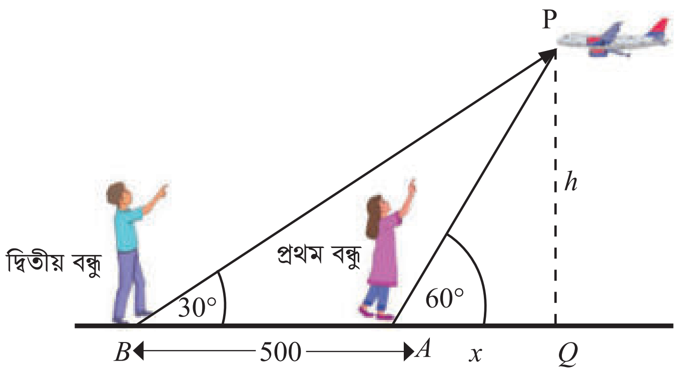
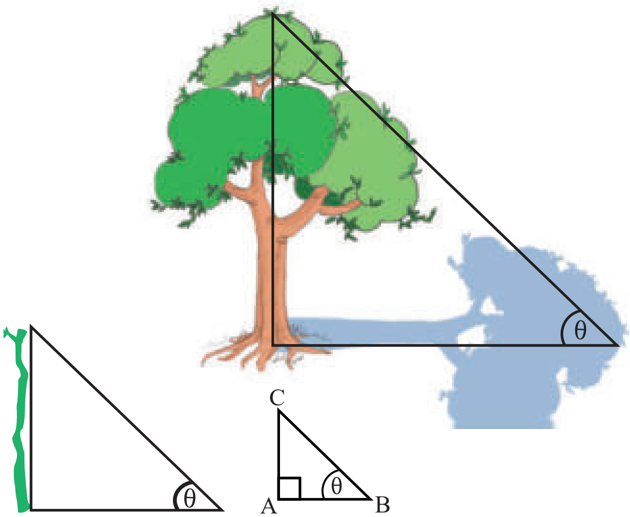
পরিমাপে ত্রিকোণমিতি

এই অভিজ্ঞতায় শিখতে পারবে-

- ত্রিকোণমিতির ধারণা
- ত্রিকোণমিতিক অনুপাত
- বিভিন্ন ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান
- উন্নতি ও অবনতি কোণ
- দূরত্ব ও উচ্চতা বিষয়ক বাস্তব সমস্যা ও সমাধান





পরিমাপে ত্রিকোণমিতি

ধরো, কোনো এক বিকেলে অভি, মিতা ও রিনা গাছের ছায়ায় বসে শ্রেণির পড়া নিয়ে আলোচনা করছিল। মিতা, অভিকে জিজ্ঞাসা করল, আচ্ছা তুমি কি এই গাছের উচ্চতা বলতে পারবে?

অভি বলল: হ্যা, এখুনি আমি গাছে উঠে উচ্চতা মেপে দিচ্ছি।

রিনা সাথে সাথে বলল: গাছে উঠতে পারবে না। গাছে না উঠেই কীভাবে উচ্চতা মাপা যায়, এসো তা বের করার চেষ্টা করি।

মিতা বলল: গাছের একটা ছায়া পড়েছে। দেখো তো ছায়া মেপে গাছের উচ্চতা মাপার কোনো বুদ্ধি বের করা যায় কিনা?

অভি বলল: আসলে ছায়াটি গাছটির সাথে সমকোণে অবস্থান করছে। তাহলে, ছায়ার প্রান্ত বিন্দু থেকে গাছের শীর্ষবিন্দুতে একটি রেখা কল্পনা করলে একটি সমকোণী ত্রিভুজ পাওয়া যাবে। এটি কি কোনো কাজে লাগতে পারে?

রিনা বলল: হ্যা, পিথাগোরাসের উপপাদ্য ব্যবহার করা যেতে পারে।

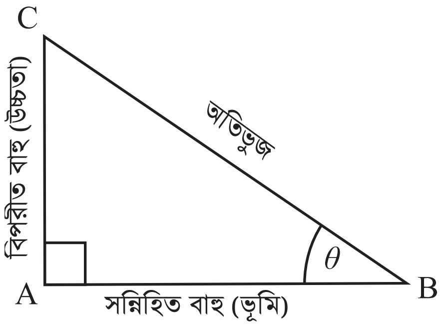
মিতা বলল: পিথাগোরাসের উপপাদ্যের সাহায্যে সমকোণী ত্রিভুজের যে কোনো দুই বাহুর দৈর্ঘ্য জানা থাকলে তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য বের করা যায়। এখানে গাছের ছায়ার দৈর্ঘ্য অর্থাৎ ভূমি পরিমাপ করা যাবে। কিন্তু অতিভুজের দৈর্ঘ্য মাপতে না পারলে তো আর গাছের উচ্চতা বের করা যাবেনা। সুতরাং আমাদের নিশ্চয় নতুন কোনো সূত্রের সন্ধান করতে হবে। চলো আগামীকাল গণিত শিক্ষকের সাথে বিষয়টি আলোচনা করি এবং দেখি নতুন কিছু খুঁজে পাওয়া যায় কিনা।

পরের দিন গণিত শিক্ষককে অভি জিজ্ঞাসা করল, স্যার, আমরা গাছে না উঠেও কি গাছের উচ্চতা মাপতে পারি? তখন শিক্ষক বললেন, তোমরা ত্রিকোণমিতির কয়েকটি ক্লাস মনোযোগ দিয়ে করো, তাহলেই পরবর্তীতে তোমাদের সমস্যাটি সমাধান করতে পারবে।

