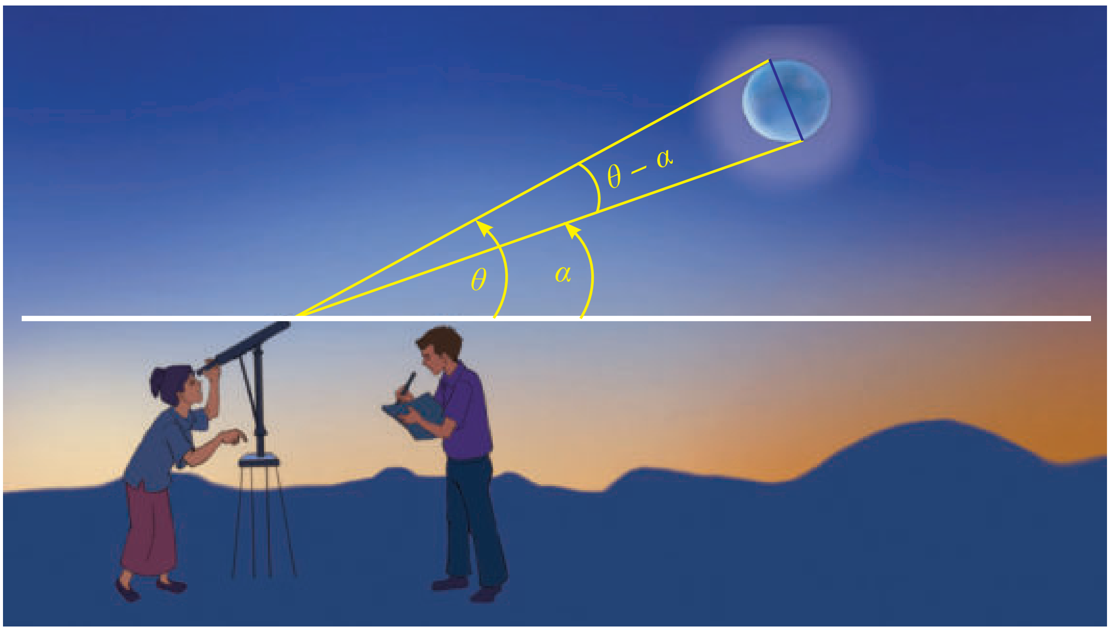
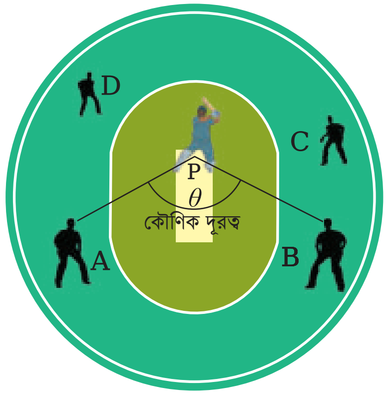
কৌণিক দূরত্ব পরিমাপে ত্রিকোণমিতি

এই অভিজ্ঞতায় শিখতে পারবে-

- ত্রিকোণমিতিক কোণের ধারণা, প্রয়োজনীয়তা এবং পরিমাপের কৌশল
- জ্যামিতিক কোণ ও ত্রিকোণমিতিক কোণের পার্থক্য
- ত্রিকোণমিতিক কোণের আদর্শ অবস্থান এবং তার সাপেক্ষে কোণের পরিমাপ
- কোটার্মিনাল কোণ, কোয়াড্রেন্ট কোণ ও কোয়াড্রেন্টাল কোণের ধারণা ও পরিমাপ
- আদর্শ অবস্থানে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত
- বিভিন্ন কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের আন্তঃসম্পর্ক
- ত্রিকোণমিতি ও স্থানাঙ্ক জ্যামিতির আন্তঃসম্পর্ক
- কোণ-এর রেডিয়ান পরিমাপ এবং ডিগ্রী ও রেডিয়ানের সম্পর্ক

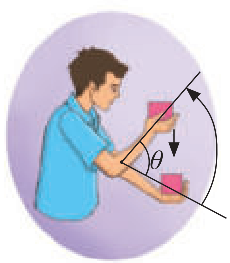


কৌণিক দূরত্ব পরিমাপে ত্রিকোণমিতি

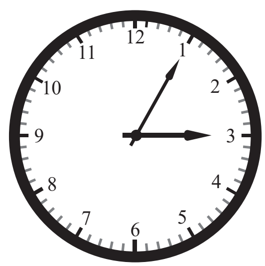


আমরা পূর্বের শ্রেণিতে দুই বস্তুর মধ্যবর্তী সরলরৈখিক দূরত্ব নির্ণয় করা শিখেছি। কিন্তু সরলরৈখিক দূরত্ব ছাড়াও আরেক প্রকার দূরত্ব আছে যাকে কৌণিক দূরত্ব বলে। যেমন, পাশের চিত্রে একটি ক্রিকেট মাঠে কয়েকজন খেলোয়ার দেখা যাচ্ছে। ব্যাটসম্যান P থেকে সরাসরি ফিল্ডার A ও B এর দূরত্ব যথাক্রমে PA ও PB, যাকে সরলরৈখিক দূরত্ব বলে। কিন্তু ব্যাটসম্যান P কে কেন্দ্রে রেখে তার সাপেক্ষে যদি ফিল্ডার A ও B এর দূরত্ব পরিমাপ করতে চাই, তাহলে সেই দূরত্বকে আমরা কৌণিক দূরত্ব বলি। পাশের চিত্রে P এর সাপেক্ষে PA থেকে PB এর অবস্থানের পার্থক্যকে কৌণিক দূরত্ব বলা হয়, যাকে θ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়েছে।

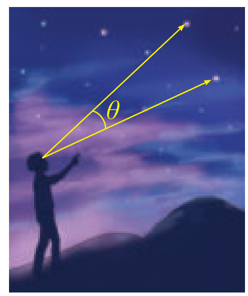
আমরা জেনে বা না জেনেই প্রতিদিন বিভিন্ন কাজে কৌণিক দূরত্ব কাজে লাগাই। যেমন, ক্রিকেট খেলায় একজন ব্যাটসম্যান ফিল্ডারদের কৌণিক দূরত্ব মাথায় রেখে বলে আঘাত করেন এবং রান করেন। আবার হাত দিয়ে কাজ করার সময় আমাদের হাতগুলো সবসময় বিভিন্ন কৌণিক দূরত্বকে কাজে লাগায়। আমাদের দেয়াল ঘড়ির কাঁটাগুলো প্রতিনিয়ত কৌণিক দূরত্ব অতিক্রম করছে। রাতের আকাশে যখন আমরা একটি তারা থেকে আরেকটি তারার দূরত্ব পরিমাপ করি, সেটাও মূলতঃ কৌণিক দূরত্ব। এরকম অসংখ্য উদাহারণ তোমরা পাবে যেখানে কৌণিক দূরত্ব কাজে লাগানো হয়। কোণ পরিমাপের মাধ্যমে আমরা অনেক দূরবর্তী বস্তুর অবস্থান সম্বন্ধে জানতে পারি এবং তাদের আকার, ঘূর্ণন বৈশিষ্ট্য ইত্যাদি নির্ণয় করতে পারি। এই অভিজ্ঞতায় আমরা ত্রিকোণমিতিক কোণ পরিমাপের মাধ্যমে এই ধরনের সমস্যার সমাধান করার চেষ্টা করব।



ক



খ



ঘ

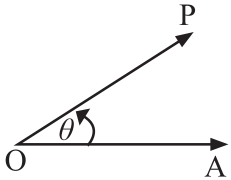
জোড়ায় কাজ

জোড়ায় চিন্তা করে নিচের ছকে তিনটি উদাহারণ লেখো যেখানে কৌণিক দূরত্ব ব্যবহৃত হয়।

কৌণিক দূরত্ব পরিমাপ করার জন্য আমরা ত্রিকোণমিতির জ্ঞানকে কাজে লাগাই। নিচে ধারাবাহিকভাবে এবিষয়ে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে।

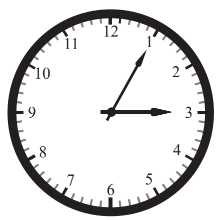
শিক্ষাবর্ষ ২০২৪

১. ত্রিকোণমিতিক কোণের পরিমাপ (Measurement of trigonometric angle)



