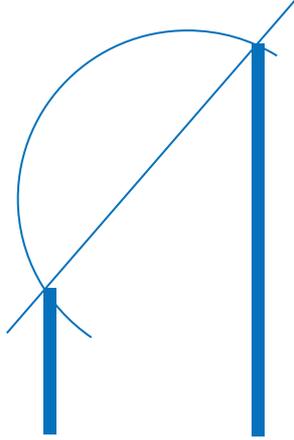


## বাস্তব সমস্যা সমাধানে সহসমীকরণ

এই অভিজ্ঞতায় শিখতে পারবে-

- দুই চলকের একঘাত সমীকরণ
- এক চলকের দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান
- লেখচিত্রের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান
- দুই চলকের একঘাত ও এক চলকের দ্বিঘাত সহসমীকরণ সমাধান



## বাস্তব সমস্যা সমাধানে সহসমীকরণ

গাণিতিক সমস্যা সমাধানের জন্য বীজগণিতের অন্যতম গুরুত্বপূর্ণ বিষয় হলো সমীকরণ। তোমরা ইতোমধ্যে পূর্বের শ্রেণিগুলোতে সরল সমীকরণের ধারণা পেয়েছ। এক চলকবিশিষ্ট সরল সমীকরণগুলো সমাধানের কৌশলও তোমাদের জানা। তাছাড়া দৈনন্দিন জীবনে যে নানাবিধ বাস্তবভিত্তিক সমস্যা তোমাকে মোকাবেলা করতে হয় তারও কিছু কিছু সরল সমীকরণ গঠন করে সমাধান করতে পার। তাই না? যে সমীকরণগুলো তোমাকে গঠন করতে হয়, তার সবগুলোই কি এক চলকবিশিষ্ট হয়? নাকি কোনো কোনো ক্ষেত্রে দুই বা আরও বেশি চলকবিশিষ্ট হতে পারে। এসো আমরা কিছু বাস্তব সমস্যা সমাধানের মাধ্যমে বিষয়টি বোঝার চেষ্টা করি।

দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ গঠন ও সমাধান

নিচের ছক ৫.১ এর সমস্যাগুলোর সমীকরণ গঠন করে সমাধান করার চেষ্টা করো:

ছকঃ ৫.১		
বাস্তব সমস্যা	সমীকরণ	সমাধান
১. দেয়াশলাইয়ের 20টি কাঠি দিয়ে কয়টি আলাদা আলাদা বর্গ তৈরি করা যাবে?		
২. লিলি ও তার ভাইয়ের বয়সের অনুপাত 3 : 4; দুজনের মোট বয়স 21 বছর হলে, লিলির বয়স কত?		
৩. সেতু দোকান থেকে 18 টাকায় দুটি ইরেজার ও একটি পেন্সিল ক্রয় করে। কোনটির মূল্য কত দোকানদার তাকে বলেনি। তোমরা বলো তো কোনটির মূল্য কত হতে পারে?		

## পর্যবেক্ষণ

- ক) (i) নং সমস্যাটি সমাধানের জন্য  চলকবিশিষ্ট সমীকরণ গঠন করেছি এবং চলকের  টি মান পেয়েছি, যা দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।
- খ) (ii) নং সমস্যাটি সমাধানের জন্য  চলকবিশিষ্ট সমীকরণ গঠন করেছি এবং চলকের  টি মান পেয়েছি, যা দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।
- গ) (iii) নং সমস্যাটি সমাধানের জন্য  চলকবিশিষ্ট সমীকরণ গঠন করেছি এবং চলকের  টি মান পেয়েছি, যার সবগুলো দ্বারাই সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। এক্ষেত্রে চলকের নির্দিষ্ট কোনো মান বের করতে পারি নাই।

## সেতুর সমস্যার সমাধান

উপরের ছক ৫.১ এর ৩ নম্বর সমস্যাটি সেতু নিজেও সমাধানের জন্য খুব চেষ্টা করছে। তোমাদের মতো সেও প্রথমে একটি ইরেজারের মূল্য  $x$  টাকা এবং একটি পেন্সিলের মূল্য  $y$  টাকা ধরে নেয়। তারপর সমস্যাটি বিশ্লেষণ করে দুই চলকবিশিষ্ট নিচের সমীকরণটি পেল।

$$2x + y = 18 \dots \dots (i)$$

এবার ছক ৫.২ এর মতো একটি ছক তৈরি করে  $x$  ও  $y$  এর বিভিন্ন মান নিয়ে প্রাপ্ত সমীকরণটির বামপক্ষ ও ডানপক্ষের সত্যতা যাচাই করো।

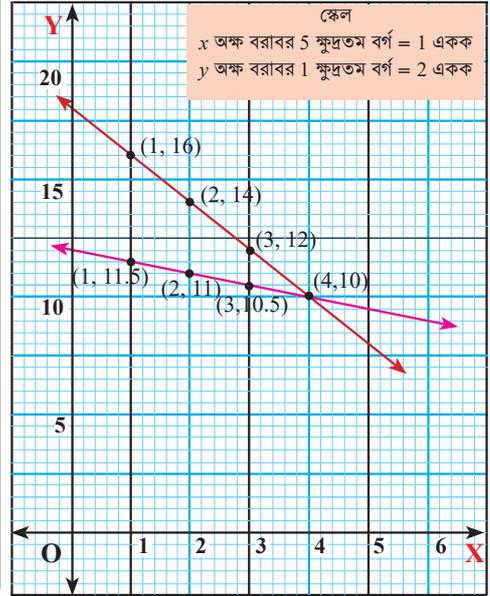
ছক-৫.২			
$x$ এর মান	$y$ এর মান	বামপক্ষ $(2x + y)$ এর মান	ডানপক্ষ
1	16	$(2 \times 1) + 16 = 18$	18
2	14	$(2 \times 2) + 14 = 18$	18
3	12	$(2 \times 3) + 12 = 18$	18
4	10	$(2 \times 4) + 10 = 18$	18
...	...	...	18



দেখা যাচ্ছে,  $x$  ও  $y$  এর অসংখ্য মানের জন্য সমীকরণটির বামপক্ষ ও ডানপক্ষ সত্য হচ্ছে। অর্থাৎ সমীকরণটির অসংখ্য সমাধান আছে। সমাধানগুলো হলো:  $(1, 16)$ ,  $(2, 14)$ ,  $(3, 12)$ ,  $(4, 10)$ , ...। এর অর্থ হলো- একটি ইরেজার ও একটি পেন্সিলের ক্রয়মূল্য অনেকভাবেই হতে পারে। কিন্তু তা কী করে সম্ভব? সমস্যাটি আরও গভীরভাবে বিশ্লেষণের জন্য সে ওই দোকান থেকে পুনরায় একটি ইরেজার ও দুটি পেন্সিল ক্রয় করে। এবার দোকানদার তার কাছ থেকে মোট 24 টাকা নেয়। সেতু পূর্বের মতো একটি ইরেজারের মূল্য  $x$  টাকা এবং

একটি পেন্সিলের মূল্য  $y$  টাকা ধরে সমস্যাটি বিশ্লেষণ করে দুই চলকবিশিষ্ট  $x + 2y = 24$ .....(ii) সমীকরণটি পেলো। তারপর নিচের ছকটি (ছক-৫.৩) তৈরি করে  $x$  ও  $y$  এর বিভিন্ন মান নিয়ে প্রাপ্ত সমীকরণটির বামপক্ষ ও ডানপক্ষের সত্যতা যাচাই করে।

ছক-৫.৩			
$x$ এর মান	$y$ এর মান	বামপক্ষ ( $2x + y$ ) এর মান	ডানপক্ষ
1	11.5	$1 + 2(11.5)$	24
2	11	$2 + 2(11)$	24
3	10.5	$3 + 2(10.5)$	24
4	10	$4 + 2(10)$	24
...	...	...	24



এক্ষেত্রেও দেখা যাচ্ছে,  $x$  ও  $y$  এর অসংখ্য মানের জন্য সমীকরণটির বামপক্ষ ও ডানপক্ষ সত্য হচ্ছে। অর্থাৎ সমীকরণটির অসংখ্য সমাধান আছে এবং সমাধানগুলো হলো: (1, 11.5), (2, 11), (3, 10.5), (4, 10), ... এর মানে, এবারও একটি ইরেজার ও একটি পেন্সিলের ক্রয়মূল্য অনেকগুলো হতে পারে।