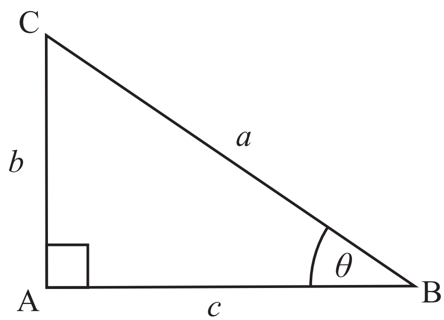
১. ত্রিকোণমিতির ধারণা

পরিমাপের ক্ষেত্রে সমকোণী ত্রিভুজ গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে। সমকোণী ত্রিভুজের তিনটি বাহুর মধ্যে একটি বিশেষ সম্পর্ক তোমরা পূর্বের শ্রেণিতে খুঁজে পেয়েছিলে। আর তা হলো, অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান। সম্পর্কটি তৈরি হয়েছিল শুধু বাহুর মাধ্যমে। কিন্তু সমকোণী ত্রিভুজের তিনটি বাহু এবং তিনটি কোণ রয়েছে। বাহু এবং কোণ ব্যবহার করেও বিভিন্ন সম্পর্ক তৈরি করা যায় এবং সেটি বাস্তব জীবনে বিভিন্ন কাজে ব্যবহার করা যায় । ত্রিভুজের কোণ এবং বাহুর অনুপাত ব্যবহার করে প্রাচীনকালেও মানুষ বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করেছে। যেমন, গাছে না উঠেও কীভাবে গাছের উচ্চতা মাপা যায়, নদীর এক তীরে দাঁড়িয়ে কীভাবে নদীর প্রস্থ মাপা যায় ইত্যাদি। এসব গাণিতিক কৌশলের উপর ভিত্তি করে ত্রিকোণমিতি (Trigonometry) নামে সৃষ্টি হয়েছে গণিতের এক বিশেষ শাখা। আর Trigonometry শব্দটি গ্রিক শব্দ tri (অর্থ তিন), gon (অর্থ ধার) ও metron (অর্থ পরিমাপ) দ্বারা গঠিত। মিশরীয় ভূমি জরিপ ও প্রকৌশল কাজে ত্রিকোণমিতি ব্যবহার করত বলে ধারণা করা হয়। ত্রিভুজ সংক্রান্ত সমস্যা সমাধানসহ গণিতের বিভিন্ন শাখায় ত্রিকোণমিতির ব্যবহার রয়েছে।

২. সমকোণী ত্রিভুজের বিভিন্ন বাহু ও কোণের পরিচিতি



সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণের বিপরীত বাহু **অতিভুজ** (hypotenuse)। সমকোণী ত্রিভুজে সমকোণ ব্যতীত দুটি সূক্ষকোণ রয়েছে। সূক্ষকোণ দুটি উভয়ই অতিভুজ সংলগ্ন। অতিভুজ সংলগ্ন বাহু দুটির একটিকে **ভূমি** এবং অন্যটিকে **উচ্চতা** বলে। ভূ-সমান্তরালে যে বাহুটি থাকে সেটি ভূমি এবং ভূ-সমান্তরালের সাথে উল্লম্বভাবে যে বাহুটি থাকে সেটি উচ্চতা। কিন্তু খেয়াল রাখবে, ত্রিভুজটিকে ঘুরিয়ে লম্বকে ভূ-সমান্তরালে নিয়ে আসলে আমরা কিন্তু তাকেই ভূমি ধরবো এবং অন্যটিকে উচ্চতা ধরবো। ফলে ত্রিভুজের ভিন্ন অবস্থানের কারণে বাহুগুলোর নামের পরিবর্তন হবে। এটা আমাদের কাজের জন্যও একটা সমস্যা। ফলে নির্দিষ্ট কোণের সাপেক্ষে বাহুগুলোর নামকরণ করে নিলে আমাদের আর কোনো সমস্যা থাকবে না। ধরো, ভূমি এবং অতিভুজ সংলগ্ন কোণের সাপেক্ষে বাহুগুলোর নামকরণ করতে চাই। তাহলে, ভূমিকে **সন্নিহিত বাহু** (adjacent side), উচ্চতাকে **বিপরীত বাহু** (opposite side) হিসেবে বিবেচনা করতে পারি।



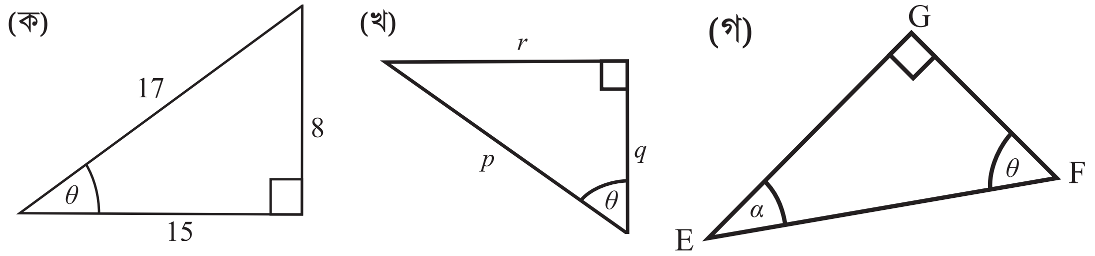
জ্যামিতিক চিত্রে শীর্ষবিন্দুগুলো চিহ্নিত করার জন্য বড়ো হাতের বর্ণ (যেমন, A, B, C ইত্যাদি) এবং বাহু চিহ্নিত করার জন্য ছোটো হাতের বর্ণ (যেমন, a, b, c ইত্যাদি) ব্যবহার করা হয়। সাধারণতঃ, শীর্ষ বিন্দুতে ব্যবহৃত বড়ো হাতের বর্ণকে বিপরীত বাহুর জন্য ছোটো হাতের বর্ণ হিসেবে ব্যবহার করা হয়। কোণ নির্দেশের জন্য সাধারণত গ্রীক বর্ণ ব্যবহার করা হয়। প্রাচীন গ্রীসের গণিতবিদগণের হাত ধরেই জ্যামিতি ও ত্রিকোণমিতিতে এই বর্ণগুলো ব্যবহৃত হয়ে আসছে। ব্যবহৃত বর্ণগুলোর কয়েকটি নিচে দেয়া হলো।

কোণ	α	β	γ	θ	δ
নাম	আলফা (alpha)	বিটা (beta)	গামা (gamma)	থেটা (theta)	ডেল্টা (delta)

উপরের চিত্রে $\angle ABC$ কে θ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়েছে।

একক কাজ

নিচের চিত্রগুলো থেকে θ এবং α কোণের সাপেক্ষে অতিভুজ, বিপরীত বাহু এবং সন্নিহিত বাহু চিহ্নিত করো।



সমকোণী ত্রিভুজের নাম	সূক্ষ্মকোণ	অতিভুজ	বিপরীত বাহু	সন্নিহিত বাহু
ক	θ	17		
খ	θ			
গ	θ			
গ	α	EF		

৩. সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও সন্নিহিত বাহুর অন্তর্বর্তী কোণের সাপেক্ষে বিভিন্ন বাহুর অনুপাত

জোড়ায় কাজ

প্রত্যেকে খাতায় একটি সমকোণী ত্রিভুজ আঁকো যার বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য তোমার ইচ্ছেমতো নিতে পার, কিন্তু ভূমি সংলগ্ন সূক্ষ্মকোণটি হতে হবে $30°$. ত্রিভুজটি আঁকা হয়ে গেলে রুলার/স্কেল দিয়ে এদের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য পরিমাপ করো এবং নিচের ছকটি পূরণ করো।

