানের পরম মান ব্যবহার করা হয়েছিল। কিন্তু কেন? কারণটি নিচের বক্সে সংক্ষেপে লেখো।

মাথা খাটাও

গড় ব্যবধান নির্ণয়ে পরম মান ব্যবহার সংক্রান্ত সমস্যাটি আমরা অন্যভাবেও সমাধান করতে পারি। তথ্যরাশির প্রতিটি মান থেকে তাদের গড় বা মধ্যকের ব্যবধানকে বর্গ করে। সেক্ষেত্রে আবশ্যই বিচ্যুতির বর্গ অঋণাত্মক হবে।

ধরো, কোনো চলক x এর n সংখ্যক মান $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n$ এবং তাদের গাণিতিক গড় $\overline{x}$। তাহলে, গাণিতিক গড় থেকে প্রতিটি মানের বিচ্যুতির বর্গের সমষ্টি = $(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + (x_3 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$ হবে। যদি ব্যবধানের বর্গের সমষ্টি শূন্য হয়, তবে $(x_i - \overline{x})$ আবশ্যই শূন্য হবে। সেক্ষেত্রে গড় ও মানগুলোর মধ্যে কোনো পার্থক্য থাকবে না। কিন্তু যদি $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ এর মান খুব ছোটো হয়, তবে তথ্যসারির প্রতিটি মান গাণিতিক গড় বা কেন্দ্রীয় মানের খুব কাছাকাছি থাকবে। অর্থাৎ বিস্তার ব্যবধান কম হবে। সেক্ষেত্রে আমরা বলতে পারি, তথ্যসারির মানগুলো অনেক বেশি সামঞ্জস্যপূর্ণ।

চলো উদাহরণের মাধ্যমে বিষয়টি বুঝতে চেষ্টা করি:

আলেয়ার পরিবারের সদস্যসংখ্যা 6 এবং তাদের বয়স 5, 15, 25, 35, 45 ও 55 বছর। পরিবারের সদস্যদের বয়সের গড় $\overline{x} = 30$. [হিসেবটি যাচাই করে দেখো]

এক্ষেত্রে গাণিতিক গড় $\overline{x}$ থেকে প্রতিটি মানের বিচ্যুতির বর্গের সমষ্টি

$$\sum_{i=1}^{6}(x_i - \overline{x})^2 = (5-30)^2 + (15-30)^2 + (25-30)^2 + (35-30)^2 + (45-30)^2 + (55-30)^2$$

$$= (-25)^2 + (-15)^2 + (-5)^2 + (5)^2 + (15)^2 + (25)^2$$

$$= 625 + 225 + 25 + 25 + 225 + 625 = 1750$$

অপরদিকে টমাসের পরিবার একান্নবর্তী পরিবার। পরিবারে মোট 31 জন সদস্য। বাড়িতে সব সময় একটি উৎসব উৎসব আমেজ লেগেই থাকে। টমাসের পরিবারের সদস্যদের বয়স 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44 ও 45 বছর এবং তাদের বয়সের গড় $\overline{y} = 30$. [এক্ষেত্রেও হিসেবটি যাচাই করে দেখো]

$$\therefore \sum_{i=1}^{31}(y_i - \overline{y})^2 = (15-30)^2 + (16-30)^2 + (17-30)^2 + \ldots + (45-30)^2$$

$$= (-15)^2 + (-14)^2 + (-13)^2 + \ldots + 15^2$$

$$= 2\,(1^2 + 2^2 + \ldots + 15^2)$$

$$= 2 \times \frac{15 \times (15+1)(30+1)}{6}$$

$$= 5 \times 16 \times 31 = 2480$$

সকল স্বাভাবিক সংখ্যা n এর জন্য

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

উপরের হিসাব দুটি পর্যালোচনা করে দেখা যায়, আলেয়া ও টমাসের পরিবারের সদস্যদের বয়সের গাণিতিক গড় একই। কিন্তু টমাসের পরিবারের সদস্যদের বয়সের বিস্তারের (30) চেয়ে আলেয়ার পরিবারের সদস্যদের বয়সের বিস্তার (50) বেশি।