সেতু এ ব্যাপারে এবার তার বিষয় শিক্ষকের সাথে পরামর্শ করে। বিষয় শিক্ষক সমীকরণ দুটিকে একত্রে জোট হিসেবে বিবেচনা করে সেতুকে সমাধান করতে বললেন। তিনি বললেন, তুমি তো পূর্বের শ্রেণিতে জেনেছ, এই ধরনের সমীকরণ একেকটি সরলরেখার সমীকরণ এবং ছক কাগজে বিন্দু বসিয়ে এই ধরনের সরলরেখা আঁকা যায়। তাই তুমি চাইলে সমীকরণ দুটিকে দুটি সরলরেখার মাধ্যমে একটি ছক কাগজে উপস্থাপন করে দেখতে পার। হয়তো, সরলরেখা দুটি কোনো একটি বিন্দুতে ছেদ করতে পারে। যদি কোনো একটি বিন্দুতে সরলরেখা দুটি ছেদ করে, তবে জানবে ওই বিন্দুর  $x$  ও  $y$  এর মানই হবে তোমার কাঙ্ক্ষিত সমাধান।

বিষয় শিক্ষকের পরামর্শ অনুসারে সেতু প্রথমে ছক-৫.৩ এর মতো করে একটি ছক কাগজে সরলরেখা দুটি অঙ্কন করে। অঙ্কন অনুসারে সরলরেখা দুটি (4, 10) বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে। ছেদ বিন্দুতে,  $x = 4$  এবং  $y = 10$ । সেতু বুঝতে পারে, একটি ইরেজারের মূল্য 4 টাকা এবং একটি পেন্সিলের মূল্য 10 টাকা।

তোমরা নিশ্চয়ই বুঝতে পারলে, কোনো বাস্তবভিত্তিক ঘটনা এভাবে দুটি চলক ও দুটি এক ঘাতবিশিষ্ট সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়। এধরনের সহসমীকরণকে দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ (Simultaneous linear equations in two variables) বলা হয় এবং ওই সরল সহসমীকরণের ছেদ বিন্দুকে ওই সরল সহসমীকরণের সমাধান (Solution of the simultaneous linear equations) বলে।

**জোড়ায় কাজ:**

- ক) মনে করো, তোমাদের আয়তাকৃতির শ্রেণিকক্ষটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ জানা নেই। শিক্ষক বললেন, শ্রেণিকক্ষটির প্রস্থের দ্বিগুণ, দৈর্ঘ্য অপেক্ষা 10 মিটার বেশি এবং পরিসীমা 100 মিটার। তোমাদের কাজ হলো, শ্রেণিকক্ষটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থকে দুটি চলক ধরে দুটি সমীকরণ গঠন করা এবং সমীকরণ দুটি সমাধান করে শ্রেণিকক্ষটির মেঝের ক্ষেত্রফল বের করা। [ ছক কাগজে সরলরেখা ঐকে সমাধান করতে পারবে]
- খ) এবার শ্রেণিকক্ষটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ হাতে-কলমে মেপে মেঝের ক্ষেত্রফল বের করো। তারপর ‘ক’ থেকে প্রাপ্ত ক্ষেত্রফলের সত্যতা যাচাই করো।

**রাফি ও সোনিয়ার সমস্যা ও সমাধান**

**সমস্যা:** সেতুর বন্ধু রাফি 28 টাকায় 2 প্যাকেট আলপিন ও 3টি কলম এবং সোনিয়া একই দরে ওই দোকান থেকে 56 টাকায় 4 প্যাকেট আলপিন ও 6টি কলম ক্রয় করে। এক্ষেত্রেও রাফি বা সোনিয়া কেউ প্রতি প্যাকেট আলপিন বা প্রতিটি কলমের মূল্য কত তা জানে না। সেতুর মতো আমরা কি পারি না রাফি ও সোনিয়ার সমস্যাটি সমাধান করে দিতে? তাহলে চলো, চেষ্টা করে দেখি:

**সমাধান:** ধরো, 1প্যাকেট আলপিনের দাম  $x$  টাকা এবং 1টি কলমের দাম  $y$  টাকা।

∴ নির্ণেয় সমীকরণ দুইটি হবে,

$$2x + 3y = 28 \dots\dots\dots(i)$$

এবং  $4x + 6y = 56 \dots\dots\dots(ii)$



(i) ও (ii) নং সমীকরণ দুটিকে তোমরা কোন ধরনের সমীকরণ বলবে? যুক্তিসহ নিচের ফাঁকা ঘরে লেখো।

এবার ছক কাগজে সমীকরণ দুটির লেখচিত্র অঙ্কন করে তাদের ছেদবিন্দু খুঁজে বের করো।

প্রথমে (i) ও (ii) নং সমীকরণ থেকে দুইটি সরলরেখা অঙ্কনের জন্য কয়েকটি করে বিন্দু নির্ণয় করো।

(i) নং সমীকরণ হতে পাই,

$x$	$y = \frac{28 - 2x}{3}$	$(x, y)$
2		
5	6	(5, 6)
14		

(ii) নং সমীকরণ হতে পাই,

$x$	$y = \frac{56 - 4x}{6}$	$(x, y)$
2	8	(2, 8)
8		
11		

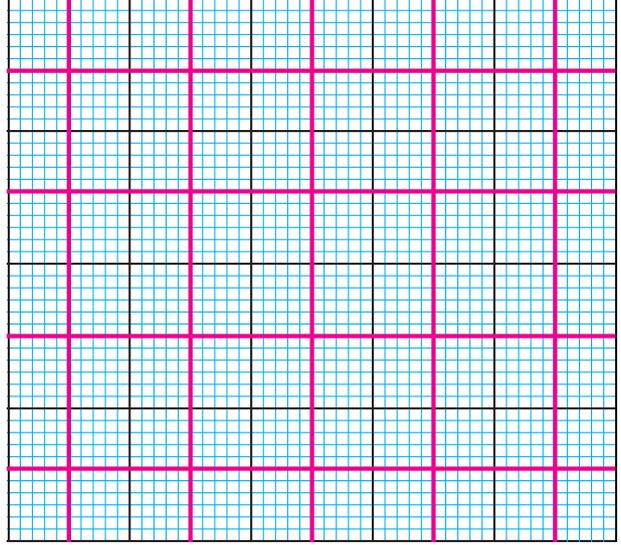
(i) নং সমীকরণ থেকে পাই  $(x, y) = ( \quad , \quad ), (5, 6), ( \quad , \quad ), ( \quad , \quad )$

এবং (ii) নং সমীকরণ থেকে পাই  $(x, y) = (2, 8), ( \quad , \quad ), ( \quad , \quad ), ( \quad , \quad )$

পাশের ছক কাগজে (i) ও (ii) নং সমীকরণ থেকে প্রাপ্ত বিন্দুগুলো স্থপন করে (তোমার সুবিধামতো স্কেল নিয়ে নাও) সরলরেখা দুটি অঙ্কন করো।

কী দেখতে পেলো? সরলরেখা দুইটির একটি অপরটির উপর সমাপতিত হয়েছে? অর্থাৎ (i) নং সরলরেখার উপরস্থ প্রতিটি বিন্দুই (ii) নং সরলরেখার উপর আছে।

সুতরাং প্রত্যেকটি স্থানাঙ্কই (i) ও (ii) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে। 1 প্যাকেট আলপিনের দাম 5 টাকা হলে 1টি কলমের দাম 6 টাকা হবে। আবার 1 প্যাকেট আলপিনের দাম 2 টাকা হলে 1টি কলমের দাম 8 টাকা হবে এবং এভাবে চলতে থাকবে। এক্ষেত্রে (i) ও (ii) নং সমীকরণ দুইটির কয়টি সমাধান পেয়েছ?