(১) সন্নিহিত বাহু	(২) বিপরীত বাহু	(৩) অতিভুজ	(৪) $\frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}$	(৫) $\frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}$	(৬) $\frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{বিপরীত বাহু}}$	(৭) $\frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{সন্নিহিত বাহু}}$	(৮) $\frac{\text{অতিভুজ}}{\text{সন্নিহিত বাহু}}$	(৯) $\frac{\text{অতিভুজ}}{\text{বিপরীত বাহু}}$

৪ নং থেকে ৯ নং ঘরের অনুপাত ৬টি তোমার অন্যান্য সহপাঠীর সাথে মিলিয়ে দেখো যে এগুলো মিলে গেছে নাকি পৃথক হয়েছে। অবশ্যই মিলে গেছে। উপরের কাজ থেকে তোমরা কিছু লক্ষ করলে কি?

তোমরা সবাই একটি সমকোণী ত্রিভুজের $30°$ সূক্ষ্মকোণের সাপেক্ষে বাহুগুলোর অনুপাত বের করেছ এবং বাহুগুলোর পরিমাপ বিভিন্ন হওয়া সত্ত্বেও অনুপাত একই হয়েছে।

একইভাবে তোমরা যদি একটি সমকোণী ত্রিভুজের **যে কোনো** সূক্ষ্মকোণের সাপেক্ষে বাহুগুলোর অনুপাত বের করো, তাহলে দেখতে পাবে বাহুগুলোর পরিমাপ বিভিন্ন হওয়া সত্তেও অনুপাত একই হয়েছে। এই পরীক্ষণ থেকে আমরা বলতে পারি,

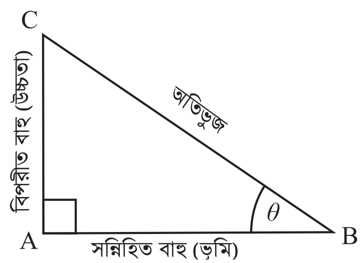
যে কোনো আকারের সমকোণী ত্রিভুজের সন্নিহিত বাহু **ও** অতিভুজের **অন্তর্বর্তী কোণের মান একই হলে ওই সকল সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলোর অনুপাত পারস্পরিকভাবে সমান হয়।** কিন্তু সন্নিহিত বাহু ও অভিভুজের অন্তর্বর্তী কোণের মান ভিন্ন হলে অনুপাত ভিন্ন হয়।

৪. নির্দিষ্ট কোণের সাপেক্ষে বিভিন্ন অনুপাতের নামকরণ

সমকোণী ত্রিভুজের একটি নির্দিষ্ট সূক্ষ্মকোণের সাপেক্ষে বাহুগুলোর অনুপাত সবসময় একই হয়। সুতরাং একটি নির্দিষ্ট কোণের জন্য বাহুগুলোকে ব্যবহার করে যত রকমের অনুপাত তৈরি করা যায় তা আমরা প্রথমে বের করে নিই। এক্ষেত্রে আমাদের আছে তিনটি বাহু: বিপরীত বাহু, সন্নিহিত বাহু ও অতিভুজ। তিনটি বাহুর যে কোনো দুটিকে ব্যবহার করে কতগুলো অনুপাত তৈরি করা যায়, তা কি তোমরা জানো? একটু চিন্তা করে দেখো, ছয়টি অনুপাত তৈরি করা যাবে। এই ছয়টি অনুপাত নিম্নরূপ।

$\frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}$	$\frac{\text{অতিভুজ}}{\text{বিপরীত বাহু}}$	$\frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}$	$\frac{\text{অতিভুজ}}{\text{সন্নিহিত বাহু}}$	$\frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{সন্নিহিত বাহু}}$	$\frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{বিপরীত বাহু}}$

এই ছয়টি অনুপাতকে গণিতবিদগণ ছয়টি নাম দিয়েছেন। যদি অতিভুজ ও ভূমি সংলগ্ন সূক্ষ্মকোণ θ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়, তবে অনুপাত ৬টি হলো $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\csc\theta$, $\sec\theta$ এবং $\cot\theta$. এই ছয়টি অনুপাত বাহুর সাথে যে সম্পর্ক তৈরি করে, তা নিম্নরূপ।



$\sin\theta = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AC}{BC}$	$\cos\theta = \frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AB}{BC}$	$\tan\theta = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{সন্নিহিত বাহু}} = \frac{AC}{AB}$
$\csc\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{বিপরীত বাহু}} = \frac{BC}{AC}$	$\sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{সন্নিহিত বাহু}} = \frac{BC}{AB}$	$\cot\theta = \frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{বিপরীত বাহু}} = \frac{AB}{AC}$

এই অনুপাতগুলোকে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (Trigonometric Ratio) বলা হয়। সাধারণত ত্রিকোণোমিতক অনুপাতগুলোর নাম সংক্ষিপ্তরূপে লেখা হয়ে থাকে। এদের পূর্ণ নাম নিম্নরূপ।

পূর্ণনাম	**sine**	**cosine**	**tangent**	**cotangent**	**secant**	**cosecant**
সংক্ষিপ্ত রূপ	sin	cos	tan	cot	sec	csc

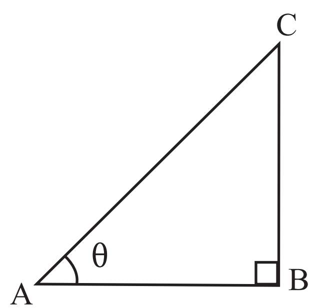
জোড়ায় কাজ

ত্রিকোণমিতিক অনুপাত পর্যবেক্ষণ করে দেখো, $\sin\theta$ ও $\cos\theta$ দিয়ে বাকি সবগুলো অনুপাতকে প্রকাশ করা যায়। নিচের ছকে ২টি উদাহারণ করে দেয়া হয়েছে। বাকি সম্পর্কগুলো তোমরা চিন্তা করে বের করে ছকে লেখো।

$\csc\theta, = \dfrac{\text{অতিভুজ}}{\text{বিপরীত বাহু}} = \dfrac{1}{\dfrac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}} = \dfrac{1}{\sin\theta}$
$\tan\theta, = \dfrac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{সন্নিহিত বাহু}} = \dfrac{\dfrac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}}{\dfrac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
$\sec\theta = ?$
$\cot\theta = ?$