একটি রশ্মি তার প্রারম্ভিক বিন্দুর সাপেক্ষে প্রারম্ভিক অবস্থান থেকে ঘুরে একটি প্রান্তিক অবস্থানে পৌঁছালে একটি কোণ তৈরি হয়। পাশের চিত্র অনুযায়ী ধরি, OA একটি প্রারম্ভিক রশ্মি যা O বিন্দুর সাপেক্ষে ঘুরে OP অবস্থানে পৌছালো। তাহলে, $\angle AOP$ একটি কোণ তৈরি হলো। ধরি, $\angle AOP = \theta$. এখানে O কে **শীর্ষবিন্দু** (vertex), OA কে **আদি রশ্মি বা প্রারম্ভিকরেখা** (initial line), এবং OP কে **প্রান্তিক রশ্মি বা প্রান্তরেখা** (terminal line) বলা হয়। OA রশ্মিকে স্থির রেখে OP রশ্মি O বিন্দুর সাপেক্ষে যে পরিমাণ ঘোরে তাকে **কৌণিক দূরত্ব** (angular distance) বলে। অর্থাৎ θ হলো কৌণিক দুরত্ব। কৌণিক দুরত্ব, পরিমাপের ক্ষেত্রে খুবই গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে। কৌণিক দুরত্বকে সাধারণত ডিগ্রী দ্বারা পরিমাপ করা হয়। OA রশ্মিকে স্থির রেখে OP রশ্মি O বিন্দুর সাপেক্ষে ঘোরালে বিভিন্ন পরিমাপের কোণ তৈরি হয়। শুরুতে যখন OP রশ্মি OA রশ্মির উপর সমপতিত থাকে তখন কোণটি হবে $0°$. যদি OP রশ্মি O বিন্দুর সাপেক্ষে একবার ঘুরে এসে আবার OA রশ্মির উপর সমপতিত হয়, তখন কোণটি হবে $360°$. অর্থাৎ একটি পূর্ণ ঘূর্ণনকে 360 দ্বারা ভাগ করলে যে কৌণিক দূরত্ব হয়, তাকে $1°$ ধরা হয়। $1°$ কে 60 দ্বারা ভাগ করলে যে কৌণিক দূরত্ব হয়, তাকে $1'$ (1 মিনিট) ধরা হয়। অর্থাৎ $1' = \frac{1}{60} \times 1°$. আবার $1'$ কে 60 দ্বারা ভাগ করলে যে কৌণিক দূরত্ব হয়, তাকে $1''$ (1 সেকেন্ড) ধরা হয়। অর্থাৎ $1'' = \frac{1}{60} \times 1'$. সুতরাং $1'' = \frac{1}{3600} \times 1°$.

তুমি কি লক্ষ করেছ তোমাদের বাসার দেয়াল ঘড়ি বা টেবিল ঘড়ি অথবা তোমার শিক্ষা প্রতিষ্ঠানের দেয়াল ঘড়ির কাঁটাগুলো অনবরত ঘুরছে? কাঁটাগুলো বারবার 12টার উপরে ঘুরে আসছে। যদি ঘড়ির কেন্দ্র থেকে 12 এর দিকে একটি প্রারম্ভিক রশ্মি কল্পনা করি, তাহলে এই কাঁটাগুলো কতটা কৌণিক দূরত্ব অতিক্রম করছে, তুমি কি বলতে পারবে? কাঁটাগুলো একবার ঘুরে 12টার উপর আসলে $360°$ কৌণিক দূরত্ব অতিক্রম করে। আরেকবার একটি পূর্ণ ঘূর্ণন সম্পন্ন করলে $360° + 360° = 720°$ দূরত্ব অতিক্রম করা হবে। এভাবে প্রতিটি পূর্ণ ঘূর্ণন সম্পন্ন করলে $360°$ যোগ হবে। সুতরাং আমরা দেখতে পারছি, কৌণিক দূরত্বের ক্ষেত্রে কোণের পরিমাপ $360°$ এর বেশি হতে পারে। অর্থাৎ, ত্রিকোণমিতিক কোণ $360°$ এর বেশিও হতে পারে।

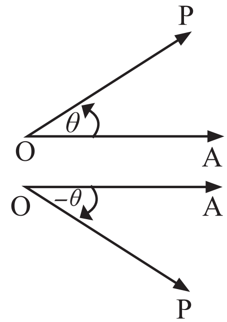


জোড়ায় কাজ

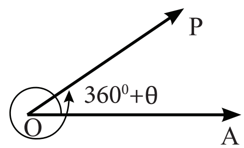
পাশের চিত্রে পৃথিবীর কেন্দ্র থেকে A ও B দুইটি স্থানের কৌণিক দূরত্ব $15°$ হলে স্থান দুইটির কৌণিক দূরত্বকে সেকেন্ডে প্রকাশ করো। নিচের ঘরে উত্তর লেখো।

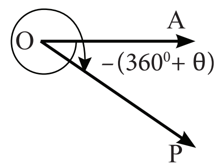
১.১ ধনাত্মক ও ঋণাত্মক কোণ

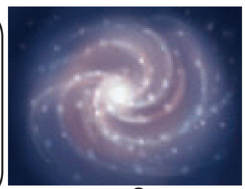
সংখ্যারাশির ক্ষেত্রে যেমন ধনাত্মক ও ঋণাত্মক সংখ্যা আছে, তেমনি কৌণিক দূরত্বের ক্ষেত্রেও ধনাত্মক ও ঋণাত্মক কোণ আছে। যদি প্রান্তিক রশ্মি OP, প্রারম্ভিক রশ্মি OA এর সাপেক্ষে ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘোরে, তাহলে কোণ θ কে ঋণাত্মক কোণ (negative angle) ধরা হয়, আর যদি প্রান্তিক রশ্মি OP, প্রারম্ভিক রশ্মি OA এর সাপেক্ষে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘোরে, তাহলে কোণ θ কে ধনাত্মক কোণ (positive angle) ধরা হয় । কোণে তীর চিহ্ন ব্যবহার করে ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক নির্দেশ করা হয় এবং সংখ্যারাশির মতো কোণের আগে '–' চিহ্ন দিয়ে ঋণাত্মক কোণ নির্দেশ করা হয়। পাশের চিত্রে ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক কোণ নির্দেশ করা হয়েছে।

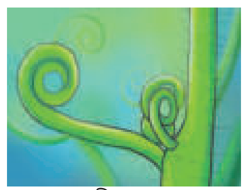


যদি প্রান্তিক রশ্মি OP, ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে অথবা ঘড়ির কাঁটার দিকে 360° এর বেশি ঘোরে, তখন কোণটি 360° এর বেশি হয় এবং আমরা সেটিকে পাশের চিত্রের মতো উপস্থাপন করতে পারি। প্রকৃতিতে বিভিন্ন বস্তুতে 360° এর বেশি কোণ দেখা যায়; যেমন, স্পাইরাল গ্যালাক্সি, লতা জাতীয় গাছের হাত ইত্যাদি। তোমরা কি আরও কিছুর নাম বলতে পারবে যেখানে 360° এর বেশি কোণ উৎপন্ন হয়? চিন্তা করে নিচের ঘরে লেখো।






গ্যালাক্সি

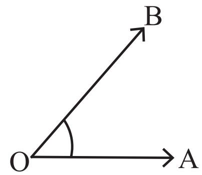

লতা জাতীয় গাছের হাত

জোড়ায় কাজ

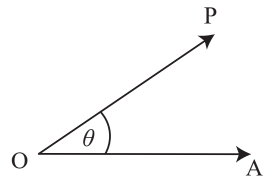
জ্যামিতিক রুলার এবং চাঁদা ব্যবহার করে নিচের খালি জায়গায় 200° এবং –230° কোণ আঁক।

২. জ্যামিতিক ও ত্রিকোণমিতিক কোণ

জ্যামিতি থেকে আমরা জানি যে, দুটি ভিন্ন রশ্মি এক বিন্দুতে মিলিত হলে সেই বিন্দুতে একটি কোণ উৎপন্ন হয়। চিত্রে $\angle AOB$ একটি জ্যামিতিক কোণ। এখানে OA এবং OB রশ্মি দুটি O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। ফলে O বিন্দুতে $\angle AOB$ কোণ তৈরি হয়েছে। $\angle AOB$ কোণ পরিমাপের ক্ষেত্রে সবসময় ধনাত্মক বিবেচনা করা হয়। ফলে জ্যামিতিতে কোণের আলোচনা 0° থেকে 360° বা চার সমকোণ পর্যন্ত সীমিত রাখা হয়।