### একক কাজ:

খুঁশি 30 টাকায় 2টি পোস্টার পেপার ও 3টি সাইন পেন ক্রয় করে। দোলা ওই একই দোকান থেকে একই মূল্যের 4টি পোস্টার পেপার ও 6টি সাইন পেন 50 টাকায় ক্রয় করে।

ক) সমীকরণ গঠন করে লেখচিত্র অঙ্কন করো।

খ) লেখচিত্র থেকে সমীকরণ দুইটির সাধারণ সমাধান পাওয়া যায় কিনা ব্যাখ্যা করো।

গ) একটি পোস্টার পেপার ও একটি সাইন পেনের ক্রয়মূল্য সম্পর্কে তোমার মতামত ব্যক্ত করো।

### দুইটি সরল সহসমীকরণের সমাধান যোগ্যতা (সমঞ্জস/অসমঞ্জস) (Consistency of two simultaneous linear equations)

দুইটি সরল সহসমীকরণের সমাধান একটি হতে পারে, অসংখ্য হতে পারে আবার কোনো সমাধান নাও থাকতে পারে। সুতরাং আমরা যদি আগে থেকেই বের করতে পারি সমাধান আছে কি না তা হলে সুবিধা হয় না? এসো আমরা বিভিন্ন পর্যবেক্ষণের মাধ্যমে সমাধান থাকার শর্তগুলো বের করার চেষ্টা করি।

### জ্যামিতিক পর্যবেক্ষণ

দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ লেখচিত্রের মাধ্যমে সমাধান করে নিম্নলিখিত শর্তগুলো পাওয়া গেল।

- ক) যখন দুইটি সরলরেখা একটি বিন্দুতে ছেদ করে, তখন সমীকরণ দুইটি সমাধান করা যায় এবং একটি মাত্র সাধারণ সমাধান থাকে।
- খ) যখন দুইটি সরলরেখা সমাপতিত হয়, তখন একটি মাত্র সরলরেখাই হয় এবং সমীকরণ দুইটির অসংখ্য সাধারণ সমাধান থাকে।
- গ) যখন দুইটি সরলরেখা অসমাপতিত কিন্তু পরস্পর সমান্তরাল হয়, তখন সমীকরণ দুইটির কোনো সাধারণ সমাধান থাকে না।



### বীজগাণিতিক পর্যবেক্ষণ

সাধারণভাবে,  $a_1x + b_1y = c_1$ ,  $a_2x + b_2y = c_2$  সহসমীকরণ দুইটির  $x$ ,  $y$  এর সহগদ্বয় এবং ধ্রুবক পদ তুলনা করেও দুইটি সরল সহসমীকরণের সমাধান যোগ্যতা (সমঞ্জস/অসমঞ্জস) নির্ধারণ করা যায় (ছক-৫.৪ দ্রষ্টব্য)।

ছক- ৫.৪				
দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ	অনুপাতগুলোর তুলনা	লেখচিত্রে সমীকরণ দুইটির অবস্থান	সমঞ্জস (Consistent) অসমঞ্জস (Inconsistent)	বীজগাণিতিক সিদ্ধান্ত
$a_1x + b_1y = c_1$ $a_2x + b_2y = c_2$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখা	সমঞ্জস (Consistent)	একটি মাত্র সাধারণ সমাধান আছে
	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	দুইটি সমাপতিত সরলরেখা	সমঞ্জস (Consistent)	অসংখ্য সাধারণ সমাধান আছে
	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	দুইটি অসমাপতিত সরলরেখা কিন্তু পরস্পর সমান্তরাল	অসমঞ্জস (Inconsistent)	কোনো সাধারণ সমাধান নেই

**জোড়ায় কাজ:** নিচে দুই চলকবিশিষ্ট একটি করে সরল সমীকরণ দেওয়া হলো। প্রত্যেক শর্তের জন্য দুই চলকবিশিষ্ট একটি করে সরল সমীকরণ লেখো।:

প্রদত্ত সরল সমীকরণ	শর্ত		
	একটি মাত্র সমাধান আছে	অসংখ্য সমাধান আছে	কোনো সমাধান নেই
$2x + 3y = 7$			
$y - 4x = 2$			
$-2x + 5y = 8$			
$3x - \frac{6}{5}y = 2$			

### মাথা খাটানো



- $p$  এর কোন মানের জন্য  $3x - 4y = 1$  এবং  $9x + py = 2$  এর একটি মাত্র সমাধান থাকবে।
- $r$  এর কোন মানের জন্য  $rx + 2y = 5$  এবং  $(r + 1)x + 3y = 2$  সমীকরণ দুইটির কোনো সমাধান পাওয়া যাবে না।
- $k$  এর কোন মানের জন্য  $kx + 6y = k$  এবং  $(k - 1)x + 4y = 5 - k$  সমীকরণ দুইটির অসংখ্য সমাধান থাকবে?
- $a$  ও  $b$  এর কোন মানের জন্য  $3x - (a + 1)y = 2b - 1$  এবং  $5x + (1 - 2a)y = 3b$  সমীকরণ দুইটির অসংখ্য সমাধান থাকবে?

### দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ সমাধানের পদ্ধতি

আমরা প্রধানত জ্যামিতিক ও বীজগাণিতিক এই দুই পদ্ধতিতেই দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ সমাধান করতে পারি। চलो, সমাধানের পদ্ধতিগুলো জেনে নিই।

জ্যামিতিক পদ্ধতি (Geometric Method)	বীজগাণিতিক পদ্ধতি (Algebraic Methods)
লৈখিক পদ্ধতি (Graphical Method)	• প্রতিস্থাপন পদ্ধতি (Substitution Method)
	• অপনয়ন পদ্ধতি (Elimination Method)
	• আড়গুণন পদ্ধতি (Cross Multiplication Method)

## লৈখিক পদ্ধতিতে সমাধান (Solving by Graphical Method)

জ্যামিতিক উপায়ে লেখচিত্র অঙ্কন করে কীভাবে দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ সমাধান করা যায়, এরই মধ্যে তোমাদের সেই অভিজ্ঞতা হয়েছে। তোমরা ইতোমধ্যেই দেখেছ, সরল সহসমীকরণের প্রত্যেকটির লেখ একেকটি সরলরেখা। আর সরলরেখাটির প্রত্যেকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক সংশ্লিষ্ট সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে। তাই কোনো সরল সমীকরণের লেখ নির্দিষ্ট করতে দুই বা ততোধিক বিন্দুর স্থানাঙ্ক আবশ্যিক। চলো নিচের দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ দুইটিকে লৈখিক পদ্ধতিতে সমাধান করে সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ সমাধান বের করার চেষ্টা করি।

**উদাহরণ:** নিচের দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ দুইটিকে লৈখিক পদ্ধতিতে সমাধান করো।

$$4x - y = 5 \dots\dots\dots(i)$$

$$7x - 4y = 2 \dots\dots\dots(ii)$$

নির্দেশনা



**সমাধান:** (i) ও (ii) নং সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য তিনটি করে বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

(i) নং সমীকরণ হতে পাই  $y = 4x - 5$

$x$	2		0
$y = 4x - 5$		7	-5

আবার, (ii) নং সমীকরণ হতে পাই  $y = \frac{7x - 2}{4}$

$x$		-2	6
$y = \frac{7x - 2}{4}$	3		

সমাধান যোগ্যতা যাচাই করে নিই:  $\frac{4}{7} \neq \frac{1}{4}$

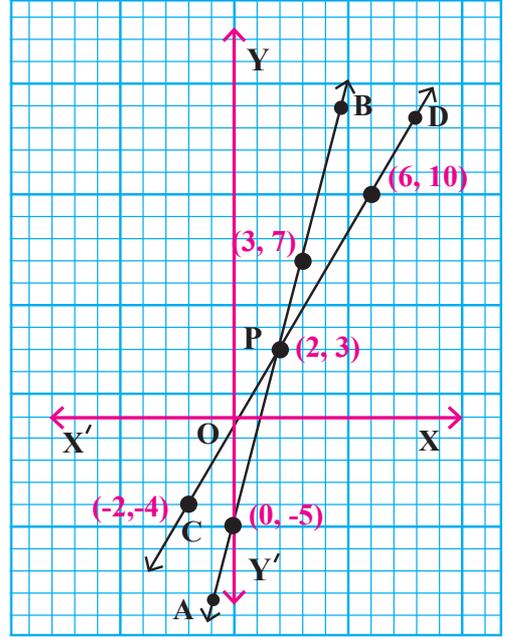
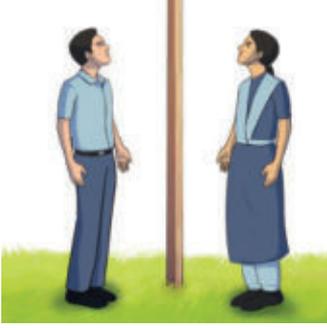
∴ সমীকরণজোট সমঞ্জস (consistent) এবং এর একটি মাত্র সাধারণ সমাধান আছে।



বিন্দুগুলো পাশের গ্রাফ কাগজে বসিয়ে সরলরেখা দুটি আঁকো।

লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে, (i) নং [AB সরলরেখা] ও (ii) নং [CD সরলরেখা] সমীকরণদ্বয় একটি সাধারণ বিন্দুতে ছেদ করেছে। হিসাব করে দেখি ছেদ বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক (2, 3)।