সুতরাং আমরা বলতে পারি, বিস্তার পরিমাপের ক্ষেত্রে তথ্যসারির উপাত্ত ও তাদের গাণিতিক গড়ের ব্যবধানের বর্গের সমষ্টি নির্ণয় করলেই সমস্যাটির সমাধান হবে না। তথ্যসারির উপাত্ত ও তাদের গাণিতিক গড়ের ব্যবধানের বর্গের সমষ্টির গড় নির্ণয় করতে হবে। অর্থাৎ আমাদের $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ নির্ণয় করতে হবে।

যেমন: আলেয়ার পরিবারের ক্ষেত্রে আমরা পাব, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{6} \times 1750 = 291.67$

এবং টমাসের পরিবারের ক্ষেত্রে আমরা পাব, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{31} \times 2480 = 80$

দুই পরিবারের ফলাফল থেকে এটি আরও স্পষ্ট যে, বয়সের গড় হতে টমাসের পরিবারের সদস্যদের বয়সের বিস্তারের চেয়ে আলেয়ার পরিবারের সদস্যদের বয়সের বিস্তার অনেক বেশি।

অতএব, বিস্তার পরিমাপের জন্য $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ একটি উপযুক্ত মাধ্যম হতে পারে। আর এটিই হলো **ভেদাঙ্ক** (Variance)। একে σ^2 (পড়তে হবে sigma square) প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়।

সুতরাং কোনো তথ্যসারির বা নিবেশনের প্রতিটি মান হতে তার গাণিতিক গড়ের ব্যবধানের বর্গের সমষ্টিকে মোট তথ্যসংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায় তাকে ভেদাঙ্ক বলা হয়।

মাথা খাটাও

আলেয়া ও টমাসের পরিবারের সদস্যদের বয়সের ভেদাঙ্ক যথাক্রমে ____________________ ও ____________________।

সূত্রের মাধ্যমে ভেদাঙ্ক নির্ণয়

অবিন্যস্ত বা অশ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে:

কোনো চলক x এর n সংখ্যক মান $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ এবং তাদের গাণিতিক গড় $\bar{x}$ হলে,

ভেদাঙ্ক $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

বিন্যস্ত বা শ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে:

কোনো চলক x এর n সংখ্যক মান $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ যাদের গণসংখ্যাসমূহ যথাক্রমে $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ এবং গাণিতিক গড় $\bar{x}$ হলে,

ভেদাঙ্ক $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i - \bar{x})^2$

উদাহরণ ৪: চলো সূত্র ব্যবহার করে ব্যাটসম্যান B এর করা রানের ভেদাঙ্ক নির্ণয় করি:

ধাপ – ১: ব্যাটসম্যান B এর করা রানের গাণিতিক গড়, $\bar{x} = 53$ [তোমরা ইতোমধ্যেই নির্ণয় করেছ]

ধাপ – ২: গাণিতিক গড়, $\bar{x} = 53$ থেকে উপাত্তগুলোর প্রতিটি মানের পার্থক্য $(x_i - \bar{x})^2$ নির্ণয় করি:

রান x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
53	0	0
46	-7	49
48	-5	25
50	-3	9
53	0	0
53	0	0
58	5	25
60	7	49
57	4	16
52	-1	1
$\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = 174$		

ধাপ – ৩:

$\therefore$ ভেদাঙ্ক $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2$

$= \frac{174}{10}$

$= 17.4$

$\therefore$ ভেদাঙ্ক 17.4

নির্দেশনা

ভেদাঙ্ক নির্ণয়ের জন্য অবিন্যস্ত বা অশ্রেণিকৃত উপাত্তের বিন্যস্ত করার দরকার নেই।

সূত্র থেকে সূত্র বানাই

ইতোমধ্যে তুমি $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ সূত্রটি ব্যবহার করে ভেদাঙ্ক নির্ণয় করা শিখেছ। আমরা যদি এই সূত্রটিকে একটু সরল করে আরও সহজে ব্যবহার উপযোগী করে বানাতে পারি তাহলে কেমন হয়? তাহলে চলো চেষ্টা করে দেখি :

মাথা খাটাও

কোন ক্ষেত্রে ভেদাঙ্ক সর্বনিম্ন হবে?