৫. বিভিন্ন কোণের সাপেক্ষে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান

৫.১. 45° কোণের সাপেক্ষে



ধরো, $\triangle ABC$ একটি সমকোণী ত্রিভুজ, $\angle B = 1$ সমকোণ। এবং $\angle A = 45°$।

সুতরাং $\angle C = 45°$ [$\because$ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ]

তাহলে, $AB = BC$ [$\because$ ত্রিভুজের সমান সমান কোণের বিপরীত বাহুগুলো পরস্পর সমান]

ধরো, $AB = BC = a$

পিথাগোরাসের উপপাদ্যের সাহায্যে আমরা পাই,

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

$\therefore AC = \sqrt{2}a$

সুতরাং, $\sin 45° = \sin A = \dfrac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{a}{\sqrt{2}a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

একইভাবে, $\cos 45° = \cos A = \dfrac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{a}{\sqrt{2}a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

জোড়ায় কাজ

নিচের ছকে প্রদত্ত ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয় করো। একটি করে দেয়া আছে।

$\csc 45° = \dfrac{1}{\sin 45°} = \dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$
$\tan 45° = ?$
$\sec 45° = ?$
$\cot 45° = ?$

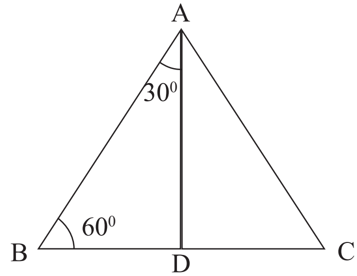
৫.২. 30° ও 60° কোণের সাপেক্ষে

চিত্রে $\triangle ABC$ একটি সমবাহু ত্রিভুজ। $\therefore \angle A = \angle B = \angle C = 60°$ [সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেকটি কোণ 60°]

A থেকে BC এর উপর AD লম্ব আঁকো। তাহলে D বিন্দু BC কে সমান দুই ভাগে ভাগ করবে, সুতরাং, BD = CD. আবার AD রেখা $\angle BAC$ কে সমান দুই ভাগে ভাগ করবে, সুতরাং $\angle BAD = \angle CAD = 30°$

ধরি, $AB = 2a$. সুতরাং, $BD = \dfrac{1}{2}.BC = \dfrac{1}{2}.2a = a$ এবং

$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a$



সুতরাং আমরা লিখতে পারি,

$\cos 30° = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}a}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$

জোড়ায় কাজ

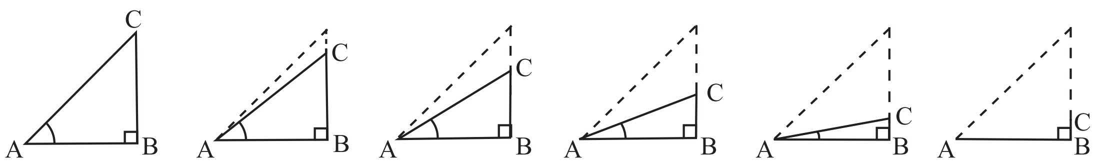
তোমাদের খাতায় নিম্নবর্ণিত ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর মান নির্ণয় করে শিক্ষককে দেখাও।

$\sin 30°$, $\sin 60°$, $\tan 30°$, $\tan 60°$, $\sec 30°$, $\sec 60°$, $\csc 30°$, $\csc 60°$, $\cot 30°$, $\cot 60°$

৫.৩. $\theta°$ কোণের সাপেক্ষে

আমরা $30°$, $45°$ ও $60°$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বের করতে শিখেছি। চলো আমরা কোণের মান $\theta°$ বা $90°$ হলে ত্রিভুজের আকৃতি কেমন হবে এবং সেক্ষেত্রে অনুপাতের মান কীভাবে বের করা যাবে সেই বিষয়গুলো নিয়ে একটু ভাবি।

ধরো, $\triangle ABC$ একটি সমকোণী ত্রিভুজ। ত্রিভুজটির $\angle A$ কোণের মান ক্রমশ ছোটো হতে থাকলে BC এর দৈর্ঘ্য ক্রমশ ছোটো হতে থাকবে। এক্ষেত্রে $\angle A$ এর মান যতই শূন্যের কাছাকাছি হবে BC এর দৈর্ঘ্য ততই শূন্যের কাছাকাছি হবে।



তখন, $\triangle ABC$ এ $\sin A = \dfrac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{BC}{AC}$ এর মানও 0 এর কাছাকাছি হবে। এক্ষেত্রে AC এর দৈর্ঘ্য প্রায় AB এর সমান হবে। তখন, $\cos A = \dfrac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{AB}{AC}$ এর মান প্রায় 1 হবে।

এই ধারণাটি আমাদেরকে $A = 0°$ এর ক্ষেত্রে $\sin A$ এবং $\cos A$ কে সংজ্ঞায়িত করতে সাহায্য করে এবং তখন আমরা লিখি

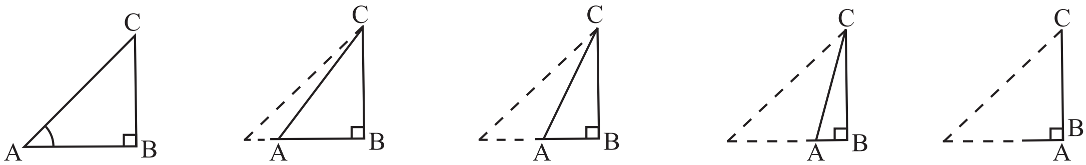
$$\sin 0° = 0 \text{ এবং } \cos 0° = 1$$

একক কাজ

$\sin 0°$ এবং $\cos 0°$ এর মান ব্যবহার করে $\tan 0°$, $\cot 0°$, $\sec 0°$ এবং $\csc 0°$ এর মান বের করো।

৫.৪. $90°$ কোণের সাপেক্ষে

আবার, $\triangle ABC$ এ $\angle A$ কোণের মান ক্রমশ বড়ো হতে থাকলে AB এর দৈর্ঘ্য ক্রমশ ছোটো হতে থাকবে।



এক্ষেত্রে $\angle A$ এর মান যতই $90°$ এর কাছাকাছি হবে AB এর দৈর্ঘ্য ততই শূন্যের কাছাকাছি হবে এবং তখন $\triangle ABC$ এ $\cos A = \dfrac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{AB}{AC}$ এর মানও শূন্যের কাছাকাছি হবে। এক্ষেত্রে AC এর দৈর্ঘ্য প্রায় BC এর সমান হবে। তখন, $\sin A = \dfrac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{BC}{AC}$ এর মান প্রায় 1 হবে।