(i) ও (ii) নং সমীকরণদ্বয়ের একটি মাত্র সাধারণ সমাধান  $(x, y) = (2, 3)$



### একক কাজ:

নিচের প্রতিজোড়া সমীকরণের মধ্যে যেগুলো সমাধানযোগ্য তাদের লেখচিত্র ঐকে সমাধান করো এবং অসংখ্য সমাধানের ক্ষেত্রে কমপক্ষে তিনটি সমাধান লেখো:

- i)  $4x - 3y = 6$       ii)  $4x + 3y = 20$       iii)  $\frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 23$       iv)  $3x - \frac{2}{y} = 5$   
 $4y - 5x = -7$        $8x + 6y = 40$        $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 22$        $x + \frac{4}{y} = 4$

### প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাধান (Solving by Substitution Method)

এই পদ্ধতিতে আমরা নিচের ধাপগুলো অনুসরণ করে দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণকে সমাধান করতে পারি:

ধাপ-১ : যে কোনো সমীকরণ থেকে চলক দুটির একটির মান অপরটির মাধ্যমে প্রকাশ করা

ধাপ-২ : ধাপ-১ থেকে প্রাপ্ত চলকের মানটি অপর সমীকরণে স্থাপন করে এক চলকবিশিষ্ট সমীকরণ তৈরি ও সমাধান করা।

ধাপ-৩ : নির্ণীত সমাধান প্রদত্ত সমীকরণ দুটির যে কোনো একটিতে বসিয়ে অপর চলকের মান নির্ণয় করা

## নির্দেশনা



**উদাহরণ-১:** নিচের দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণের সমাধান যোগ্যতা যাচাই করো। সমাধান যোগ্য হলে প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাধান করো।

$$x + 3y = 16 \dots\dots\dots(i)$$

$$2x - y = 4 \dots\dots\dots(ii)$$

সমাধান যোগ্যতা যাচাই করে নিই:  $\frac{1}{2} \neq -\frac{3}{1}$

$\therefore$  সমীকরণজোটটি সমঞ্জস (consistent) এবং এর একটি মাত্র সাধারণ সমাধান আছে।

ধাপ - ১	ধাপ - ২	ধাপ - ৩	সমাধান
(ii) নং সমীকরণ হতে পাই, $2x - y = 4$ $\therefore y = 2x - 4 \dots(iii)$	$y$ এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই, $x + 3(2x - 4) = 16$ বা, $x + 6x - 12 = 16$ বা, $7x = 16 + 12$ বা, $7x = 28$ $\therefore x = 4$	(iii) নং এ $x = 4$ বসিয়ে পাই, $y = 2 \cdot 4 - 4$ বা, $y = 8 - 4$ $\therefore y = 4$	$x = 4$ এবং $y = 4$ নির্ণয়ে সমাধান $(x, y) = (4, 4)$

## একক কাজ:

নিচের প্রতিজোড়া সমীকরণের মধ্যে যেগুলো সমাধানযোগ্য সেগুলো প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাধান করো এবং সমাধানে পাওয়া চলকদ্বয়ের মান সমীকরণকে সিদ্ধ করছে কিনা যাচাই করো।

i)  $2x + 3y = 32$     ii)  $8x + 5y - 11 = 0$     iii)  $\frac{2}{x} + \frac{5}{y} = 1$     iv)  $x + y = p + q$

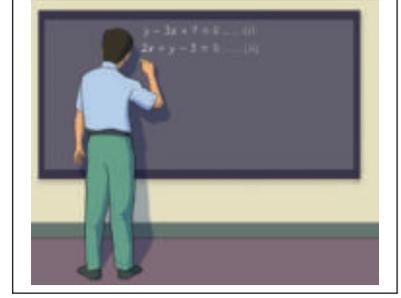
$11y - 9x = 3$      $3x - 4y - 10 = 0$      $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{19}{20}$      $px - qy = p^2 - q^2$

**উদাহরণ-২:** রাফি বোর্ডে  $y - 3x + 7 = 0$  এবং  $2x + y - 3 = 0$  সমীকরণ দুটি লিখল।



আমি চেষ্টা করে দেখি অন্য কোনোভাবে সমীকরণজোটের সাধারণ সমাধান বের করা যায় কি না।

সেতু



রাফির লেখা সমীকরণ দুটি হলো :

$$y - 3x + 7 = 0 \dots\dots(i)$$

$$2x + y - 3 = 0 \dots\dots(ii)$$

সমাধানের জন্য নিচের ধাপগুলো অনুসরণ করি।

নির্দেশনা



সমাধান যোগ্যতা যাচাই করে নিই:  $-\frac{3}{2} \neq \frac{1}{1}$   
 $\therefore$  সমীকরণজোটটি সমঞ্জস এবং এর একটি মাত্র সাধারণ সমাধান আছে।

ধাপ - ১	ধাপ - ২	ধাপ - ৩	সমাধান
(i) নং সমীকরণ হতে পাই, $y - 3x + 7 = 0$ $\therefore y = 3x - 7 \dots(iii)$ আবার (ii) নং সমীকরণ হতে পাই, $2x + y - 3 = 0$ $\therefore y = -2x + 3 \dots(iv)$	(iii) নং সমীকরণ হতে $y$ এর মান (iv) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই। $3x - 7 = -2x + 3$ বা, $3x + 2x = 3 + 7$ বা, $5x = 10 \therefore x = 2$	(iii) নং এ $x = 2$ বসিয়ে পাই, $y = 3 \cdot 2 - 7$ বা, $y = 6 - 7$ $\therefore y = -1$	$x = 2$ এবং $y = -1$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (2, -1)$

**জোড়ায় কাজ:**

সহপাঠীদের সাথে আলোচনা করে নিচের সহসমীকরণগুলো প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাধান করো :

i)  $4x - 3y = 16$     ii)  $2x + y - 8 = 0$     iii)  $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$     iv)  $x + \frac{2}{y} = 7$   
 $5y + 6x = 62$      $3x - 2y - 5 = 0$      $2x + 4y = 11$      $2x - \frac{6}{y} = 9$

## অপনয়ন পদ্ধতিতে সমাধান (Solving by Elimination Method)

অপনয়ন পদ্ধতিতে আমরা নিচের ধাপগুলো অনুসরণ করে দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণকে সমাধান করতে পারি:

ধাপ-১ : সুবিধামতো একটি সমীকরণকে বা উভয় সমীকরণকে এরূপ সংখ্যা দিয়ে গুণ করতে হবে যেন গুণনের পর উভয় সমীকরণের যে কোনো একটি চলকের সহগের পরমমান সমান হয়।

ধাপ-২ : প্রয়োজনমতো সমীকরণ দুটিকে যোগ বা বিয়োগ করে সহগ সমানকৃত চলকটি অপসারিত করা। তারপর সমাধান করে বিদ্যমান চলকটির মান বের করা

ধাপ-৩ : নির্ণীত সমাধান প্রদত্ত সমীকরণ দুটির যে কোনো একটিতে বসিয়ে অপর চলকের মান নির্ণয় করা

গণিত ক্লাসে শিক্ষক বললেন, চলো আজ একটা মজার খেলা খেলি। খেলাটি হলো-একজনের তৈরি গাণিতিক ধাঁধা বা সমস্যার উত্তর অপরজনকে দিতে হবে। শর্ত হলো- ধাঁধা বা সমস্যাটি এমন হবে যা সমাধানের জন্য দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ গঠন করতেই হবে। তারপর সমীকরণজোড়ের যে কোনো একটি চলক অপসারণ করে সমাধান করতে হবে। শিক্ষকের কথা শুনে, সেতু রাফিকে নিচের সমস্যাটি সমাধান করতে বলল।

কোনো ভগ্নাংশের লব  $x$  এবং হর  $y$ । লবের সাথে 7 যোগ করলে ভগ্নাংশটির মান 2 হয়। আবার হর হতে 2 বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটির মান 1 হয়। ভগ্নাংশটি কত?