ভেদাঙ্ক $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n} - 2\bar{x}.\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n} - 2\bar{x}.\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n} + \frac{1}{n}(\bar{x}^2 + \bar{x}^2 + \bar{x}^2 + \ldots n \text{ সংখ্যক } \bar{x}^2)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n} - 2\bar{x}.\bar{x} + \frac{1}{n}.n.\bar{x}^2$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\overline{x}.\overline{x} + \overline{x}^2$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\overline{x}^2 + \overline{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \overline{x}^2$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2$$

মাথা খাটাও

প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার গাণিতিক গড় ও ভেদাঙ্ক নির্ণয় করো।

$\therefore$ ভেদাঙ্ক $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2$ । ভেদাঙ্ক নির্ণয়ের ক্ষেত্রে এই সূত্রটির ব্যবহার অপেক্ষাকৃত সহজ কেনো? তোমার মতামত ব্যক্ত করো।

জোড়ায় কাজ

পাঁচ টাকার একটি মুদ্রা 20 বার নিক্ষেপ করো। যতবার শাপলা পেয়েছ, সেই সংখ্যা খাতায় লেখো। এভাবে দুজনে মিলে মোট 10 বার খেলাটি খেলো। ধরো, মুদ্রা নিক্ষেপে শাপলা পাওয়ার সংখ্যা 6, 8, 10, 10, 10, 11, 12, 12, 13, 13 । প্রাপ্ত উপাত্তের গাণিতিক গড় ও ভেদাঙ্ক নির্ণয় করো।

উদাহরণ ৫: ফাইনাল ম্যাচের নিবেশন সারণি ব্যবহার করে গড় ও ভেদাঙ্ক নির্ণয় করি:

শ্রেণি ব্যাপ্তি (ওভার)	1 – 4	5 – 8	9 – 12	13 – 16	17 – 20
রান সংখ্যা	24	32	36	38	30

ভেদাঙ্ক নির্ণয়ের জন্য প্রথমে নিচের সারণিটি তৈরি করি:

শ্রেণি ব্যাপ্তি (ওভার)	শ্রেণির মধ্যবিন্দু (x_i)	রান সংখ্যা (f_i)	$f_i x_i$	$(x_i - \overline{x})^2$ $\overline{x} = 10.95$	$f_i(x_i - \overline{x})^2$
1 – 4	2.5	24	60	71.4025	1713.66
5 – 8	6.5	32	208	19.8025	633.68
9 – 12	10.5	36	378	0.2025	7.29
13 – 16	14.5	38	551	12.6025	478.895
17 – 20	18.5	30	555	57.0025	1710.075
		$n = 160$	$\sum f_i x_i = 1752$	$\sum f_i(x_i - \overline{x})^2 = 4543.6$	

$\therefore$ ভেদাঙ্ক $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \overline{x})^2$

$= \frac{4543.6}{160}$

$= 28.40$ প্রায়

এখানে,

গাণিতিক গড়, $\overline{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n}$

$= \frac{1752}{160} = 10.95$

দলগত কাজ

(i) দলে বিভক্ত হয়ে তোমাদের ক্লাসের সকল শিক্ষার্থীর ওজন (কেজিতে) পরিমাপ করো। প্রাপ্ত উপাত্তের ভেদাঙ্ক নির্ণয় করো।

(ii) উপযুক্ত শ্রেণি ব্যবধান নিয়ে উপাত্তগুলোকে শ্রেণি বিন্যস্ত করো। এবার সহজ পদ্ধতিতে শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের ভেদাঙ্ক নির্ণয় করো।

পরিমিত ব্যবধান (Standard Deviation)

পরিমিত ব্যবধান কী?