অন্যদিকে ত্রিকোণমিতিক কোণের ক্ষেত্রে OA রশ্মিকে স্থির রেখে OP কে O বিন্দুর সাপেক্ষে ঘুরিয়ে বিভিন্ন পরিমাপের কোণ তৈরি করা হয়। ত্রিকোণমিতি কোণ ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক দুই-ই হতে পারে এবং 360° এর বেশিও হতে পারে। পাশের চিত্রে $\theta = \angle AOP$ একটি ত্রিকোণমিতিক কোণ। এটি একটি ধনাত্মক কোণ, কারণ OP রেখা প্রারম্ভিক রেখা OA এর সাথে ঘড়ির কাঁটার বিপরিত দিকে ঘুরে θ কোণ তৈরি করেছে।

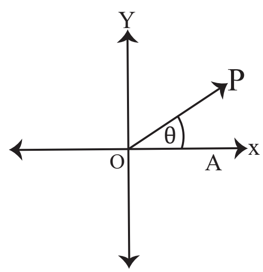


একক কাজ

নিচের খালি জায়গায় 120° এর একটি জ্যামিতিক কোণ আঁকো। একই পরিমাপের একটি ধণাত্মক ও একটি ঋণাত্মক ত্রিকোণমিতিক কোণ আঁকো।

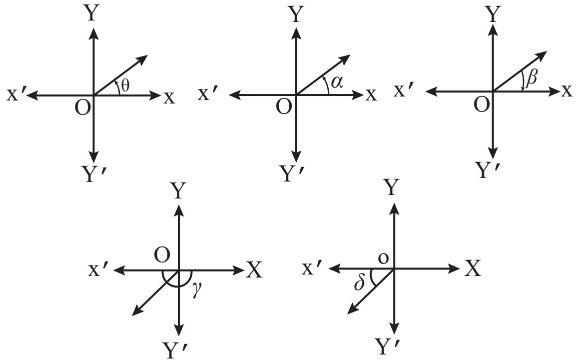
৩. ত্রিকোণমিতিক কোণের আদর্শ অবস্থান (Standard position of trigonometric angle)

যেকোনো ত্রিকোণমিতিক কোণকে আমরা দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্কে বা xy-সমতলে উপস্থাপন করতে পারি। যদি কোনো একটি ত্রিকোণমিতিক কোণ θ কে xy-সমতলে এমন ভাবে স্থাপন করা হয় যে, কোণটির শীর্ষবিন্দু O তে এবং প্রারম্ভিক রশ্মি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের উপর অবস্থান করে তবে এই অবস্থানকে কোণের আদর্শ অবস্থান (standard position) বলে।

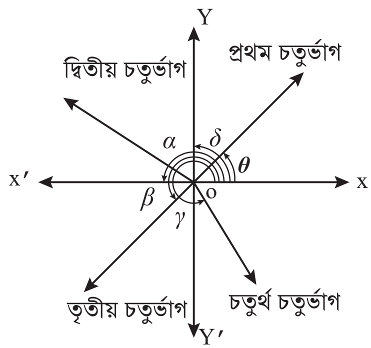


জোড়ায় কাজ:

নিচের কোন কোণগুলো আদর্শ অবস্থানে আছে? যেগুলো আদর্শ অবস্থানে নাই সেগুলোর কারণ ব্যাখ্যা করো এবং নিচের খালি ঘরে লেখো।



৪ আদর্শ অবস্থানে বিভিন্ন চতুর্ভাগে ত্রিকোণমিতিক কোণ



দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে x-অক্ষ এবং y-অক্ষ xy-সমতলকে চারটি অংশে ভাগ করে। এদেরকে প্রথম চতুর্ভাগ (first quadrant), দ্বিতীয় চতুর্ভাগ (second quadrant), তৃতীয় চতুর্ভাগ (third quadrant) এবং চতুর্থ চতুর্ভাগ (fourth quadrant) বলে। পাশের চিত্রে চতুর্ভাগগুলো দেখানো হয়েছে। একটি ত্রিকোণমিতিক কোণ আদর্শ অবস্থানে এই চার চতুর্ভাগের যে কোনো একটিতে অথবা অক্ষের উপরে অবস্থান করে। চতুর্ভাগের ভিতরে অবস্থান করলে তাকে কোয়াড্রেন্ট কোণ (quadrant angle) এবং অক্ষের উপর অবস্থান করলে কোয়াড্রেন্টাল কোণ (quadrantal angle) বলা হয়। পাশের চিত্রে θ একটি কোয়াড্রেন্ট কোণ যার প্রান্তিক রশ্মি প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থান করছে। একইভাবে α, β ও γ কোয়াড্রেন্ট কোণ যাদের প্রান্তিক রশ্মি যথাক্রমে দ্বিতীয়, তৃতীয় এবং চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থান করছে। অপরদিকে, δ একটি কোয়াড্রেন্টাল কোণ যার প্রান্তিক রশ্মি y-অক্ষের ধনাত্মক দিকে অবস্থান করছে।

উদাহরণ: আদর্শ অবস্থানে $\angle XOA = 210^\circ$ কোণটির প্রান্তিক বাহু OA কোন চতুর্ভাগে আছে নির্ণয় করো।

সমাধান: এখানে $210^\circ = 180^\circ + 30^\circ$.

যেহেতু 210° কোণটি একটি ধনাত্মক কোণ। সুতরাং এই কোণটি উৎপন্ন করতে প্রান্তিক রশ্মি OA আদি রশ্মি OX থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে 180° ঘুরে একই দিকে আরও 30° ঘুরে তৃতীয় চতুর্ভাগে এসে অবস্থান করছে। ফলে কোণটির প্রান্তিক বাহু তৃতীয় চতুর্ভাগে রয়েছে।

উদাহরণ: আদর্শ অবস্থানে $\angle XOA = -210^\circ$ কোণটির প্রান্তিক বাহু OA কোন চতুর্ভাগে আছে নির্ণয় করো।

সমাধান: এখানে $-210^\circ = -180^\circ - 30^\circ$.

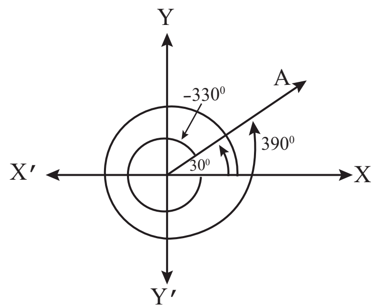
যেহেতু -210° কোণটি একটি ঋণাত্মক কোণ। সুতরাং এই কোণটি উৎপন্ন করতে প্রান্তিক রশ্মি OA আদি রশ্মি OX থেকে ঘড়ির কাঁটার দিকে 180° ঘুরে একই দিকে আরও 30° ঘুরে দ্বিতীয় চতুর্ভাগে এসে অবস্থান করছে। ফলে কোণটির প্রান্তিক বাহু দ্বিতীয় চতুর্ভাগে রয়েছে।

জোড়ায় কাজ

রুলার এবং চাঁদা ব্যবহার করে 130°, 400°, -200° এবং -750° কোণগুলো আদর্শ অবস্থানে আঁকো। এগুলো কোয়াড্রেন্ট নাকি কোয়াড্রেন্টাল কোণ তা নির্ণয় করো। কোণগুলো কোন চতুর্ভাগে আছে তা উল্লেখ করো। তোমাদের কাজ শিক্ষককে দেখাও।

৪.১ কোটার্মিনাল কোণ

আদর্শ অবস্থানে দুইটি ত্রিকোণমিতিক কোণের প্রান্তিক রশ্মি একই হলে কোণ দুইটিকে **কোটার্মিনাল কোণ** (coterminal angles) বলে।

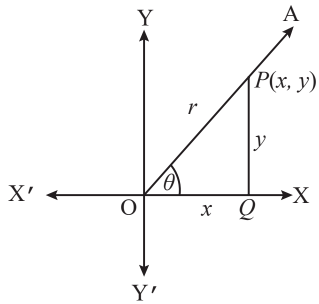


উদাহরণ: 30° এবং -330° কোণ দুইটি কোটার্মিনাল। কারণ, আদর্শ অবস্থানে এই দুইটি ত্রিকোণমিতিক কোণের প্রান্তিক রশ্মি একই। আবার 390° কোণটিও 30° কোণের সাথে কোটার্মিনাল। পাশের চিত্রে 30°, -330° এবং 390° কোণগুলো দেখানো হয়েছে, যেখানে OA প্রান্তিক রশ্মি।

বুদ্ধি খাটাও

40° এর 3 টি ধনাত্মক এবং 3 টি ঋণাত্মক কোটার্মিনাল কোণ বের করো এবং রুলার ও চাঁদার মাধ্যমে কোণগুলোকে নিচের খালি জায়গায় আদর্শ অবস্থানে উপস্থাপন করো।