রাফি প্রথমে সমস্যাটি ভালোভাবে পড়ে নেয়। তারপর নিচের মতো করে দুটি সমীকরণ গঠন করে:

ধাপ - ১	ধাপ - ২	ধাপ - ৩	সমাধান
$\frac{x+7}{y} = 2$ বা, $x+7 = 2y$ $\therefore x - 2y = -7 \dots (i)$ এবং $\frac{x}{y-2} = 1$ বা, $x = y - 2$ $\therefore x - y = -2 \dots (ii)$	(i) নং ও (ii) নং সমীকরণের চলক $x$ এর সহগ সমান এবং একই চিহ্নযুক্ত। তাই সে সমীকরণ (i) থেকে সমীকরণ (ii) বিয়োগ করে। অর্থাৎ $\begin{array}{r} x - 2y = -7 \\ x - y = -2 \\ \hline -y = -5 \\ \therefore y = 5 \end{array}$	এবার (ii) নং এ $y = 5$ বসিয়ে পায়, $x - 5 = -2$ বা, $x = -2 + 5$ $\therefore x = 3$	$x = 3$ এবং $y = 5$ নির্ণেয় ভগ্নাংশ $= \frac{3}{5}$

এইভাবে দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ জোড়ের যে কোনো একটি চলক অপনয়ন বা অপসারণ করে অন্য চলকটির মান বের করার পদ্ধতিকে আমরা **অপনয়ন পদ্ধতি** বলতে পারি।

**একক কাজ:**

নিচের সহসমীকরণগুলো অপনয়ন পদ্ধতিতে সমাধান করো :

$$\text{i) } 2x - 5y = 3 \quad \text{ii) } 6x - y - 1 = 0 \quad \text{iii) } \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 8 \quad \text{iv) } ax + by = c$$

$$x + 3y = 1 \quad 3x + 2y - 13 = 0 \quad \frac{5x}{4} - 3y = -3 \quad a^2x + b^2y = c^2$$

**আড়গুণন পদ্ধতিতে সমাধান (Solving by Cross Multiplication Method)**

আড়গুণন পদ্ধতিতে কীভাবে দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণের সাধারণ সমাধান নির্ণয় করা হয়, সে সম্পর্কে জানার চেষ্টা করি।

প্রথমে নিচের সমীকরণ দুটি বিবেচনা করি :

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \dots\dots\dots \text{(i)}$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \dots\dots\dots \text{(ii)}$$

প্রথমে (i) ও (ii) নং সহসমীকরণ থেকে চলক  $x$  এর মান নির্ণয় করতে চাই। তাই (i) ও (ii) নং সমীকরণের চলক  $y$  কে অপনয়ন বা অপসারণ করতে হবে। আর এর জন্য সমীকরণ (i) কে  $b_2$  এবং সমীকরণ (ii) কে  $b_1$  দ্বারা গুণ করি :

$$a_1b_2x + b_1b_2y + b_2c_1 = 0 \dots\dots\dots \text{(iii)}$$

$$a_2b_1x + b_1b_2y + b_1c_2 = 0 \dots\dots\dots \text{(iv)}$$

এখন, (iii) নং থেকে (iv) নং বিয়োগ করে পাই,

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x + b_2c_1 - b_1c_2 = 0$$

$$\text{বা, } (a_1b_2 - a_2b_1)x = b_1c_2 - b_2c_1$$

$$\therefore \frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \dots\dots\dots \text{(v)}$$

আবার, (i) ও (ii) নং সমীকরণজোট থেকে চলক  $y$  এর মান নির্ণয় করতে চাই। তাই (i) ও (ii) নং সমীকরণের চলক  $x$  কে অপনয়ন বা অপসারণ করতে হবে। আর এর জন্য সমীকরণ (i) কে  $a_2$  এবং সমীকরণ (ii) কে  $a_1$  দ্বারা গুণ করি :

$$a_1a_2x + a_2b_1y + c_1a_2 = 0 \dots\dots\dots \text{(vi)}$$

$$a_1a_2x + a_1b_2y + c_2a_1 = 0 \dots\dots\dots \text{(vii)}$$

এখন, (vi) নং থেকে (vii) নং বিয়োগ করে পাই,

$$(a_2b_1 - a_1b_2)y + c_1a_2 - c_2a_1 = 0$$

$$\text{বা, } (a_2b_1 - a_1b_2)y = c_2a_1 - c_1a_2$$

$$\text{বা, } -(a_1b_2 - a_2b_1)y = -(c_1a_2 - c_2a_1)$$

$$\therefore \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \dots\dots\dots \text{(viii)}$$

সমীকরণ (v) ও (viii) নং তুলনা করে পাই,

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \dots\dots\dots \text{(ix)}$$

$x$  ও  $y$  এর এরূপ সম্পর্ক থেকে এদের মান নির্ণয়ের কৌশলকে **আড়গুণন পদ্ধতি** (Cross Multiplication Method) বা বজ্রগুণন পদ্ধতি বলা হয়।

$x$  ও  $y$  এর উপরের সম্পর্ক থেকে আমরা লিখতে পারি,

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \therefore x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$\text{এবং } \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \therefore y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$\text{প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সমাধান : } (x, y) = \left( \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \right)$$

সহসমীকরণদ্বয়

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

উপরের সহসমীকরণ থেকে আমরা সরাসরি লিখতে পারি,

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

আড়গুণনে  $x$  ও  $y$   
চলকের সম্পর্ক?



উপরের সম্পর্কটি পাওয়ার জন্য আমরা নিচের কৌশলটি ব্যবহার করতে পারি।

সমীকরণ	$x$ ও $y$ এর মধ্যে সম্পর্ক	মনে রাখার কৌশল
$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ $a_2x + b_2y + c_2 = 0$	$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1}$ $= \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$	<p>লাল তীর চিহ্নের সংখ্যার গুণন থেকে নীল তীর চিহ্নের সংখ্যার গুণন বিয়োগ করেতে হবে।</p>

### সমস্যা: গাছের চারা রোপণ

প্রতি বছরই সেতুদের স্কুলের সামনের খোলা মাঠে বৃক্ষমেলা বসে। একদিন স্কুল ছুটির পর সেতু ও তার বন্ধু রহিম মেলায় গেল। সেতু তাদের বাড়ির চারপাশের ফাঁকা জায়গায় গাছের চারা রোপণ করার জন্য একজন চারা বিক্রেতার নিকট থেকে 310 টাকা দিয়ে 4টি পেয়ারা গাছের চারা এবং 5টি লেবু গাছের চারা ক্রয় করল এবং রহিম একই দরে 3টি পেয়ারা গাছের চারা এবং 2টি লেবু গাছের চারা ক্রয় করে বিক্রেতাকে মোট 180 টাকা দিলো। একটি পেয়ারা গাছের চারা ও একটি লেবু গাছের চারার দাম কত?



**সমাধান:** ধরো, 1টি পেয়ারা গাছের চারার দাম  $x$  টাকা এবং 1টি লেবু গাছের চারার দাম  $y$  টাকা।

শর্তানুসারে প্রথমে আমরা সহসমীকরণ গঠন করি :

$$4x + 5y = 310 \dots\dots\dots(i)$$

$$3x + 2y = 180 \dots\dots\dots(ii)$$

আমরা আড়গুণন পদ্ধতিতে সমীকরণজোড়ের সাধারণ সমাধান নির্ণয় করতে চাই। সেজন্য (i) ও (ii) নং সমীকরণদ্বয়কে নিম্নরূপে লিখতে পারি :

$$4x + 5y - 310 = 0$$

$$3x + 2y - 180 = 0$$

সমীকরণদ্বয়কে  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

### নির্দেশনা



সমাধান যোগ্যতা যাচাই করে নিই:  $\frac{4}{3} \neq \frac{5}{2}$   
 $\therefore$  সমীকরণজোড়টি সমঞ্জস এবং এর একটি মাত্র সাধারণ সমাধান আছে।

এর সাথে তুলনা করে পাই,

$$a_1 = 4, \quad b_1 = 5, \quad c_1 = -310, \quad a_2 = 3, \quad b_2 = 2, \quad c_2 = -180$$

সুতরাং আড়গুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করে পাই,

$$\text{বা, } \frac{x}{5 \times (-180) - 2 \times (-310)} = \frac{y}{(-310) \times 3 - (-180) \times 4} = \frac{1}{4 \times 2 - 3 \times 5}$$

$$\text{বা, } \frac{x}{-900 + 620} = \frac{y}{-930 + 720} = \frac{1}{8 - 15}$$

$$\text{বা, } \frac{x}{-280} = \frac{y}{-210} = \frac{1}{-7}$$

$$\text{বা, } \frac{x}{40} = \frac{y}{30} = \frac{1}{1} \quad [-7 \text{ দ্বারা গুণ করে}]$$

$$\text{এখন, } \frac{x}{40} = \frac{1}{1} \quad \text{আবার, } \frac{y}{30} = \frac{1}{1}$$

$$\therefore x = 40 \quad \therefore y = 30$$

$\therefore$  1টি পেয়ারা গাছের চারার দাম 40 টাকা এবং 1টি লেবু গাছের চারার দাম 30 টাকা।