কোনো তথ্যসারির মানগুলো হতে গাণিতিক গড়ের ব্যবধানের বর্গের সমষ্টিকে মোট গণসংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায় তার বর্গমূলকে পরিমিত ব্যবধান বলা হয়। অর্থাৎ ভেদাঙ্কের σ^2 বর্গমূলই হলো **পরিমিত ব্যবধান**। পরিমিত ব্যবধানকে σ (গ্রিক অক্ষর সিগমা) বা SD দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

পরিমিত ব্যবধান আমরা কোথায় এবং কেন ব্যবহার করি?

তোমরা জেনে অবাক হবে, আমাদের দৈনন্দিন জীবনে এমন অনেক উদাহরণ রয়েছে যেখানে আমরা না জেনেও পরিমিত ব্যবধানের মতো গাণিতিক ঘটনা প্রয়োগ করছি। যেমন:

১. আমাদের আয় ও চাহিদা অনুসারে দৈনন্দিন বাজেটে আমরা একটি গড় অর্থ বরাদ্ধ করে থাকি। কোনো রকম গাণিতিক হিসাব ছাড়াই আমরা পরিমিত ব্যবধান ব্যবহার করে নির্ধারণ করে থাকি বরাদ্ধের চেয়ে খুব বেশি বা কম ব্যয় করছি কি না। এটি স্পষ্টতই একটি সহজাত গণনা যা আমার মনই আমার জন্য করে থাকে।

২. তাছাড়া বিভিন্ন প্রকার গবেষণা, পরিকল্পনা প্রণয়ন, সামাজিক কর্মকান্ড ও শিল্পকারখানায় সমজাতীয় পণ্যের উৎকর্ষতা যাচাই সম্পর্কিত তথ্যসমূহের বিশ্লেষণে এটি বহুলভাবে ব্যবহৃত হয়ে থাকে।

৩. পরিমিত ব্যবধান হলো এমন একটি গুরুত্বপূর্ণ হাতিয়ার যা ব্যবসার মালিগণ ঝুঁকি ব্যবস্থাপনা এবং সিদ্ধান্ত গ্রহণের ক্ষেত্রে ব্যবহার করে থাকেন। বিক্রয় হ্রাস বা খারাপ গ্রাহক পর্যালোচনা বৃদ্ধির মতো পরিস্থিতিতে সম্ভাব্য ঝুঁকি ব্যবস্থাপনার কৌশলগুলো তৈরি করতে এটি ব্যবহার করেন।

৪. চিকিৎসা গবেষণা ও ঔষধ তৈরিতে পরিমিত ব্যবধান ব্যবহার করা হয়। তুমি হয়তো ভাবছো, এটি কীভাবে সম্ভব? তোমরা তো জানো, করোনাভাইরাসের মতো একটি নতুন ভাইরাসের জন্য একটি নতুন

ভ্যাকসিন আবিষ্কার জরুরী হয়ে পড়েছিল। এর জন্য ভাইরাসটির বিপুল সংখ্যক অ্যান্টি-ভাইরাল দিয়ে পরীক্ষা-নিরীক্ষা করা হয় এবং সময়ের সাথে সাথে তা পর্যবেক্ষণ করা হয়। প্রতিটি নমুনায় ভাইরাস নির্মূলের গড়ের হারে অ্যান্টি-ভাইরালের একই প্রভাব রয়েছে কি না তা পরিমিত ব্যবধানের মাধ্যমে গণনা করা হয়।

সূত্রের মাধ্যমে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়:

অবিন্যস্ত বা অশ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে:

ক) প্রত্যক্ষ বা সরাসরি পদ্ধতি: কোনো চলক x এর n সংখ্যক মান $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ এবং তাদের গাণিতিক গড় $\overline{x}$ হলে, পরিমিত ব্যবধান,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}} \quad \text{বা} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2}$$

খ) সহজ বা অনুমিত গড় বা সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি: পরিমিত ব্যবধান,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}}{n}\right)^2}$$

যেখানে, A = অনুমিত গড় এবং $\mathrm{d} = x - \mathrm{A}$

মাথা খাটাও

i) $-2x, -x, 0, x, 2x$ সংখ্যাগুলোর গড় ব্যবধান ও পরিমিত ব্যবধান কত?

ii) দুইটি রাশির গড় ও ভেদাঙ্ক যথাক্রমে 10 ও 4 হলে রাশি দুইটি নির্ণয় করো।

iii) প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার পরিমিত ব্যবধান $\sqrt{10}$ হলে, $n=$ কত?