৫. কোণের আদর্শ অবস্থানে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত



আমরা সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে সমকোণী ত্রিভুজ এঁকে ত্রিভুজের বাহুর মাধ্যমে বিভিন্ন ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বের করা শিখেছি এবং দেখেছি যে কোণের মান পরিবর্তনের সাথে সাথে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতও পরিবর্তিত হয়। চলো এবার কার্তেসীয় তলে বিভিন্ন কোণের আদর্শ অবস্থানে ত্রিভুজ এঁকে স্থানাঙ্ক ব্যবহার করে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বের করার চেষ্টা করি। তোমরা আগের অভিজ্ঞতায় দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্কে বা xy-সমতলে বিন্দু উপস্থাপন করতে শিখেছ। এখানে আমরা আদর্শ কোণের প্রান্তিক রশ্মির উপর বিন্দুর অবস্থান থেকে বিভিন্ন ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান বের করব।

ধরি, আদর্শ অবস্থানে $\theta = \angle XOA$ একটি ত্রিকোণমিতিক কোণ যার প্রান্তিক রশ্মি OA (পাশের চিত্র অনুযায়ী)। ধরি, OA এর উপরে যে কোনো একটি বিন্দু (মূলবিন্দু ব্যতিত) $P(x, y)$. তাহলে, $OP = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

সুতরাং, θ এর সাপেক্ষে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো নিম্নরূপ :

$$\sin\theta = \frac{y}{r},\ \cos\theta = \frac{x}{r},\ \tan\theta = \frac{y}{x},\ \cot\theta = \frac{x}{y},\ \sec\theta = \frac{r}{x},\ \csc\theta = \frac{r}{y}.$$

উদাহরণ: আদর্শ অবস্থানে কোণ $\theta = \angle XOA$ এর প্রান্তিক বাহুর উপর $P(-3, 2)$ বিন্দুর সাপেক্ষে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো নির্ণয় করো।

সমাধান: এখানে $x = -3$, $y = 2$ এবং $OP = r = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ সুতরাং ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো:

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{2}{\sqrt{13}} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-3}{\sqrt{13}} = -\frac{3}{\sqrt{13}} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3},$$

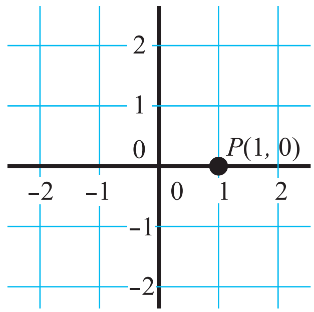
$$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{13}}{2} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{13}}{-3} = -\frac{\sqrt{13}}{3} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$$

একক কাজ

আদর্শ অবস্থানে কোণ $\theta = \angle XOA$ এর প্রান্তিক বাহুর উপর $P(1, -2)$ বিন্দুর সাপেক্ষে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো নির্ণয় করো।

৬. কোয়াড্রেন্টাল কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

আদর্শ অবস্থানে কোয়াড্রেন্টাল কোণের প্রান্তিক রশ্মি যে কোনো অক্ষের উপর অবস্থান করে। সুতরাং আমরা বিভিন্ন অক্ষের উপর বিন্দুর সাপেক্ষে কোয়াড্রেন্টাল কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বের করতে পারি।



উদাহরণ: x-অক্ষের ধনাত্বক দিকের উপর P(1, 0) বিন্দুর সাপেক্ষে আদর্শ অবস্থানে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বের করো।

সমাধান: এখানে $x = 1, y = 0$ এবং $OP = r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1.$

সুতরাং ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো:

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$ $\quad$ $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$ $\quad$ $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0,$

$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{1}{0} =$ অসংজ্ঞায়িত $\quad$ $\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{1}{1} = 1$ $\quad$ $\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{1}{0} =$ অসংজ্ঞায়িত

দলগত কাজ/প্রজেক্ট

শিক্ষকের নির্দেশমতো কয়েকটি (কমপক্ষে চারটি বা চারের গুণিতক সংখ্যক) দলে বিভক্ত হবে। প্রত্যেক দল একটি করে গ্রাফপেপার নিবে। গ্রাফপেপারে x-অক্ষ এবং y-অক্ষ আঁকবে এবং মূলবিন্দু O নির্ধারণ করবে। প্রত্যেক দল প্রতিটি অক্ষের ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক দিকের উপর একটি করে বিন্দু নিবে এবং বিন্দুগুলোকে A, B, C, D দ্বারা নির্দেশ করবে। শিক্ষক খেয়াল রাখবেন যেন প্রত্যেক দলের নেওয়া বিন্দগুলো ভিন্ন ভিন্ন হয়। প্রত্যেক দল একটি করে পোস্টারপেপার নিয়ে তার উপরের দিকে একপাশে গ্রাফপেপারটি গাম দিয়ে লাগিয়ে দিবে। এবার পোস্টারপেপারে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর লিখবে।

- x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের উপর বিন্দু A এর স্থানাঙ্ক :
- y-অক্ষের ধনাত্মক দিকের উপর বিন্দু B এর স্থানাঙ্ক :
- x-অক্ষের ঋণাত্মক দিকের উপর বিন্দু C এর স্থানাঙ্ক :
- y-অক্ষের ঋণাত্মক দিকের উপর বিন্দু D এর স্থানাঙ্ক :
- আদর্শ অবস্থানে প্রান্তিক রশ্মি OA এর ধনাত্মক কোণ:
- আদর্শ অবস্থানে প্রান্তিক রশ্মি OB এর ধনাত্মক কোণ:
- আদর্শ অবস্থানে প্রান্তিক রশ্মি OC এর ধনাত্মক কোণ:
- আদর্শ অবস্থানে প্রান্তিক রশ্মি OD এর ধনাত্মক কোণ:
- এখন প্রত্যেক দল তাদের নেওয়া বিন্দগুলোর সাপেক্ষে প্রত্যেক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বের করে নিচের ছকটি পূরণ করবে।

অনুপাত \ θ°	0°	90°	180°	270°
sin				
cos				
tan				
sec				
csc				
cot				

ভিন্ন ভিন্ন দলের ভিন্ন ভিন্ন বিন্দু হওযার পরেও উপরের ছকের প্রত্যেক ঘরের মান একই হয়েছে!

- উপরের ছকের প্রত্যেক ঘরের মানগুলো একই হওয়ার কারণ কী? প্রত্যেকে যুক্তি দিয়ে চিন্তা করো এবং তোমার দলের সকল সদস্যের সাথে আলোচনা করে একটি সিদ্ধান্তে পৌঁছাও। তোমাদের সিদ্ধান্তটি পোস্টার পেপারে লিখে উপস্থাপন করো।

এবার শিক্ষকের নির্দেশনা মোতাবেক কোনো একদিনে তোমাদের প্রজেক্টটি সকলের সামনে উপস্থাপন করো।

৭. কোয়াড্রেন্ট কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

আদর্শ অবস্থানে কোয়াড্রেন্ট কোণের প্রান্তিক রশ্মি যে কোনো চতুর্ভাগে অবস্থান করে। সুতরাং আমরা বিভিন্ন চতুর্থাংশের বিন্দুর সাপেক্ষে কোয়াড্রেন্ট কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বের করতে পারি।

উদাহরণ: x-অক্ষের ধনাত্বক দিকের সাথে $P(1, 1)$ বিন্দুর সাপেক্ষে আদর্শ অবস্থানে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বের করো।

সমাধান: এখানে $x = 1, y = 1$ এবং $OP = r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. সুতরাং ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো:

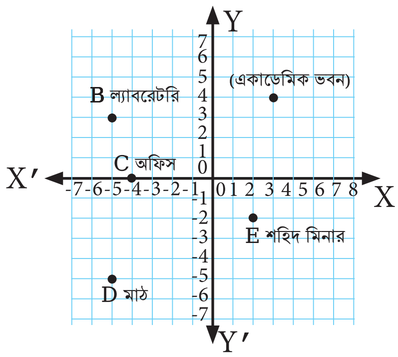
$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad$ $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad$ $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1$

$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$ $\quad$ $\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$ $\quad$ $\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{1}{1} = 1$

লক্ষ করে দেখো, উপরের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো 45° ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সাথে মিলে গেছে। এর কারণ কী? চিন্তা করে তোমার যুক্তি নিচের খালি জায়গায় লেখো।