এই ধারণাটি আমাদেরকে $A = 90°$ এর ক্ষেত্রে $\cos A$ এবং $\sin A$ কে সংজ্ঞায়িত করতে সাহায্য করে এবং তখন আমরা লিখি

$$\cos 90° = 0 \text{ এবং } \sin 90° = 1$$

একক কাজ

$\sin 90°$এবং $\cos 90°$ এর মান ব্যবহার করে $\tan 90°$, $\cot 90°$, $\sec 90°$ এবং $\csc 90°$ এর মান বের করো।

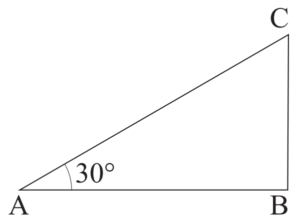
ইতোমধ্যে আমরা যেসকল কোণের অনুপাতের মান বের করেছি সেগুলো আমরা ছক আকারে নিচের মতো করে লিখতে পারি।

অনুপাত \ $\theta°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	অসংজ্ঞায়িত
cot	অসংজ্ঞায়িত	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	অসংজ্ঞায়িত
csc	অসংজ্ঞায়িত	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

উপরের সারণি ব্যবহার করে আমরা অনেক সমস্যার সমাধান করতে পারি।

সমস্যা: সমকোণী ত্রিভুজ $\triangle ABC$ এ $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 90^\circ$ এবং AB বাহুর দৈর্ঘ্য 7cm. BC ও AC বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।



সমাধান: $\triangle ABC$ হতে আমরা পাই, $\tan A = \frac{BC}{AB}$

$$\therefore \tan 30^\circ = \frac{BC}{7} \implies \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{BC}{7} \implies BC = \frac{7}{\sqrt{3}} = 4.04 \text{ cm (প্রায়)}$$

আবার, $\cos A = \frac{AB}{AC}$

$$\therefore \cos 30^\circ = \frac{7}{AC} \implies \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7}{AC} \implies AC = \frac{14}{\sqrt{3}} = 8.08 \text{ cm (প্রায়)}$$

দলগত কাজ

উপরের সমস্যাটির মতো একটি করে সমস্যা তৈরি করো এবং তোমার একজন সহপাঠীকে সমাধান করতে দাও। সকলের সমাধান শিক্ষককে দেখাও।

৬. বিভিন্ন কোণের সাপেক্ষে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয়ে ক্যালকুলেটরের ব্যবহার

সমকোণী ত্রিভুজের নিয়ম ব্যবহার করে তোমরা কিছু নির্দিষ্ট কোণের সাপেক্ষে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করেছ। যে কোনো কোণের সাপেক্ষে ত্রিকোণমিতিক কোণের অনুপাত নির্ণয় করা কঠিন। সৌভাগ্যক্রমে আমাদের হাতের কাছে বর্তমানে বৈজ্ঞানিক ক্যালকুলেটর, কম্পিউটার বা অন্যান্য ডিভাইস রয়েছে যার মাধ্যমে আমরা যে কোনো কোণের সাপেক্ষে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান বের করতে পারি। ঐসব ক্ষেত্রে আমরা কোণের মানের জন্য যে অনুপাতটি প্রয়োজন হবে তা বৈজ্ঞানিক ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে বের করে নিতে পারবো। তোমাদের অনুশীলনের জন্য নিচের কোণগুলোর মান ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে বের করো এবং সহপাঠীদের সাথে মিলিয়ে নাও।

জোড়ায় কাজ

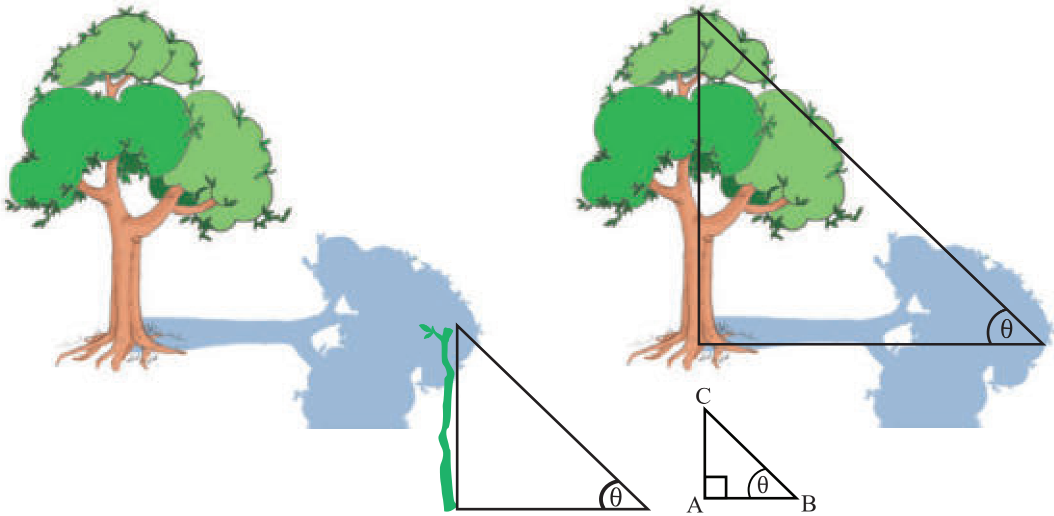
1) শ্রেণি শিক্ষকের সাহায্য নিয়ে বৈজ্ঞানিক ক্যালকুলেটর বা কম্পিউটার ব্যবহার করে $40°$, $55°$, $62°$, $83°$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করো। শিক্ষকের নির্দেশমতো আরও কিছু কোণের মান নির্ণয় করো।

2) $\sin 32°$, $\cos 36°$, $\tan 52°$, $\cot 61.5°$, $\sec 72.6°$, $\csc 15°$ অনুপাতগুলোর মান বের করো।

গণিত শিক্ষক এবার রিনা, অভি ও মিতাকে বললেন, এখন গাছে না উঠেও গাছের উচ্চতা মাপার প্রয়োজনীয় জ্ঞান তোমরা অর্জন করেছ। এসো এবার ক্লাসের সকল শিক্ষার্থী মিলে নিচের কাজটি করো।