### একক কাজ:

ক) প্রদত্ত সহসমীকরণগুলো আড়গুণন বা বজ্রগুণন পদ্ধতিতে সমাধান করো :

$$\text{i) } 5x - 2y = 32$$

$$\text{ii) } 7x - 3y - 31 = 0$$

$$\text{iii) } x + 5y = 36$$

$$4x - y = 28$$

$$9x - 5y - 41 = 0$$

$$\frac{x + y}{x - y} = \frac{5}{3}$$

খ) সেতুর পড়ার ঘরটির মেঝে আয়তাকৃতি। ঘরটির মেঝের দৈর্ঘ্য 2 মিটার এবং প্রস্থ 3 মিটার বৃদ্ধি করলে ক্ষেত্রফল 75 বর্গমিটার বৃদ্ধি পায়। কিন্তু দৈর্ঘ্য 2 মিটার হ্রাস এবং প্রস্থ 3 মিটার বৃদ্ধি করলে ক্ষেত্রফল 15 বর্গমিটার বৃদ্ধি পায়। সহসমীকরণ গঠন ও আড়গুণন পদ্ধতিতে সমাধান করে সেতুর পড়ার ঘরটির মেঝের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

### দলগত প্রজেক্ট

শিক্ষক ক্লাসের সকল শিক্ষার্থীকে 3টি দলে ভাগ করবেন। এবার 3টি কাগজ নিয়ে প্রত্যেক কাগজে 2টি করে সরল সহসমীকরণ লিখবেন। প্রত্যেক কাগজে একই সরল সহসমীকরণ লিখবেন। এবার কাগজ 3টি ভাগ করে কাগজের উপরে একটিতে প্রতিস্থাপন পদ্ধতি, একটিতে অপনয়ন পদ্ধতি এবং একটিতে আড়গুণন পদ্ধতি লিখে

প্রত্যেক দলকে লটারির মাধ্যমে একটি করে কাগজ দিবেন। প্রত্যেক দল নিচের কাজগুলো সম্পন্ন করবে।

১. সহসমীকরণের সমঞ্জসতা যাচাই করবে।
২. কাগজের উপরে লেখা পদ্ধতিতে সরল সহসমীকরণ সমাধান করবে।
৩. গ্রাফ কাগজে সরলরেখা দুটি ঐকে ছেদ বিন্দু বের করে সমাধানের সত্যতা যাচাই করবে।
৪. সকল কার্যক্রম একটি পোস্টার পেপারে উপস্থাপন করে শিক্ষকের নির্দেশনা মোতাবেক প্রদর্শন করবে।



### দুই চলকের একঘাত ও দ্বিঘাত সহসমীকরণ

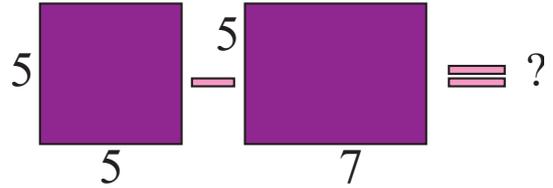
তোমরা ইতোমধ্যে দুইচলকের একঘাত সমীকরণের সাথে পরিচিত হয়েছো। যেমন  $2x - 3y = 6$ , এই সমীকরণটিতে দুইটি চলক  $x$  ও  $y$  যাদের প্রত্যেকের ঘাত এক। একারণে এটি দুইচলকের একঘাতবিশিষ্ট একটি সমীকরণ। এখন আমরা এক চলকের দ্বিঘাত সমীকরণের আলোচনা করব।

### এক চলকের দ্বিঘাত সমীকরণ

চলো একটি মজার কুইজ দিয়ে শুরু করি। নিচের বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল থেকে আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বিয়োগ করলে বিয়োগফল কত হবে তা হিসাব করে লিখো।

নিশ্চয় লিখতে পারছো,

$$5^2 - 7 \times 5 = -10$$



লক্ষ করো, বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য ও আয়তক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য পরস্পর সমান বা 5।

এই ক্ষেত্র দুইটির বাহুর দৈর্ঘ্য যদি জানা না থাকত, তাহলে কি আমরা এত সহজেই বিয়োগফল বলে দিতে পারতাম?

সেক্ষেত্রে, আমরা চলকের আশ্রয় নিতাম। মনে করতে পারতাম উভয় ক্ষেত্রের সমান বাহুর দৈর্ঘ্য  $x$ ।

তাহলে উপর্যুক্ত সমীকরণটি দাঁড়াত,

$$x^2 - 7x = -10$$

তোমরা কি বলতে পার, এটি কোন ধরনের সমীকরণ? সমীকরণটিতে কেবল একটি চলক  $x$  ব্যবহৃত হয়েছে। তাই চলকের ভিত্তিতে এটি একটি একচলকবিশিষ্ট সমীকরণ। আবার সমীকরণটিতে চলক  $x$  এর সর্বোচ্চ ঘাত 2। একারণে, ঘাতের ভিত্তিতে এটি একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। সুতরাং, দুইটি বৈশিষ্ট্যকে একত্রে করে বলা হয়, এটি একটি এক চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ।



আমরা খুব সহজেই  $x^2 - 7x + 10 = 0$  সমীকরণটির উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে ফেলেছি। কিন্তু সমীকরণটিতে যদি  $x^2 - 7x - 10 = 0$  হতো, তাহলে কি এত সহজেই মধ্যপদ বিভূতি করে সমাধান করা যেত? না, এত সহজেই সমাধান করা যেত না (চেষ্টা করে দেখো)। সকল দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান করার একটি বিশেষ পদ্ধতি রয়েছে। চলো আমরা দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান করার সেই পদ্ধতিটি শিখে ফেলি।

## সাধারণ পদ্ধতিতে সমাধান

দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ হলো:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

যেখানে  $a, b, c$  বাস্তব সংখ্যা এবং  $a \neq 0$

উভয় পক্ষকে  $4a$  দ্বারা গুণ করি,

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

$$\text{বা, } (2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2 - b^2 + 4ac = 0$$

$$\text{বা, } (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

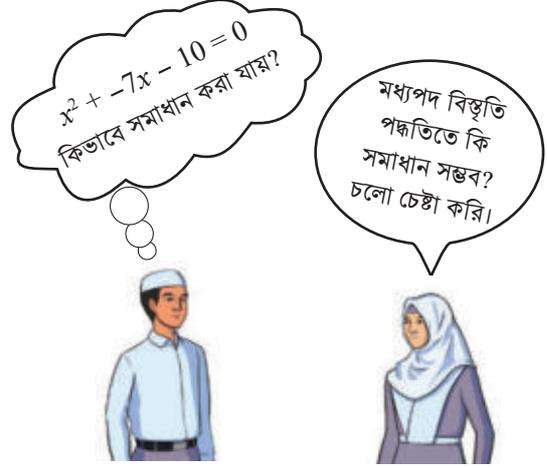
$$\text{বা, } 2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\text{বা, } 2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

অতএব, সমীকরণটির দুইটি সমাধান বা  $x$  এর দুইটি মান পাওয়া যায় যথা:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{এবং} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



$b^2 - 4ac$  কে দ্বিঘাত সমীকরণ  $ax^2 + bx + c = 0$  এর **নিশ্চায়ক** (discriminant) বলা হয়। এই নিশ্চায়ক মূলদ্বয়ের প্রকৃতি নির্ধারণ করে।

- $b^2 - 4ac = 0$  হলে সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব ও পরস্পর সমান এবং মূল দুইটি উভয়ই  $x = -\frac{b}{2a}$
- $b^2 - 4ac > 0$  এবং পূর্ণবর্গ সংখ্যা হলে সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান ও মূলদ হয়।
- $b^2 - 4ac > 0$  এবং পূর্ণবর্গ সংখ্যা না হলে সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান ও অমূলদ হয়।
- $b^2 - 4ac < 0$  হলে সমীকরণটির কোনো বাস্তব মূল নেই।

## জোড়ায় কাজ

নিচে কয়েকটি সমীকরণ দেওয়া হলো। সমীকরণগুলোর মূলের প্রকৃতি নির্ণয় করে নিচের তালিকাটি পূরণ করো।