বিন্যস্ত বা শ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে:

ক) প্রত্যক্ষ বা সরাসরি পদ্ধতি: কোনো চলক x এর n সংখ্যক মান $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ যাদের গণসংখ্যাসমূহ যথাক্রমে $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$। এখন গাণিতিক গড় $\overline{x}$ হলে,

পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \overline{x})^2}{n}}$ বা $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{n}\right)^2}$

খ) সহজ বা অনুমিত গড় বা সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি: পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f\mathrm{d}^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f\mathrm{d}}{n}\right)^2} \times h$

যেখানে, A = অনুমিত গড়, $\mathrm{d} = \frac{x - \mathrm{A}}{h}$ এবং h = শ্রেণি ব্যবধান

উদাহরণ ৬: ধরো, তোমার দলের 8 জন শিক্ষার্থীর ওজন (কেজিতে) নিম্নরূপ।

49, 63, 46, 59, 65, 52, 60, 54

চলো সহজ বা সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে উপরের তথ্যরাশির পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করি:

মাথা খাটাও

(i) পরিমিত ব্যবধান ঋণাত্মক হয় না কেন?

(ii) কোন ক্ষেত্রে পরিমিত ব্যবধান সর্বনিম্ন হবে?

রাশি (x)	$d = x - A$	d^2
46	–13	169
49	–10	100
52	–7	49
54	–5	25
59 = A	0	0
60	1	1
63	4	16
65	6	36
$n = 8$	$\sum d = -24$	$\sum d^2 = 396$

মনে করি, অনুমিত গড় A = 59

এখানে,মোট গণসংখ্যা $n = 8$

$\sum d = -24$ এবং

$\sum d^2 = 396$

$\therefore$ পরিমিত ব্যবধান,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} d^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} d}{n}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{396}{8} - \left(\frac{-24}{8}\right)^2}$$

$= \sqrt{40.5} = 6.36$ (প্রায়)।

উদাহরণ ৭: ফাইনাল ম্যাচের নিবেশন সারণি ব্যবহার করে সহজ বা অনুমিত গড় বা সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করি:

শ্রেণি ব্যাপ্তি (ওভার)	1 – 4	5 – 8	9 – 12	13 – 16	17 – 20
রান সংখ্যা	24	32	36	38	30

পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়ের জন্য প্রথমে নিচের সারণিটি তৈরি করি:

শ্রেণি ব্যাপ্তি (ওভার)	শ্রেণির মধ্যবিন্দু (x)	রান সংখ্যা (f)	$d = \frac{x - A}{h}$	fd	fd^2
1 – 4	2.5	24	–2	–48	96
5 – 8	6.5	32	–1	–32	32
9 – 12	10.5=A	36	0	0	0
13 – 16	14.5	38	1	38	38
17 – 20	18.5	30	2	60	120
		$n = 160$		$\sum fd = 18$	$\sum fd^2 = 286$

$\therefore$ পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} fd^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} fd}{n}\right)^2} \times h$

$= \sqrt{\frac{286}{160} - \left(\frac{18}{160}\right)^2} \times 4 = \sqrt{1.7748} = 1.33 \times 4$

≈ 5.32

এখানে, অনুমিত গড় $A = 10.5$

$n = 160, h = 4,$

$\sum fd = 18$ এবং $\sum fd^2 = 286$

একক কাজ

একটি কারখানার শ্রমিকের সাপ্তাহিক বেতনের (শত টাকায়) গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো।

সাপ্তাহিক বেতন	20 – 22	23 – 25	26 – 28	29 – 31	32 – 34	35 – 37	38 – 40
শ্রমিকের সংখ্যা	5	10	26	30	16	8	5

ক) ঐ কারখানার শ্রমিকগণ সপ্তাহে গড়ে কত টাকা বেতন পেয়ে থাকেন?