জোড়ায় কাজ

পাশের গ্রাফপেপারে একটি শিক্ষা প্রতিষ্ঠানের কয়েকটি অংশের অবস্থান চিহ্নিত করা আছে। এখানে A, B, C, D ও E বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক বের করো। মূলবিন্দু $(0, 0)$ থেকে উক্ত বিন্দুগুলোর প্রত্যেকটি দিয়ে গমনকারী রেখাকে প্রান্তিক রশ্মি ধরে ত্রিকোণমিতিক কোণ θ এর আদর্শ অবস্থানে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বের করে নিচের ছকটি পূরণ করো।



	(x, y)	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\csc\theta$	$\sec\theta$	$\cot\theta$
A							
B							
C							
D							
E							

৮. বিভিন্ন চতুর্ভাগে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের চিহ্ন

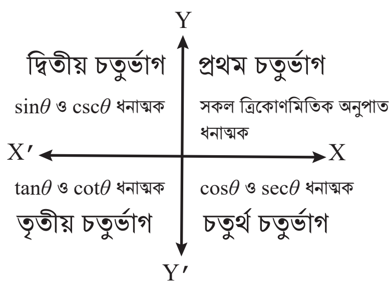
xy-সমতলে আদর্শ অবস্থানে কোণ $\theta = \angle XOA$ এর ঘূর্ণায়মান রশ্মি OA ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘূর্ণনের ফলে প্রান্তিক অবস্থানের উপর নির্ভর করে আদি রশ্মি OX এর সাথে বিভিন্ন পরিমাপের কোণ উৎপন্ন করে। OA এর উপর যে কোনো বিন্দু $P(x, y)$ নিলে বিভিন্ন চতুর্ভাগে অবস্থানের কারণে P বিন্দুর স্থানাঙ্কের অর্থাৎ x ও y এর চিহ্নের পরিবর্তন হবে। তবে দূরত্ব বিবেচনায় $OP = r$ সবসময় ধনাত্মক হবে। এই ধারণা ব্যবহার করে আমরা বিভিন্ন চতুর্ভাগে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর মান বের করতে পারবো।

চলো এবার নিচের ছকের ফাঁকা স্থান পূরণ করি। কয়েকটি করে দেয়া আছে। বাকিগুলো তোমরা লেখো।

শিক্ষাবর্ষ ২০২৪

চতুর্ভাগ	ভুজ	কোটি	অনুপাতসমূহের চিহ্ন
প্রথম	$x > 0$	$y > 0$	$\sin\theta = \frac{y}{r} > 0$, $\cos\theta = \frac{x}{r} > 0$, $\tan\theta = \frac{y}{x} > 0$ $\csc\theta = \frac{r}{y} > 0$, $\sec\theta =$ $\cot\theta =$
দ্বিতীয়	$x < 0$		$\sin\theta =$ $\cos\theta = \frac{x}{r} < 0$, $\tan\theta =$ $\csc\theta =$ $\sec\theta =$ $\cot\theta = \frac{x}{y} < 0$
তৃতীয়		$y < 0$	$\sin\theta = \frac{y}{r} < 0$, $\cos\theta =$ $\tan\theta =$ $\csc\theta =$ $\sec\theta =$ $\cot\theta =$
চতুর্থ	$x > 0$		$\sin\theta = \frac{y}{r} < 0$, $\cos\theta =$ $\tan\theta =$ $\csc\theta =$ $\sec\theta = \frac{r}{x} > 0$ $\cot\theta =$

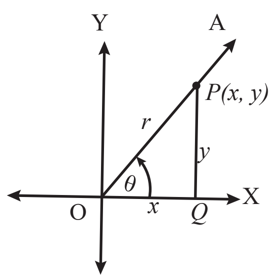
আমরা দেখলাম চতুর্ভাগ বিবেচনায় অনুপাতগুলো ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হতে পারে। সহজে মনে রাখার জন্য আমরা পাশের চিত্রটি ব্যবহার করতে পারি। এই চিত্রে কোন চতুর্ভাগে কোন কোন অনুপাতগুলো ধনাত্মক তা নির্দেশ করা হয়েছে।



৯. কোণের পার্থক্য অনুসারে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের আন্তঃসম্পর্ক

স্থানাঙ্ক জ্যামিতির বিভিন্ন চতুর্ভাগে অবস্থান থেকে আমরা ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের আন্তঃসম্পর্ক নির্ণয় করতে পারি।

পাশের চিত্র অনুযায়ী সমকোণী ত্রিভুজ ΔOPQ এর ক্ষেত্রে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত,



$\sin\theta = \frac{y}{r}$, $\cos\theta = \frac{x}{r}$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$,

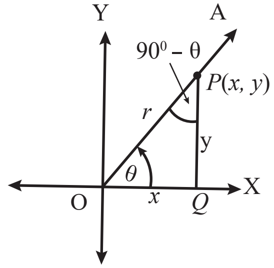
$\csc\theta = \frac{r}{y}$, $\sec\theta = \frac{r}{x}$, $\cot\theta = \frac{x}{y}$

এই সকল ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ব্যবহার করে আমরা বিভিন্ন কোণের আন্তঃসম্পর্ক নির্ণয় করতে পারি।

৯.১ পূরক কোণের মাধ্যমে

তোমরা জানো, ত্রিভুজের দুটি কোণের সমষ্টি এক সমকোণ হলে কোণ দুটির একটিকে অপরটির পূরক কোণ (complementary angle) বলে। এখানে $\angle OPQ$ হলো θ এর পূরক কোণ। অর্থাৎ $\angle OPQ = 90° - \theta$.

P(x, y) বিন্দুর সাপেক্ষে আদর্শ কোণ θ থেকে পাই,



$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x},$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y}, \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}, \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

আবার, পাশের চিত্র অনুযায়ী সমকোণী ত্রিভুজ ΔOPQ এর ক্ষেত্রে $\angle OPQ = 90°-\theta$ অনুযায়ী সন্নিহিত বাহু y এবং বিপরীত বাহু x. সুতরাং ত্রিকোণমিতিক অনুপাত,

$$\sin(90°-\theta) = \frac{x}{r}, \qquad \cos(90°-\theta) = \frac{y}{r}, \qquad \tan(90°-\theta) = \frac{x}{y}$$

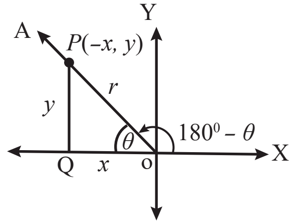
$$\csc(90°-\theta) = \frac{r}{x}, \qquad \sec(90°-\theta) = \frac{r}{y}, \qquad \cot(90°-\theta) = \frac{y}{x}$$

এখন উপরের সম্পর্কগুলো পর্যবেক্ষণ করে তোমরা নিচের সারণিটি পূরণ করো। এখানে দুইটি করে দেওয়া আছে।

$\sin(90° - \theta) = \frac{x}{r} = \cos\theta$	$\csc(90° - \theta) =$
$\cos(90° - \theta) =$	$\sec(90° - \theta) = \frac{r}{y} = \csc\theta$
$\tan(90° - \theta) =$	$\cot(90° - \theta) =$

৯.২ আদর্শ কোণের প্রান্তিক রশ্মির অবস্থান দ্বিতীয় চতুর্ভাগে

এবার পাশের চিত্রটির দিকে লক্ষ করো। OA রশ্মিটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করে x-অক্ষের ঋণাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। সুতরাং আদর্শ অবস্থানে প্রান্তিক রশ্মি OA এর ত্রিকোণমিতিক কোণ হলো $(180° - \theta)$. OA রশ্মির উপর একটি বিন্দু P নিই। P থেকে x-অক্ষের উপর PQ লম্ব আঁকি। ধরি $OQ = x$, $PQ = y$ এবং $OP = r$. তাহলে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-x, y)$.