ক্রমিক	সমীকরণ	নিশ্চায়ক $b^2 - 4ac$	নিশ্চায়কের প্রকৃতি	মূলের প্রকৃতি
1	$2x^2 - 10x + 9 = 0$	$= (-10)^2 - 4.2.9$ $= 100 - 72$ $= 28$	$b^2 - 4ac > 0$ এবং পূর্ণবর্গ সংখ্যা নয়।	বাস্তব, অসমান ও অমূলদ।
2	$7x^2 - x + 2 = 0$			
3	$-5 + 7x + 6x^2 = 0$			
4	$-2x + 5 - 3x^2 = 0$			
5	$-14x + x^2 + 49 = 0$			
6		$= (-5)^2 - 4.3.4$ $=$		

আমরা আগেই উল্লেখ করেছি, মধ্যপদ বিস্তৃতির মাধ্যমে  $x^2 - 7x - 10 = 0$  সমীকরণটির সমাধান করা সহজ নয়। চলো এখন সাধারণ পদ্ধতি ব্যবহার করে এই সমীকরণটি সমাধান করি।

**সমস্যা:**  $x^2 - 7x - 10 = 0$  সমীকরণটির সমাধান করো।

**সমাধান:**  $x^2 - 7x - 10 = 0$  কে  $ax^2 + bx + c = 0$  সমীকরণের সাথে তুলনা করলে পাই,  
 $a = 1, b = -7, c = -10$ .

তাহলে,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4.1(-10)}}{2.1} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 40}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{7 \pm \sqrt{89}}{2}$$

সুতরাং, সমীকরণের মূল দুইটি:  $x_1 = \frac{7 + \sqrt{89}}{2}$  এবং  $x_2 = \frac{7 - \sqrt{89}}{2}$

## একক কাজ

তোমার শেখা পদ্ধতিকে কাজে লাগিয়ে নিচের সমীকরণগুলো সমাধান করো। মূলগুলো খালি ঘরে লেখো।



ক্রমিক নং	সমীকরণ	সমীকরণের মূল
1	$3x^2 - 5x + 1 = 0$	
2	$12x^2 - 11x + 2 = 0$	
3	$5x^2 - 8x + 4 = 0$	

## লেখচিত্রের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান

দ্বিঘাত সমীকরণ  $ax^2 + bx + c = 0$  কে লেখচিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপন করতে হলে  $x$  এর মানের সাথে  $y$  এর মানও প্রয়োজন। ধরি,  $y = ax^2 + bx + c$ . তাহলে  $x$  এর যেসব মানের জন্য  $y = 0$  হবে অর্থাৎ, লেখচিত্রটি  $x$ -অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করবে,  $x$  এর ওই সব মানই  $ax^2 + bx + c = 0$  সমীকরণের সমাধান।

**উদাহরণ:**  $2x^2 - 3x - 2 = 0$  সমীকরণটির লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করো।

**সমাধান:** মনে করি,  $y = 2x^2 - 3x - 2$

$x$  এর কয়েকটি মানের জন্য  $y$  এর মান নির্ণয় করি।

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
y	12	7	3	0	-2	-3	-3	-2	0	3	7	12	18

গ্রাফ কাগজে ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্যকে উভয় অক্ষে একক ধরে উপরের বিন্দুগুলো স্থাপন করে লেখচিত্রটি অঙ্কন করি।

লক্ষ করা যাচ্ছে যে, লেখচিত্রটি  $x$ -অক্ষকে  $(-\frac{1}{2}, 0)$   $(2, 0)$  বিন্দুতে ছেদ করে। এই বিন্দু দুইটির  $x$  এর মানই প্রদত্ত সমীকরণের সমাধান।

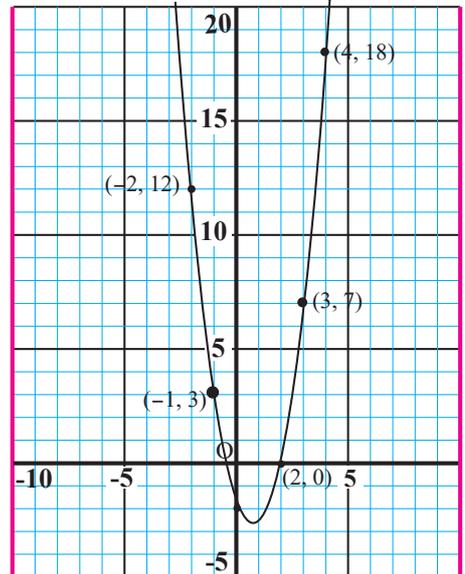
সুতরাং, নির্ণেয় সমাধান:  $x_1 = -\frac{1}{2}$  এবং  $x_2 = 2$



## একক কাজ

সূত্র প্রয়োগ করে  $2x^2 - 3x - 2 = 0$  সমীকরণটির সমাধান করো এবং

লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করো। তোমার প্রাপ্ত উভয় সমাধান একই হয় কিনা তা যাচাই করো।



## একটি বাস্তব সমস্যা ও সমাধান

**সমস্যা:** সেতুর চাচা হাসান সাহেব একজন ব্যবসায়ী। তিনি একটি পাইকারি দোকান থেকে 50000 টাকা দিয়ে কয়েক প্যাকেট কলম কিনলেন। অন্য একটি দোকানে প্রতি প্যাকেট কলম 2টাকা করে কম পাওয়ায় আগের সমান টাকার কলম কিনলেন এবং তিনি 25 প্যাকেট কলম বেশি পেলেন। হাসান সাহেব প্রথমে কত প্যাকেট কলম কিনেছিলেন এবং প্রতি প্যাকেট কলমের দাম কত ছিল? প্রতি প্যাকেট কলম কত টাকায় বিক্রি করলে তাঁর মোটের উপর 12000 টাকা লাভ হবে?

**সমাধান:** তোমরা কি সমস্যাটিকে সমীকরণের মাধ্যমে উপস্থাপন করতে পারবে? এসো আমি একটু সাহায্য করি। ধরো, হাসান সাহেব প্রথমে  $x$  প্যাকেট কলম কিনেছিলেন। এবার নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর লিখো।

প্রথমে প্রতি প্যাকেট কলমের দাম পড়েছে =  টাকা

পরে প্রতি প্যাকেট কলমের দাম পড়েছে =  টাকা

পরে কলম ক্রয় করেছিলেন =  প্যাকেট

পরে ক্রয়কৃত কলমের মোট ক্রয়মূল্য =  টাকা

পরে ক্রয় করা কলমের মোট দাম =  টাকা

শর্তানুযায়ী,

$$\left(\frac{50000}{x} - 2\right)(x + 25) = 50000$$

$$\text{বা, } (50000 - 2x)(x + 25) = 50000x$$

$$\text{বা, } 50000x - 2x^2 + 50000 \times 25 - 50x = 50000x$$

$$\text{বা, } -2x^2 + 50000 \times 25 - 50x = 0$$

$$\text{বা, } 2x^2 + 50x - 50000 \times 25 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 + 25x - 25000 \times 25 = 0$$

একটি এক চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ। সুতরাং সাধারণ পদ্ধতিতে সমাধান করলে পাওয়া যাবে,

$$x = \frac{-25 \pm \sqrt{(25)^2 - 4 \times (-25000) \times 25}}{2} = \frac{-25 \pm \sqrt{(25)^2 + 4 \times 25000 \times 25}}{2}$$

$$= \frac{-25 \pm 25\sqrt{1 + 4000}}{2}$$

$$= \frac{-25 + 25\sqrt{1 + 4000}}{2} \text{ [ধনাত্মক মান নিয়ে, যেহেতু প্যাকেটের সংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না]}$$

$$= \frac{25 \times (\sqrt{4000} - 1)}{2}$$

$$\approx 778 \text{ (প্রায়)}$$

### দুই চলকের একঘাত ও দ্বিঘাত সহসমীকরণ সমাধান

বাস্তবে অনেক সমস্যা আছে যাকে দুই চলকের একঘাত এবং দ্বিঘাত সহসমীকরণে রূপান্তর করে সমাধান করা সহজ হয়। গাণিতিক সমস্যাকে কীভাবে সমাধান করা হয় প্রথমে তার একটি উদাহরণ দেওয়া হলো।