দলগত কাজ/প্রজেক্ট

শ্রেণির সকল শিক্ষার্থী কয়েকটি দলে বিভক্ত হবে। প্রত্যেক দল তাদের সুবিধামতো বিভিন্ন দৈর্ঘ্যের একটি কাঠি বা সোজা গাছের ডাল নিবে এবং এর দৈর্ঘ্য মেপে নিবে। যখন সূর্য হেলানো অবস্থায় থাকে, তখন প্রত্যেক দল একটি গাছের পাশে যাবে। এরপর কাঠি/ডালটিকে উল্লম্বভাবে ভূমিতে স্থাপন করে এর ছায়ার দৈর্ঘ্য মেপে নিবে। একই সময়ে গাছের ছায়ার দৈর্ঘ্য মেপে নিবে।



এবার উপরের ছবির মতো খাতায় $\triangle ABC$ আঁকো যেন AC এবং AB এর অনুপাত তোমাদের কাঠির দৈর্ঘ্য এবং কাঠির ছায়ার দৈর্ঘ্য-এর অনুপাতের সমান হয়। অর্থাৎ

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\text{কাঠির দৈর্ঘ্য}}{\text{কাঠির ছায়ার দৈর্ঘ্য}}$$

ধরো, $\angle ABC = \theta$, তাহলে $\tan\theta = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\text{কাঠির দৈর্ঘ্য}}{\text{কাঠির ছায়ার দৈর্ঘ্য}}$

তোমার কাঠির দৈর্ঘ্য ও ছায়ার দৈর্ঘ্য এখানে বসিয়ে $\tan\theta$ এর মান নির্ণয় করো এবং খাতায় লিখে রাখো।

ধরো, গাছের উচ্চতা h। যেহেতু গাছের ছায়া, গাছের শীর্ষবিন্দু এবং গাছের ছায়ার প্রান্তবিন্দুর সংযোগরেখার সাথে θ কোণ তৈরি করে, সুতরাং

$$\tan\theta = \frac{h}{\text{গাছের ছায়ার দৈর্ঘ্য}}$$

অর্থাৎ,

$$h = \tan\theta \times \text{গাছের ছায়ার দৈর্ঘ্য}$$

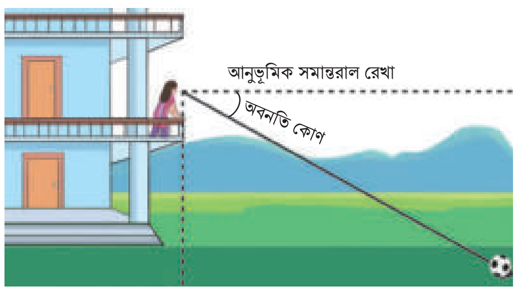
উপরে তোমাদের নির্ণয় করা $\tan\theta$-এর মান এবং গাছের ছায়ার দৈর্ঘ্য বসিয়ে h-এর মান নির্ণয় করো।

তোমরা যে সকল দল একই গাছের ছায়া মেপেছ, ওই সকল দলের h-এর মান সমান বা কাছাকাছি হবে। কোনো দলের h-এর মান অন্য দলগুলোর মানের সমান বা কাছাকাছি না হলে বুঝতে হবে ওই দলের কাজে ত্রুটি রয়েছে। ওই দলটিকে আবার কাজটি করে দেখতে হবে।

৭. উন্নতি ও অবনতি কোণ

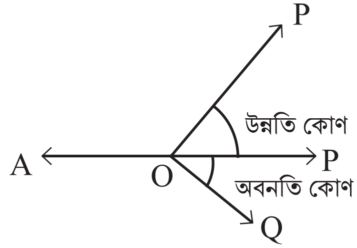
পাশের চিত্রে আমরা লক্ষ করি, একজন ব্যাক্তি গাছের অগ্রভাগ/শীর্ষভাগের দিকে তাকিয়ে আছে। ব্যাক্তির দৃষ্টিরেখা, চোখ বরাবর ভূসমান্তরাল রেখা এবং গাছের মাঝ বরাবর উর্ধ্বরেখা কল্পনা করলে আমরা একটি সমকোণী ত্রিভুজ পাব। এক্ষেত্রে ভূসমান্তরাল রেখা ও চোখের দৃষ্টি বরাবর কল্পিত রেখার মধ্যবর্তী কোণকে **উন্নতি কোণ** বলে। উন্নতি কোণ এবং কল্পিত ত্রিভুজটির যে কোনো এক বাহুর দৈর্ঘ্য জানা থাকলে আমরা ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ব্যবহার করে অন্য বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য বের করতে পারব।

এবার পাশের আরেকটি চিত্র লক্ষ করি। একটি শিশু বাসার দোতলার বারান্দা থেকে নিচে একটি বস্তুর দিকে তাকিয়ে আছে। শিশুটির দৃষ্টিরেখা, ভূমির উপর কল্পিত রেখা এবং ভূমি থেকে শিশুটির চোখ বরাবর উর্ধ্বরেখা কল্পনা করলে আমরা একটি সমকোণী ত্রিভুজ কল্পনা করতে পারি। এক্ষেত্রে চোখ বরাবর কল্পিত ভূ-সমান্তরাল রেখা এবং চোখের দৃষ্টি রেখার মধ্যবর্তী কোণকে **অবনতি কোণ** বলে। অবনতি কোণের মান জানা থাকলে কল্পিত ত্রিভুজটির কোণের মান বের করে এবং যে কোনো এক বাহুর দৈর্ঘ্যের মাধ্যমে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ব্যবহার করে অন্য বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য বের করে ফেলতে পারবো।



৭.১. একটি নির্দিষ্ট রেখার একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর সাপেক্ষে উন্নতি ও অবনতি কোণ

ধরো, AB একটি ভূ-সমান্তরাল রেখা। AB এর উপর O একটি বিন্দু। $\angle POB$ এবং $\angle BOQ$ দুটি কোণ অঙ্কন করা হলো যেন A, O, B, P ও Q একই উল্লম্ব তলে অবস্থান করে। এখানে P বিন্দুটি ভূ-সমান্তরাল AB রেখার উপরের দিকে অবস্থিত। সুতরাং AB রেখার O বিন্দুর সাপেক্ষে P বিন্দুর উন্নতি কোণ $\angle POB$ ।



আবার, Q বিন্দুটি ভূ-সমান্তরাল AB রেখার নিচের দিকে অবস্থিত। সুতরাং AB রেখার O বিন্দুর সাপেক্ষে Q বিন্দুর অবনতি কোণ $\angle QOB$ ।