সমকোণী ত্রিভুজ ΔOPQ এর ক্ষেত্রে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ:

1) $$\begin{cases} \sin\theta = \frac{y}{r}, & \cos\theta = \frac{x}{r}, & \tan\theta = \frac{y}{x} \\ \csc\theta = \frac{r}{y}, & \sec\theta = \frac{r}{x}, & \cot\theta = \frac{x}{y} \end{cases}$$

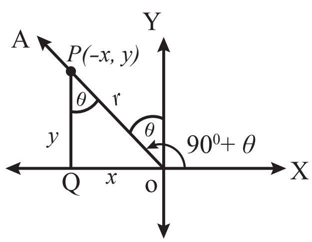
$P(-x, y)$ বিন্দুর সাপেক্ষে $(180° - \theta)$ কোণের আদর্শ অবস্থানে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ:

2) $$\begin{cases} \sin(180° - \theta) = \frac{y}{r}, & \cos(180° - \theta) = \frac{-x}{r}, & \tan(180° - \theta) = \frac{y}{-x} \\ \csc(180° - \theta) = \frac{r}{y}, & \sec(180° - \theta) = \frac{r}{-x}, & \cot(180° - \theta) = \frac{-x}{y} \end{cases}$$

(1) এবং (2) ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ থেকে ত্রিকোণমিতিক কোণের সম্পর্ক নিচের সারনিতে লেখো।

$\sin(180° - \theta) =$	$\csc(180° - \theta) =$
$\cos(180° - \theta) =$	$\sec(180° - \theta) =$
$\tan(180° - \theta) =$	$\cot(180° - \theta) =$

এবার পাশের চিত্র ব্যবহার করে ত্রিকোণমিতিক কোণ $90° + \theta$ এবং θ এর মধ্যে সম্পর্কসমূহ নিচে লেখো।



$\sin(90° + \theta) =$	$\csc(90° + \theta) =$
$\cos(90° + \theta) =$	$\sec(90° + \theta) =$
$\tan(90° + \theta) =$	$\cot(90° + \theta) =$

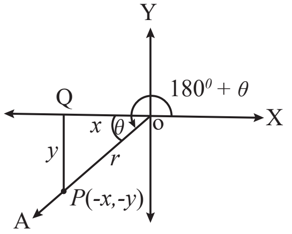
উপরের সম্পর্কগুলো ব্যবহার করে আমরা দ্বিতীয় চতুর্ভাগের কিছু কোণের মান খুব সহজেই বের করতে পারব।

উদাহারণ: $\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

একক কাজ:

$\sin 120°$ ও $\tan 135°$ এর মান নির্ণয় করো।

৯.৩ আদর্শ কোণের প্রন্তিক রশ্মির অবস্থান তৃতীয় চতুর্ভাগে



উপরের পদ্ধতি অনুযায়ী পাশের চিত্রটি পর্যবেক্ষণ করে তোমরা নিচের সম্পর্কগুলো প্রমাণ করো।

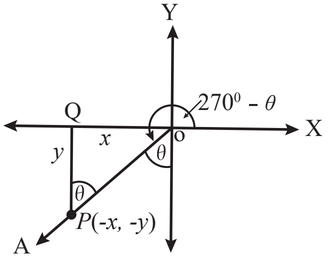
জোড়ায় কাজ

১. পাশের চিত্রকে পর্যবেক্ষণ করে নিচের সম্পর্কগুলো প্রমাণ করো।

$\sin(180° + \theta) = -\sin\theta$	$\csc(180° + \theta) = -\csc\theta$
$\cos(180° + \theta) = -\cos\theta$	$\sec(180° + \theta) = -\sec\theta$
$\tan(180° + \theta) = \tan\theta$	$\cot(180° + \theta) = \cot\theta$

২. পাশের চিত্রকে পর্যবেক্ষণ করে নিচের সম্পর্কগুলো প্রমাণ করো।

$\sin(270° - \theta) = -\cos\theta$	$\csc(270° - \theta) = -\sec\theta$
$\cos(270° - \theta) = -\sin\theta$	$\sec(270° - \theta) = -\csc\theta$
$\tan(270° - \theta) = \cot\theta$	$\cot(270° - \theta) = \tan\theta$



সূত্রগুলো ব্যবহার করে আমরা তৃতীয় চতুর্ভাগের কয়েকটি কোণের মান খুব সহজেই বের করতে পারব।

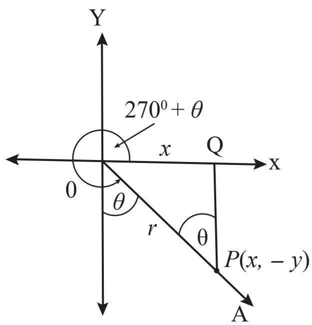
উদাহরণ: $\cos 225° = \cos(180° + 45°) = -\cos 45° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

একক কাজ: মান নির্ণয় করো : $\sin 210°$, $\tan 240°$

৯.৪ আদর্শ কোণের প্রান্তিক রশ্মির অবস্থান চতুর্থ চতুর্ভাগে

জোড়ায় কাজ

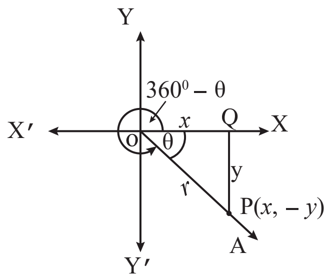
১. প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় চতুর্ভাগের ত্রিকোণমিতিক কোণের সম্পর্কগুলো নির্ণয়ের অভিজ্ঞতা থেকে পাশের চিত্র পর্যবেক্ষণ করে নিচের সম্পর্কগুলো প্রমাণ করো।



$\sin(270° + \theta) = -\cos\theta$	$\csc(270° + \theta) = -\sec\theta$
$\cos(270° + \theta) = \sin\theta$	$\sec(270° + \theta) = \csc\theta$
$\tan(270° + \theta) = -\cot\theta$	$\cot(270° + \theta) = -\tan\theta$

২. পাশের চিত্র ব্যবহার করে ত্রিকোণমিতিক কোণ $(360° - \theta)$ এবং θ এর মধ্যে সম্পর্কসমূহ নিচে লেখো।

$\sin(360° - \theta) =$	$\csc(360° - \theta) =$
$\cos(360° - \theta) =$	$\sec(360° - \theta) =$
$\tan(360° - \theta) =$	$\cot(360° - \theta) =$

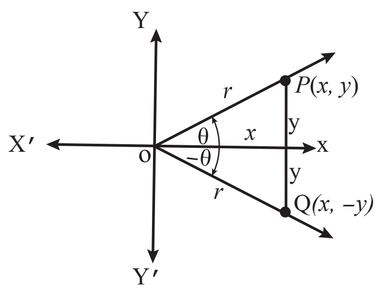


একক কাজ:

মান নির্ণয় করো : $\sin 330°$, $\cos 300°$, $\tan 315°$

৩. পাশের চিত্র ব্যবহার করে ত্রিকোণমিতিক কোণ $-\theta$ এবং θ এর মধ্যে সম্পর্কসমূহ নিচে লেখো।

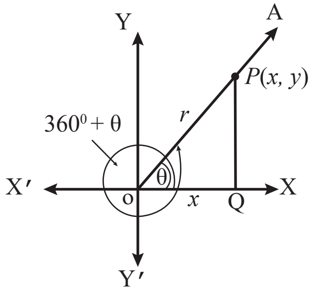
$\sin(-\theta) = \frac{-y}{r} = -\sin\theta$	$\csc(-\theta) =$
$\cos(-\theta) =$	$\sec(-\theta) =$
$\tan(-\theta) =$	$\cot(-\theta) =$



সুতরাং ত্রিকোণমিতিক কোণের মধ্যে সম্পর্কসমূহ আমরা নিচের সারণী থেকে মনে রাখতে পারি।

অনুপাত / কোণ	sin	cos	tan	csc	sec	cot
$-\theta$	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	$-\tan\theta$	$-\csc\theta$	$\sec\theta$	$-\cot\theta$
$90° - \theta$	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$	$\tan\theta$
$90° + \theta$	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$-\csc\theta$	$\tan\theta$

$180° - \theta$	$\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\tan\theta$	$\csc\theta$	$-\sec\theta$	$-\cot\theta$
$180° + \theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$\tan\theta$	$-\csc\theta$	$-\sec\theta$	$\cot\theta$
$270° - \theta$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\cot\theta$	$-\sec\theta$	$-\csc\theta$	$\tan\theta$
$270° + \theta$	$-\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\cot\theta$	$-\sec\theta$	$\csc\theta$	$-\tan\theta$
$360° - \theta$	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	$-\tan\theta$	$-\csc\theta$	$\sec\theta$	$-\cot\theta$



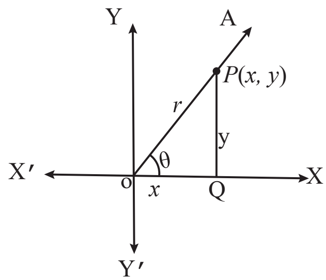
আবার কোণের মান 360°-এর বেশি হলে ধরি, কোণের মান $(360° + \theta)$। θ কোণের জন্য এবং $360°+\theta$ কোণের জন্য রশ্মিটির অবস্থান একই হবে। ফলে উভয় কোণের জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান একই হবে। অর্থাৎ

$\sin(360° + \theta) = \sin\theta,\quad \cos(360° + \theta) = \cos\theta$ ইত্যাদি।

উদাহারণ: $\sin420° = \sin(360°+60°) = \sin60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