খ) অনুমিত গড় পদ্ধতিতে উপাত্তের পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করো।

একক কাজ

ধরো, তোমার পরিবারে এক বছরের বিদ্যুৎ খরচের (ইউনিট)তালিকা নিম্নরূপ:

মাস	জানুয়ারি	ফেব্রয়ারি	মার্চ	এপ্রিল	মে	জুন	জুলাই	আগস্ট	সেপ্টে:	অক্টো:	নভে:	ডিসে:
ইউনিট	322	335	370	883	985	452	402	380	362	350	340	335

ক) উপাত্তগুলো সংখ্যারেখায় উপস্থাপন করো।

খ) উপাত্তের গাণিতিক গড় ও মধ্যক নির্ণয় করো।

গ) গাণিতিক গড় ও মধ্যক থেকে উপাত্তের গড় ব্যবধান ও পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করো।

ঘ) কোন দুই মাসে সবচেয়ে বেশি বিদ্যুৎ ব্যবহৃত হয়েছে? এর কী কী কারণ থাকতে পারে? ওই দুই মাসের বিদ্যুৎ খরচ বাদ দিলে তোমাদের বিদ্যুৎ খরচ গড়ে কত ইউনিট হবে? সেক্ষেত্রে পরিমিত ব্যবধানই বা কত হবে?

ঙ) কী ব্যবস্থা গ্রহণ করলে সারা বছরের বিদ্যুৎ খরচের ক্ষেত্রে সর্বোচ্চ সুবিধা পাওয়া যাবে বলে তুমি মনে করো?

অনুশীলনী

১. নিচের তথ্যরাশির পরিসর নির্ণয় করো।

ক) 14, 3, 19, 17, 4, 9, 16, 19, 22, 15, 18, 17, 12, 8, 16, 11, 3, 11, 0, 15

খ) 48, 70, 58, 40, 43, 55, 63, 46, 56, 44

গ)

উচ্চতা (সেমি)	95 – 105	105 – 115	115 – 125	125 – 135	135 – 145	145 – 155
গণসংখ্যা	8	12	28	30	15	7

২। নিচের তথ্যরাশির গাণিতিক গড় ও মধ্যক থেকে গড় ব্যবধান নির্ণয় করো।

ক) 8, 15, 53, 49, 19, 62, 7, 15, 95, 77

খ) 10, 15, 54, 59, 19, 62, 98, 8, 25, 95, 77, 46, 36

৩। প্রদত্ত উপাত্তের গাণিতিক গড় ও মধ্যক থেকে গড় ব্যবধান নির্ণয় করো।

x	60	61	62	63	64	65	66	67
f	2	0	15	30	25	12	11	5

৪। প্রতিদিন রিক্সায় স্কুলে আসা যাওয়া বাবদ সবুজ ও মৌলির যথাক্রমে 50 ও 80 টাকা খরচ হয়।

ক) সবুজ ও মৌলির খরচের পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করো।

খ) দেখাও যে, উপাত্ত দুটির গড় ব্যবধান পরিসরের অর্ধেক।

৫। থানা স্বাস্থ্য কেন্দ্রের বহির্বিভাগ চিকিৎসাসেবা নিতে আসা কোনো এক দিনের রোগীর সংখ্যার তথ্য নিম্নরূপ:

বয়স	0 – 15	15 – 30	30 – 45	45 – 60	60 – 75	75 – 90
রোগীর সংখ্যা	15	4	5	9	7	10

ক) ভেদাঙ্কের মান কখন সর্বনিম্ন হয়? ব্যাখ্যা করো।

খ) উপাত্তের গড় ব্যবধান ও পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করে তুলনা করো।

৬। নিচের গণসংখ্যা নিবেশন সারণির গাণিতিক গড় ব্যবধান 33.2 । গাণিতিক গড় নির্ণয় করে p এর মান নির্ণয় করো।