৮. ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয়ের প্রয়োজনীয়তা

গণিত শিক্ষক এবার সকল শিক্ষার্থীকে বললেন যে এতক্ষণে তোমরা বুঝে গিয়েছ ত্রিকোণমিতিক জ্ঞান আমাদের কত কাজে লাগে। কোণ পরিমাপের মাধ্যমে কোনো বস্তুর অবস্থানে না গিয়েও দূরত্ব মাপা যায়। গণিতবিদদের এই আবিষ্কার ছিল একটি বিপ্লব। তাই আমরা এখানে ত্রিকোণমিতির জ্ঞান অর্জনে মনোযোগী হবো। আমরা এই জ্ঞানের মাধ্যমে অনেক কঠিন সমস্যারও সমাধান করতে পারি।

৯. দূরত্ব ও উচ্চতা বিষয়ক বাস্তব সমস্যা ও সমাধান

এ পর্যন্ত যা শিখলাম, চলো সেগুলো ব্যবহার করে আমরা কয়েকটি বাস্তব সমস্যার সমাধান করি।

সমস্যা-১: একটি মই একটি ঘরের ছাদের কিনারে হেলান দিয়ে রাখা হয়েছে। মইটি দৈর্ঘ্য 12 ফুট এবং মইটি ভূমির সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করেছে। ভূমি থেকে ছাদের উচ্চতা নির্ণয় করো।

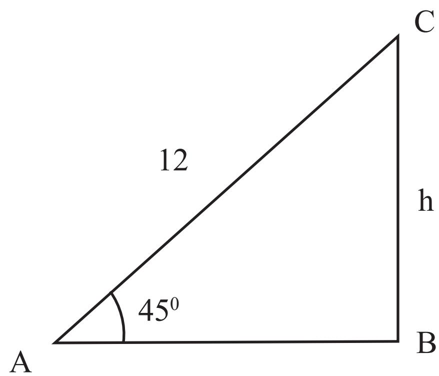
সমাধান: ধরি, AC মইটির শীর্ষবিন্দু C এবং C বিন্দুটি ছাদের কিনারে রয়েছে। সুতরাং C বিন্দু থেকে ভূমির উপর লম্ব দূরত্বই হবে ছাদের উচ্চতা। চিত্রানুযায়ী $BC = h$ (ধরি) ,ছাদের উচ্চতা এবং AC মইটির ভূমি AB এর সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করেছে। তাহলে, $\angle CAB = 45°$. সমকোণী ত্রিভুজ $\triangle ABC$ হতে পাই,

$$\sin 45° = \frac{BC}{AC} = \frac{h}{12}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{h}{12}$$

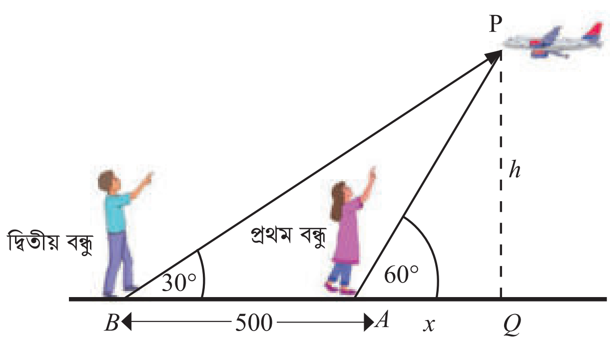
$$\Longrightarrow \sqrt{2}\, h = 12$$

$$\Longrightarrow h = \frac{12}{\sqrt{2}} = 8.49 \text{ ফুট (প্রায়)}$$



সুতরাং দেয়ালটির উচ্চতা 8.49 ফুট (প্রায়)

সমস্যা-২ দুই বন্ধু 500 মিটার দূরত্বে দাঁড়িয়ে আছে এবং তারা দেখলো একটি প্লেন তাদের উপর দিয়ে উড়ে আসছে। কোনো একটি নির্দিষ্ট সময়ে প্রথম বন্ধুর থেকে প্লেনের উন্নতি কোণ $60°$ এবং দ্বিতীয় বন্ধুর থেকে প্লেনের উন্নতি কোণ $30°$. প্লেনটি কত উচ্চতায় উড়ছিল? প্লেনটি যদি দুই সেকেন্ড পরে দ্বিতীয় বন্ধুর মাথার উপর দিয়ে অতিক্রম করে, তাহলে প্লেনের গতিবেগ কত ছিল?



সমাধান: ধরি, প্রথম বন্ধুর অবস্থান A, দ্বিতীয় বন্ধুর অবস্থান B এবং প্লেনের অবস্থান P. ধরি, P থেকে ভূ-সমতলের উপরে লম্বরেখা $PQ = h$ এবং $AQ = x$.

সমকোণী ত্রিভুজ ΔAPQ থেকে পাই, $\tan 60° = \dfrac{h}{x}$

$$\Longrightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{x}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{h}{\sqrt{3}} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

আবার সমকোণী ত্রিভুজ ΔBPQ থেকে পাই, $\tan 30° = \dfrac{h}{x + 500}$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x + 500}$$

$$\Longrightarrow x + 500 = h\sqrt{3}$$

$$\Longrightarrow \frac{h}{\sqrt{3}} + 500 = h\sqrt{3}$$ [(1) নং সমীকরণ থেকে x এর মান বসিয়ে]

$$\Longrightarrow h + 500\sqrt{3} = 3h$$

$$\Longrightarrow 2h = 500\sqrt{3}$$

$$\Longrightarrow h = 250\sqrt{3}$$

সুতরাং প্লেনটি $250\sqrt{3}$ মিটার উচ্চতা দিয়ে যাচ্ছে।

(1) নং সমীকরণ থেকে পাই, $x = \dfrac{h}{\sqrt{3}} = \dfrac{250\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 250$

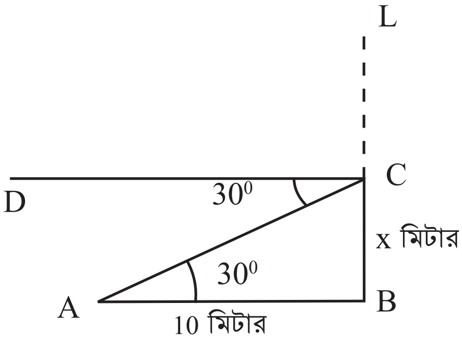
প্লেনটি 2 সেকেন্ডে $500 + 250 = 750$ মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে। সুতরাং প্লেনের গতিবেগ $750 \div 2 = 375$ মিটার/সেকেন্ড।

সমস্যা-৩

একটি খুঁটি এমনভাবে ভেঙে গেল যে তার অবিচ্ছিন্ন ভাঙা অংশটি খুঁটির গোড়া থেকে 10 মিটার দূরে মাটি স্পর্শ করে। মাটিতে খুঁটিটির স্পর্শ বিন্দুর অবনতি কোণ 30° হলে, সম্পূর্ণ খুঁটিটির দৈর্ঘ্য কত?