একক কাজ: মান নির্ণয় করো: $\cos 405°, \sin570°$

১০. ত্রিকোণমিতি ও স্থানাঙ্ক জ্যামিতির আন্তঃসম্পর্ক

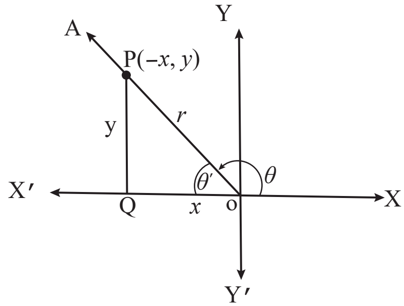


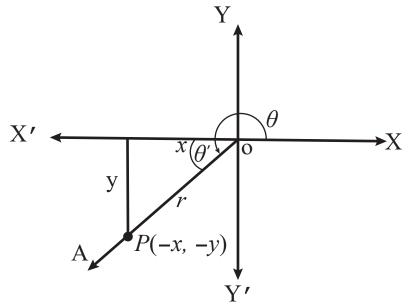
ধরি xy-সমতলে ধনাত্মক ত্রিকোণমিতিক কোণ $\theta = \angle XOA$ এর প্রান্তিক রশ্মি OA এর উপর P (মূল বিন্দু ব্যাতিত) একটি বিন্দু। তাহলে P বিন্দুকে আমরা দুইভাবে নির্দিষ্ট করতে পারি। একটি হলো স্থানাঙ্ক জ্যামিতির মাধ্যমে এবং অন্যটি হলো ত্রিকোণমিতিক কোণের মাধ্যমে। ধরি P বিন্দু হতে OX এর উপর PQ লম্ব। ধরি $OQ = x$ এবং $PQ = y$ তাহলে স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y). আবার $OP = r$ হলে P বিন্দুকে (r, θ) এর মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়। অর্থাৎ P বিন্দুর দুটি রূপ আছে। একটি হলো x-অক্ষ এবং y-অক্ষের মাধ্যমে এবং অন্যটি হলো কৌণিক দূরত্ব θ এবং OP এর দূরত্বের মাধ্যমে। এখানে আমরা $P(x, y)$ এবং $P(r, \theta)$ এর মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করব। এখানে লক্ষ রাখতে হবে যে, θ আদর্শ অবস্থানে ত্রিকোণমিতিক কোণ। $P(x, y)$ বিন্দু যে চতুর্ভাগে অবস্থান করে সেই অনুযায়ী θ এর মান বের করতে হবে। θ এর মান বের করতে হলে, θ এর রেফারেন্স কোণ সম্পর্কে জানতে হবে।

১০.১ রেফারেন্স কোণ

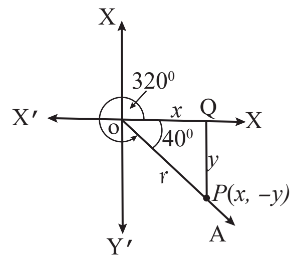
ধরি, $\theta = \angle XOA$ আদর্শ অবস্থানে একটি ত্রিকোণমিতিক কোণ। OA রশ্মি x-অক্ষের সাথে যে সূক্ষ্মকোণ তৈরি করে তাকে θ এর রেফারেন্স কোণ (reference angle) বলে। θ এর রেফারেন্স কোণকে θ' দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

নিচে P বিন্দুর জন্য দ্বিতীয় এবং তৃতীয় চতুর্থাংশে θ কোণের রেফারেন্স কোণ θ' দেখানো হয়েছে।





উদাহরণ: $320°$ এর রেফারেন্স কোণ নির্ণয় করো।



সমাধান: $320° = 270° + 50°$. সুতরাং $320°$ কোণটি চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থান করে (পাশের চিত্র দেখো)। ইহা x-অক্ষের সাথে $360° - 320° = 40°$ সূক্ষ্মকোণ তৈরি করেছে। সুতরাং $320°$ এর রেফারেন্স কোণ $40°$.

জোড়ায় কাজ

$30°, 150°, 280°, 300°, 400°$ এবং $-240°$ এর রেফারেন্স কোণ নির্ণয় করো।

১০.২ P(x, y) কে P(r, θ) এর মাধ্যমে প্রকাশ

এবার বলো তো, x ও y এর সাথে r এবং θ এর সম্পর্ক কী? মনে করে দেখো, পিথাগোরাসের সূত্র ব্যবহার করে আমরা লিখতে পারি,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

অর্থাৎ, x ও y এর সাথে r এবং θ এর সম্পর্ক নিম্নরূপ:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan\theta' = \frac{y}{x} \qquad \ldots (1)$$

এখানে x এবং y এর ধনাত্মক মান ধরতে হবে। এখান থেকে রেফারেন্স কোণ θ' বের করার পরে P(x,y) বিন্দুর অবস্থান অনুযায়ী θ বের করতে হবে।

উদাহরণ-১

P($-\sqrt{3}$, 1) বিন্দুকে (r, θ) এর মাধ্যমে প্রকাশ করো।

সমাধান: এখানে $x = -\sqrt{3}$, এবং $y = 1$. সুতরাং P($-\sqrt{3}$, 1) বিন্দুটি দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত।

সুতরাং $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ এবং $\tan\theta' = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30°$.

শিক্ষাবর্ষ ২০২৪

অর্থাৎ $\theta' = 30°$. সুতরাং $\theta = 180° - 30° = 150°$.

সুতরাং (r, θ) এর মাধ্যমে $P(-\sqrt{3}, 1)$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $P(\sqrt{5}, 150°)$.

অন্যদিকে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক r এবং θ এর মাধ্যমে দেওয়া থাকলে নিচের সম্পর্ক থেকে আমরা P বিন্দুর স্থানাঙ্ককে (x, y) এর মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারি।

$$x = r\cos\theta \text{ এবং } y = r\sin\theta$$

উদাহরণ-২

$P(5, 240°)$ বিন্দুকে $P(x, y)$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করো।

সমাধান: এখানে দেওয়া আছে, $r = 5$, এবং $\theta = 240°$. সুতরাং,

$$x = r\cos\theta = 5\cos 240° = 5\cos(180° + 60°) = 5(-\cos 60°) = -5 \times \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$$

এবং

$$y = 5\sin 240° = 5\sin(180° + 60°) = 5(-\sin 60°) = -5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

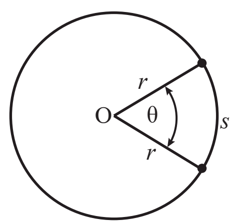
সুতরাং $P(x, y) = P\left(-\frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

জোড়ায় কাজ

$P(\sqrt{2}, 150°)$ বিন্দুকে $P(x, y)$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করো।

১১. ত্রিকোণমিতিক কোণ-এর রেডিয়ান পরিমাপ

এতক্ষণ আমরা ত্রিকোণমিতিক কোণ পরিমাপ করার জন্য একক হিসেবে ডিগ্রি ব্যবহার করেছি। গাণিতিক সমস্যা সমাধানের জন্য ত্রিকোণমিতিক কোণ পরিমাপের আরেকটি গুরুত্বপূর্ণ একক আছে যাকে রেডিয়ান দ্বারা নির্দেশ করা হয়। একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান চাপ বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে, তাকে এক রেডিয়ান (radian) বলে।



১১.১ বৃত্তচাপের সাথে রেডিয়ান কোণের সম্পর্ক

যদি r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের চাপ s, বৃত্তের কেন্দ্রে θ রেডিয়ান কোণ উৎপন্ন করে, তাহলে

$$\theta = \frac{s}{r}$$

অর্থাৎ, $s = r\theta$

১১.২ ডিগ্রি এবং রেডিয়ান-এর সম্পর্ক

আমরা জানি, r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের পরিধির উপরের কোনো একটি বিন্দু একটি পূর্ণ ঘূর্ণন সম্পন্ন করলে কৌণিক দূরত্ব হবে $360°$ এবং ওই বিন্দুর অতিক্রান্ত দূরত্ব হবে পরিধির সমান, অর্থাৎ $2\pi r$. সুতরাং, চাপের সাথে কোণের সম্পর্ক হতে আমরা পাই,

$$360° = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ রেডিয়ান। সুতরাং,}$$

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ রেডিয়ান এবং } 1 \text{ রেডিয়ান} = \frac{180°}{\pi}$$

জোড়ায় কাজ:

1. $30°$, $45°$ এবং $60°$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ করো।
2. $\frac{5\pi}{6}$ রেডিয়ান এবং 20 রেডিয়ানকে ডিগ্রিতে প্রকাশ করো।

সমস্যা-০১: পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কিলোমিটার। যদি পাবনা ও সিলেটের অবস্থান পৃথিবীর কেন্দ্রে $2.5°$ কোণ উৎপন্ন করে, তবে পাবনা থেকে সিলেটের দূরত্ব কত? [$\pi = 3.1416$]

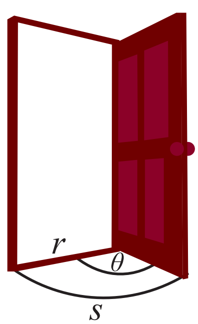
সমাধান: এখানে, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $r = 6440$ কি.মি.