শ্রেণি ব্যাপ্তি	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70
গণসংখ্যা	8	12	p	30	15	10	5

৭। নিপার একটি ফুলের বাগান আছে। বাগানটিতে 60টি বিভিন্ন জাতের ফুল গাছ আছে। গাছগুলোর উচ্চতার (সেন্টিমিটারে) মধ্যক 28.5 ।

উচ্চতা (সেমি)	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
গাছের সংখ্যা	5	x	20	15	y	5

ক) x ও y এর মান নির্ণয় করে সারণিটি পূরণ করো।

খ) সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গাছগুলোর উচ্চতার গড় নির্ণয় করো।

গ) গাছগুলোর উচ্চতার মধ্যক থেকে গড় ব্যবধান নির্ণয় করো।

ঘ) গাছগুলোর উচ্চতার গড় থেকে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করো।

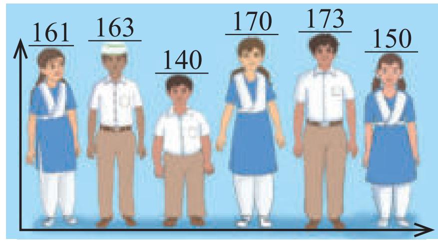
৮. পাশের ছবিটি লক্ষ করো। ছবিতে ছয় জন শিক্ষার্থীর উচ্চতা সেন্টিমিটারে দেওয়া আছে।

শিক্ষার্থীদের উচ্চতার -

ক) গড় ও মধ্যক নির্ণয় করো।

খ) গড় ও মধ্যক থেকে গড় ব্যবধান নির্ণয় করো।

গ) গড় ও মধ্যক থেকে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করো।

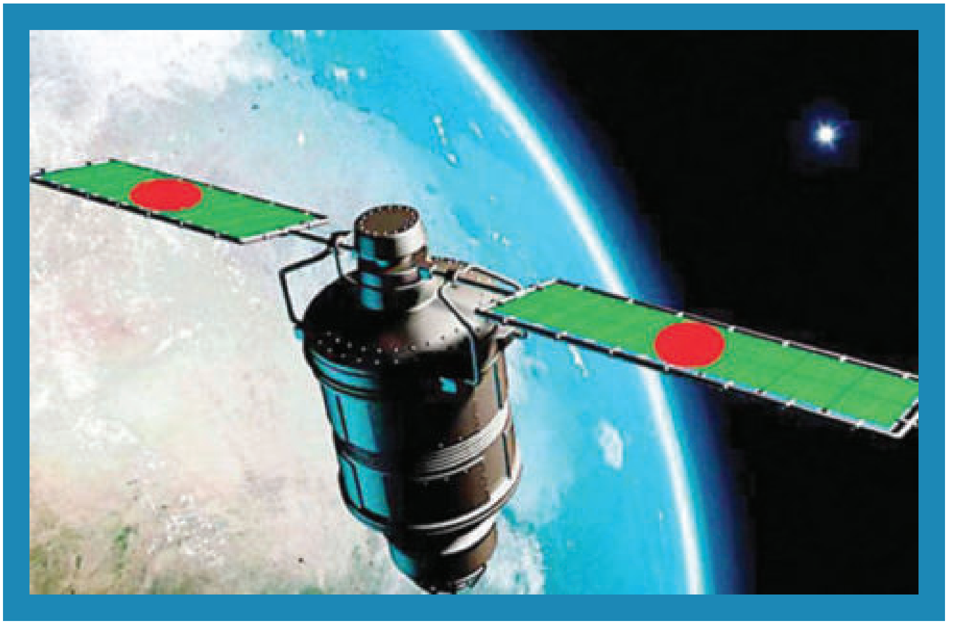


৯। দশ সদস্যের একটি নমুনার গাণিতিক গড় ও পরিমিত ব্যবধান যথাক্রমে 9.5 এবং 2.5। পরে 15 মানের আরও একটি সদস্য নমুনায় অন্তর্ভুক্ত করা হলো। তাহলে, এগারো সদস্যবিশিষ্ট নমুনার গাণিতিক গড় ও পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করো।