সমাধান:

মনে করি, খুঁটির সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য BL = h মিটার এবং খুঁটিটি BC = x মিটার উচ্চতায় ভেঙে গিয়ে বিচ্ছিন্ন না হয়ে খুঁটির গোড়া থেকে AB = 10 মিটার দূরে মাটি স্পর্শ করে। সুতরাং AC = CL



এখানে অবনতি কোণ $\angle ACD = 30°$. সুতরাং $\angle BAC = \angle ACD = 30°$ [একান্তর কোণ বলে]।

শর্তানুযায়ী, $AC = BL - BC = (h - x)$ মিটার।

সুতরাং $\triangle ABC$ হতে পাই,

$$\tan 30° = \frac{BC}{AB} = \frac{x}{10}. \quad \Longrightarrow x = 10\tan 30° = 10 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}} \text{ মিটার}$$

আবার, $\cos 30° = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{10}{h - x}$

$$\Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{10}{h - x}$$

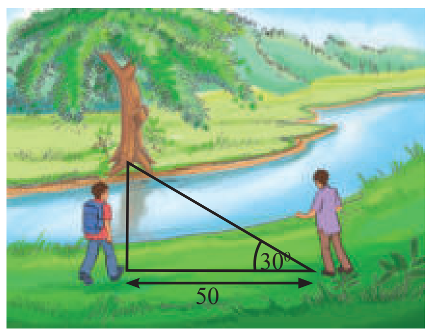
$$\Longrightarrow h - x = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

$$\Longrightarrow h = x + \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}} + \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{30}{\sqrt{3}} = 17.32 \text{ মিটার।}$$

সুতরাং সম্পূর্ণ খুঁটিটির দৈর্ঘ্য 17.32 মিটার (প্রায়)

জোড়ায় কাজ

একটি নদীর এক পাড়ে দাঁড়িয়ে তোমার থেকে আড়াআড়ি অপর পাড়ে একটি গাছকে লক্ষ করলে। তুমি নদীর পাড় দিয়ে 50 মিটার এমনভাবে হেঁটে গেলে যে ওই গাছটির সাথে তোমার বর্তমান অবস্থানের সংযোগরেখা তোমার চলার পথের সাথে 30° কোণ তৈরি করল। তোমার প্রথম অবস্থান থেকে নদীর ওপারের গাছের দূরত্ব কত?



প্রজেক্ট (দলগত কাজ)

শিক্ষকের নির্দেশনা মোতাবেক তোমরা কয়েকটি দলে ভাগ হয়ে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের জ্ঞান কাজে লাগিয়ে তোমাদের শিক্ষা প্রতিষ্ঠানের আঙিনা বা মাঠ থেকে প্রতিষ্ঠানের সর্বোচ্চ স্থাপনার উচ্চতা নির্ণয় করো। তোমরা উচ্চতা কীভাবে নির্ণয় করলে তা ছবিসহ একটি পোস্টার পেপারে উপস্থাপন করো।

অনুশীলনী

১. $\cos\theta = \frac{3}{4}$ হলে, θ কোণের অন্যান্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো নির্ণয় করো।

২. $12 \cot\theta = 7$ হলে $\cos\theta$ ও $\csc\theta$ এর মান বের করো।

৩. ΔABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B = 90°$, $AC = 12$ সেমি, $BC = 13$ সেমি এবং $\angle BAC = \theta$ হলে, $\sin\theta$, $\sec\theta$ ও $\tan\theta$ এর মান বের করো।

৪. $\theta = 30°$ হলে, দেখাও যে, (i) $\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta}$, (ii) $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$.

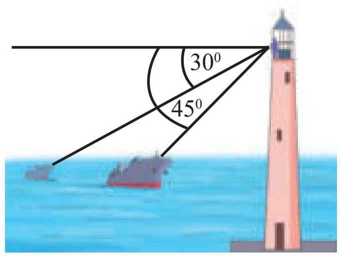
৫. একটি গাছের পাদদেশ হতে 15 মিটার দূরে ভূ-তলের কোনো বিন্দুতে গাছের শীর্ষবিন্দুর উন্নতি কোণ $60°$ হলে, গাছটির উচ্চতা নির্ণয় করো।

৬. 6 মিটার দৈর্ঘ্যের একটি মই ভূমির সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে ছাদ স্পর্শ করে আছে। ছাদের উচ্চতা নির্ণয় করো।

৭. ভূতলের কোনো একটি স্থান থেকে একটি মিনারের শীর্ষবিন্দুর উন্নতি কোণ $60°$ । ওই স্থান থেকে 20 মিটার পিছিয়ে গেলে মিনারের উন্নতি কোণ হয় $45°$। মিনারটির উচ্চতা নির্ণয় করো।

৮. একটি নদীর তীরে দাড়িয়ে একজন লোক দেখলো যে, ঠিক সোজাসুজি নদীর অপর তীরে 100 মিটার উঁচু একটি টাওয়ারের শীর্ষের উন্নতি কোণ $45°$। লোকটি টাওয়ার বরাবর নৌকা পথে যাত্রা শুরু করল। কিন্তু পানির স্রোতের কারণে নৌকাটি টাওয়ার থেকে 10 মিটার দূরে তীরে পৌঁছাল। লোকটির যাত্রা স্থান থেকে গন্তব্য স্থানের দূরত্ব নির্ণয় করো।

৯. সাগরের তীরে একটি টাওয়ারের উপর থেকে একজন লোক সাগর পর্যবেক্ষণের সময় দেখলো যে একটি জাহাজ বন্দরের দিকে আসছে। তখন জাহাজটির অবনতি কোণ ছিল $30°$. কিছুক্ষণ পরে লোকটি দেখলো জাহাজটির অবনতি কোণ $45°$. যদি টাওয়ারের উচ্চতা 50 মিটার হয়, তবে এই সময়ে জাহাজটি কত দূরত্ব অতিক্রম করেছে?



১০. তোমার প্রতিষ্ঠানের অফিস ভবন থেকে 10 মিটার দূরে ওই ভবনের উন্নতি কোণ $45°$ এবং 20 মিটার দূর থেকে ওই ভবনের উন্নতি কোণ $\theta°$ হলে, $\sin\theta$ ও $\cos\theta$-এর মান নির্ণয় করো।