পাবনা ও সিলেটের অবস্থান দ্বারা পৃথিবীর কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ, $\theta = 2.5° = \frac{2.5\pi}{180}$ রেডিয়ান

সুতরাং, পাবনা ও সিলেটের দূরত্ব, $s = r\theta = 6440 \times \frac{2.5\pi}{180} = 6440 \times \frac{2.5 \times 3.1416}{180}$

$= 281$ কি.মি. (প্রায়)

সমস্যা-০২: মনে করো, তোমাদের শ্রেণিকক্ষের দরজার প্রস্থ 107 সেন্টিমিটার। শ্রেণিকক্ষে একটি বেঞ্চ বেশি বসানোর জন্য দরজাটি পুরোপুরি খোলা যায় না, কিন্তু একটি টেবিল শ্রেণিকক্ষে প্রবেশ করাতে হবে। টেবিলটি শ্রেণিকক্ষে প্রবেশ করানোর জন্য কক্ষের দরজাটি পরিধি বরাবর 1.4 মিটার খুলতে হলে দরজার চৌকাঠ এবং দরজার পাল্লার মাঝে কৌণিক দূরত্ব কত হবে?



সমাধান: দরজাটি খুললে দরজার প্রান্তবিন্দু দ্বারা মেঝেতে একটি বৃত্তচাপ তৈরি হবে। ধরো, বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য s, ব্যাসার্ধ r এবং চৌকাঠ ও দরজার প্রস্থ দ্বারা মেঝেতে উৎপন্ন কোণ θ.

তাহলে ওই বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য ও ব্যাসার্ধ কত হবে তা হিসাব করে নিচের তালিকাটি পূরণ করো। s ও r এর মান মিটার এককে প্রকাশ করো।

বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য s (মিটার)	বৃত্তচাপের ব্যাসার্ধ r (মিটার)

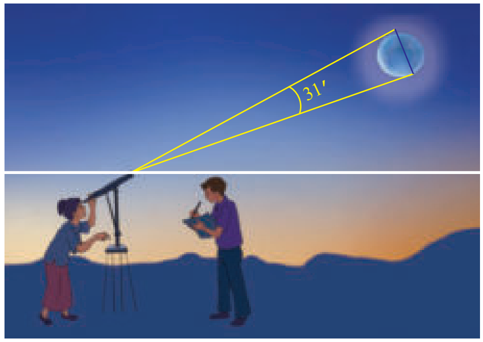
আমরা জানি, $s = r\theta$

বা, $\theta = \frac{s}{r} = \frac{1.40}{1.07} = \frac{1.40}{1.07} \times \frac{180°}{\pi}$ $\quad [\because 1$ রেডিয়ান $= \frac{180°}{\pi}]$

$\therefore\ \theta = \frac{252°}{1.07 \times 3.1416} = \frac{252°}{3.3615} \approx 75°$

সুতরাং, কৌণিক দূরত্ব $75°$

সমস্যা-০৩: পৃথিবী কোনো একটি অবস্থান থেকে চাঁদের দূরত্ব 384,400 কিলোমিটার এবং চাঁদের ব্যাস ওই বিন্দুতে $31'$ কোণ উৎপন্ন করলে, চাঁদের ব্যাস কত? [π = 3.1416]



সমাধান: এখানে, পৃথিবীর অবস্থান থেকে চাঁদের দূরত্ব, r = 384,400 কি.মি.

এবং চাঁদের ব্যাস দ্বারা পৃথিবীর ওই অবস্থানে উৎপন্ন কোণ,

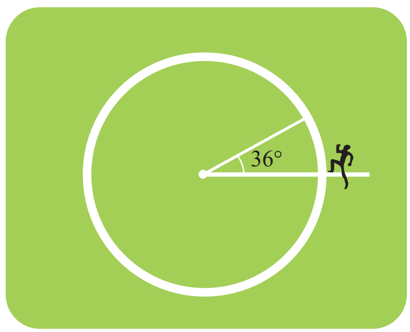
$$\theta = 31' = \left(\frac{31}{60}\right)^{\circ} = (0.517)^{\circ}$$

সুতরাং চাঁদের ব্যাস, $s = r\theta = 384400 \times \frac{(0.517) \times \pi}{180} = 384400 \times \frac{(0.517) \times 3.1416}{180}$

$= 3468.58$ কি.মি. (প্রায়)

জোড়ায় কাজ

মনে করো, তোমাদের শিক্ষাপ্রতিষ্ঠানের বার্ষিক ক্রিয়ায় 100 মিটার দৌড়ের একটি প্রতিযোগিতা রয়েছে। সেজন্য মাঠে একটি বৃত্তাকার চক্র তৈরি করলে। ওয়াসাবি ওই প্রতিযোগিতায় 9 সেকেন্ডে যে দূরত্ব অতিক্রম করে তা কেন্দ্রে $36°$ কোণ উৎপন্ন করে (পাশের চিত্র দেখো)।



ক) বৃত্তাকার চক্রটির ব্যাস নির্ণয় করো।

খ) ওয়াসাবি 5 সেকেন্ডে কতদুর অতিক্রম করে?

গ) সে 12 সেকেন্ডে যে দূরত্ব অতিক্রম করে ওই দূরত্ব দ্বারা কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণের পরিমাণ কত?

ঘ) ওয়াসাবির গতিবেগ নির্ণয় করো।

ঙ) একই প্রতিযোগিতায় পীরেন 13 সেকেন্ডে যে দূরত্ব অতিক্রম করে তা কেন্দ্রে $48°$ কোণ উৎপন্ন করে। ওয়াসাবি এবং পীরেনের মধ্যে কার দৌড়ের গতিবেগ বেশি?

অনুশীলনী

1. 5° তে কত সেকেন্ড নির্ণয় করো।

2. জ্যামিতিক রুলার এবং চাঁদা ব্যবহার করে $30^\circ, 360^\circ, 380^\circ$, -20° এবং -420° কোণ আঁক।

3. রুলার এবং চাঁদা ব্যবহার করে $60^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 200^\circ, 280^\circ, 750^\circ, -45^\circ, -400^\circ$ কোণগুলো আদর্শ অবস্থানে আঁকো। এগুলো কোয়াড্রেন্ট নাকি কোয়াড্রেন্টাল কোণ তা নির্ণয় করো। কোণগুলো কোন চতুর্ভাগে আছে তা উল্লেখ করো।

4. মান নির্ণয় করো : $\cos 135^\circ, \cot 120^\circ, \tan 390^\circ, \sin(-30^\circ), \sec 300^\circ, \csc(-570^\circ)$

5. আদর্শ অবস্থানে $A(2, 3), B(-3, 1), C(-4, -4), D(1, -2), E(-2,0)$ বিন্দুগুলো ধারা উৎপন্ন কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করো।

6. নিম্নোক্ত বিন্দুগুলোকে r এবং $\tan\theta$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করো।

   a. $A(3, -2)$ b. $B(-2, -1)$ c. $C(-4, 0)$

7. রেডিয়ানে প্রকাশ কর:

   a. $75^\circ 30'$ b. $45^\circ 44' 43''$ c. $60^\circ 30' 15''$

8. ডিগ্রীতে প্রকাশ কর:

   a. $\frac{4\pi}{25}$ রেডিয়ান b. 1.3177 রেডিয়ান c. 0.9759 রেডিয়ান

9. পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কিলোমিটার। যদি টেকনাফ ও তেঁতুলিয়ার অবস্থান পৃথিবীর কেন্দ্রে $10^\circ 6' 3''$ কোণ উৎপন্ন করে, তবে টেকনাফ থেকে তেঁতুলিয়ার দূরত্ব কত?

10. পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কিলোমিটার। ধরো, পৃথিবীর উপরে দুইটি স্যাটেলাইট এমন অবস্থানে আছে যে তারা পৃথিবীর কেন্দ্রে $33''$ কোণ উৎপন্ন করে। স্যাটেলাইট দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব কত?