১০। 100 টি কোম্পানির বার্ষিক মুনাফার (কোটি টাকায়) তথ্য নিচে দেওয়া হলো:

মুনাফা (কোটি টাকায়)	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
কোম্পানির সংখ্যা	7	12	22	30	20	9

উপাত্তের গাণিতিক গড় হতে গড় ব্যবধান ও পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করো।



বঙ্গবন্ধু স্যাটেলাইট-১ : বাংলাদেশের মালিকানাধীন প্রথম কৃত্রিম উপগ্রহ

বঙ্গবন্ধু স্যাটেলাইট-১ বাংলাদেশের প্রথম ভূস্থির (Geostationary) যোগাযোগ ও সম্প্রচার উপগ্রহ। এর মধ্য দিয়ে ৫৭ তম দেশ হিসেবে নিজস্ব স্যাটেলাইট উৎক্ষেপণকারী দেশের তালিকায় যুক্ত হয় বাংলাদেশ। এটি ১১ই মে ২০১৮ যুক্তরাষ্ট্রের কেনেডি স্পেস সেন্টার থেকে উৎক্ষেপণ করা হয়। এটি ছিল ফ্যালকন ৯ ব্লক-৫ রকেটের প্রথম পেলোড উৎক্ষেপণ।

এটি ফ্রান্সের থেলিস অ্যালেনিয়া স্পেস কর্তৃক নকশা ও তৈরি করা হয়েছে। বঙ্গবন্ধু স্যাটেলাইট-১, ১৬০০ মেগাহার্টজ ক্ষমতাসম্পন্ন মোট ৪০টি কে-ইউ এবং সি-ব্যান্ড ট্রান্সপন্ডার বহন করছে এবং এর আয়ু ১৫ বছর। এর নির্মাণ ব্যয় প্রায় তিন হাজার কোটি টাকা। বর্তমানে স্যাটেলাইটের ব্যান্ডউইথ ও ফ্রিকোয়েন্সি ব্যবহার করে ইন্টারনেট বঞ্চিত অঞ্চল যেমন- পার্বত্য ও হাওড় এলাকায় ইন্টারনেট সুবিধা প্রদান করা সম্ভব হচ্ছে, প্রত্যন্ত অঞ্চলে ইন্টারনেট ও ব্যাংকিং সেবা, টেলিমেডিসিন ও দূরশিক্ষণ ব্যবস্থা প্রসারেও এটি ব্যবহৃত হচ্ছে। টিভি চ্যানেলগুলো তাদের সম্প্রচার সঠিকভাবে পরিচালনার জন্য বিদেশি নির্ভরতা কমিয়ে এর উপর নির্ভর করছে। ফলে দেশের টাকা দেশেই থাকছে। বড় প্রাকৃতিক দুর্যোগের সময় মোবাইল নেটওয়ার্ক অচল হয়ে পড়লে এর মাধ্যমে দুর্গত এলাকায় যোগাযোগ চালু রাখা সম্ভব। শুধু তাই নয় বঙ্গবন্ধু স্যাটেলাইট-২ মহাকাশে উৎক্ষেপণেরও উদ্যোগ নেওয়া হয়েছে। বঙ্গবন্ধু ১৯৭৫ সালের ১৪ই জুন বেতবুনিয়ায় ভূ-উপগ্রহ কেন্দ্র স্থাপনের মাধ্যমে যে স্বপ্নের বীজ বপন করেছিলেন, সেই স্বপ্ন মহীরূহে পরিণত করেছেন প্রধানমন্ত্রী শেখ হাসিনা।

স্যাটেলাইটের বাইরের অংশে বাংলাদেশের লাল-সবুজ পতাকার রঙের নকশার উপর ইংরেজিতে লেখা রয়েছে বাংলাদেশ ও বঙ্গবন্ধু-১, বাংলাদেশ সরকারের একটি মনোগ্রামও সেখানে রয়েছে।