**উদাহরণ:** নিচের দুই চলকের একঘাত ও দ্বিঘাত একজোড়া সহসমীকরণের সমাধান করো।

$$y = 2x^2 - x - 3$$

$$x - 5y + 13 = 0$$

**সমাধান:** মনে করি,  $y = 2x^2 - x - 3$  ..... (1)

আবার দেওয়া আছে,  $x - 5y + 13 = 0$

$$\text{বা, } x + 13 = 5y$$

$$\text{বা, } 5y = x + 13$$

$$\text{বা, } y = \frac{x + 13}{5} \text{ .....(2)}$$

(1) ও (2) নং হতে লিখা যায়,

$$2x^2 - x - 3 = \frac{x + 13}{5}$$

$$\text{বা, } 10x^2 - 5x - 15 = x + 13$$

$$\text{বা, } 10x^2 - 5x - 15 - x - 13 = 0$$

$$\text{বা, } 10x^2 - 6x - 28 = 0$$

$$\text{বা, } 2(5x^2 - 3x - 14) = 0$$

$$\text{বা, } 5x^2 - 3x - 14 = 0$$

$$\text{বা, } 5x^2 - 10x + 7x - 14 = 0$$

$$\text{বা, } 5x(x - 2) + 7(x - 2) = 0$$

$$\text{বা, } (x - 2)(5x + 7) = 0$$

সুতরাং,  $x - 2 = 0$  অথবা  $5x + 7 = 0$

$$\text{বা, } x = 2 \text{ অথবা } x = -\frac{7}{5}$$

$x = 2$  হলে, (2) নং সমীকরণ হতে পাই,

$$y = \frac{2 + 13}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

আবার,  $x = -\frac{7}{5}$  হলে, (2) নং সমীকরণ হতে পাই,

$$y = \frac{-\frac{7}{5} + 13}{5} = \frac{-7 + 65}{5} = \frac{58}{5} = \frac{58}{25}$$

নির্ণেয় সমাধান:  $(x, y) = (2, 3), \left(-\frac{7}{5}, \frac{58}{25}\right)$

### লেখচিত্রের মাধ্যমে সমাধান

দেওয়া সহসমীকরণদ্বয়

$$y = 2x^2 - x - 3$$

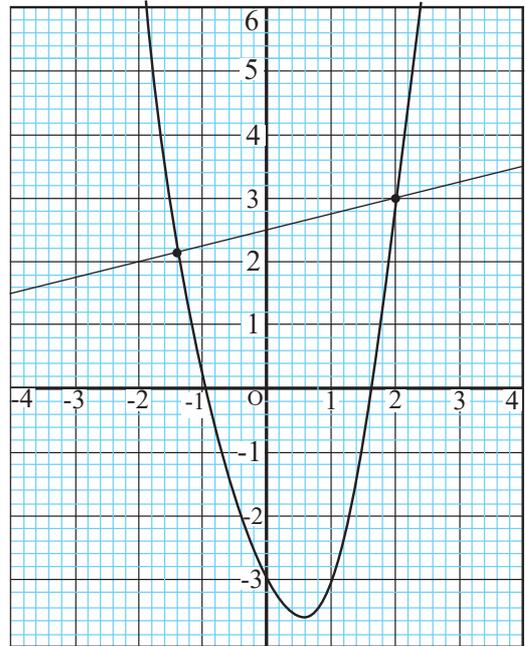
$$x - 5y + 13 = 0$$

এখানে,  $x - 5y + 13 = 0$  একটি সরল সমীকরণ এবং

$y = 2x^2 - x - 3$  একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। তোমরা সরল সমীকরণ এবং দ্বিঘাত সমীকরণের লেখচিত্র আঁকা শিখেছ। তোমাদের অভিজ্ঞতাকে কাজে লাগিয়ে একই সমতলে সমীকরণদ্বয়ের লেখচিত্র আঁকো। সমীকরণদ্বয়ের লেখচিত্র পাশে দেওয়া হলো। তোমার আঁকা লেখচিত্রের সাথে পাশের দেওয়া লেখচিত্র মিলিয়ে নাও। লেখচিত্র থেকে লক্ষ করা যাচ্ছে যে, সমীকরণ

দুইটি পরস্পর  $(2, 3)$  ও  $\left(-\frac{7}{5}, \frac{58}{25}\right)$  বিন্দুতে ছেদ করেছে। উভয় পদ্ধতিতে একই সমাধান পাওয়া গেছে।

সুতরাং, সমাধানের সঠিকতা যাচাই করা গেল।



## দলগত প্রজেক্ট: চাহিদা মোতাবেক সরবরাহের পরিমাণ নির্ণয়

কোনো একটি কারখানাকে লাভজনক করে তুলতে হলে ভোক্তার চাহিদার সমান পণ্য উৎপন্ন করতে হয়। এই অবস্থাকে বাজার সাম্যতা (market equilibrium) বলে। কোনো একটি কারখানার উৎপাদিত পণ্যের চাহিদা মোতাবেক সরবরাহের সমীকরণ নিচে দেওয়া হলো।

$$q = p^2 - 2p + 44 \quad \dots \dots \dots (i)$$

$$p - q + 2 = 0 \quad \dots \dots \dots (ii)$$

যেখানে,  $p$  পণ্যের দাম এবং  $q$  পরিমাণ। বাজার সাম্যতার জন্য  $p$  এবং  $q$  এর মান বের করো।

### কাজের নির্দেশনা:

- ১। একটি পোস্টার পেপার, একটি গ্রাফ কাগজ এবং অন্যান্য প্রয়োজনীয় উপাদান সংগ্রহ করো।
- ২। বীজগাণিতিক পদ্ধতিতে সমাধান করো। সমাধানের ধাপগুলোর বর্ণনা লেখো।
- ৩। (i) ও (ii) নং সমীকরণ দুইটির গ্রাফ গ্রাফ কাগজে একই দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক অক্ষে উপস্থাপন করো। প্রাপ্ত গ্রাফ দুইটির ছেদবিন্দু নির্ণয় করো।
- ৪। তোমাদের দলের কাজের পদ্ধতি এবং প্রাপ্ত ফলাফলগুলো একটি পোস্টার পেপারে কিংবা পুরাতন ক্যালেন্ডারের পিছনে সাজিয়ে উপস্থাপন করো। প্রয়োজনে শিক্ষকের সাথে পরামর্শ করো।
- ৫। তোমাদের দলের ফলাফলের স্বপক্ষে যুক্তি পোস্টার পেপারে লিখে রাখো।
- ৬। সমাধান মিলিয়ে নাও। [ $p = 1, q = 3$  অথবা  $p = 2, q = 4$ ]



### জোড়ায় কাজ

শ্রেণি শিক্ষকের নির্দেশ মোতাবেক কয়েকটি দলে বিভক্ত হয়ে নিচের সমীকরণজোট বীজগাণিতিক পদ্ধতিতে সমাধান করো। অতপর লেখচিত্রের মাধ্যমে সমীকরণজোট সমাধান করে প্রমাণ করো যে, উভয়ভাবে প্রাপ্ত সমাধান একই। তোমার দলের কার্যক্রম পোষ্টারে লিখে ক্লাসে উপস্থাপন করো।

$$y = x^2 - x - 2$$

$$x - 2y + 5 = 0$$

## অনুশীলনী

1. সহসমীকরণ  $a_1x + b_1y = c_1$ ,  $a_2x + b_2y = c_2$  এর সাথে তুলনা করে নিচের ছকের খালি ঘরগুলো পূরণ করো।

ক্রমিক নং	সমীকরণজোড়	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	অনুপাতগুলোর তুলনা	লেখচিত্রে অবস্থান	সমঞ্জস/ অসমঞ্জস	বীজগাণিতিক সিদ্ধান্ত
(i)	$x + 3y = 1$ $2x + 6y = 2$							
(ii)	$2x - 5y = 3$ $x + 3y = 1$							
(iii)	$2x - 4y = 7$ $x - 3y = -2$							
(iv)	$-\frac{1}{2}x - y = 0$ $x - 2y = 1$							

2. নিচের প্রতিজোড়া সমীকরণগুলোর মধ্যে যে গুলো সমাধানযোগ্য তাদের লেখচিত্র ঐকে সমাধান করো এবং অসংখ্য সমাধানের ক্ষেত্রে কমপক্ষে তিনটি সমাধান লেখো।

i)  $2x + y = 8$       ii)  $2x + 5y = -14$       iii)  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 8$       iv)  $-7x + 8y = 9$   
 $2x - 2y = 5$        $4x - 5y = 17$        $\frac{5x}{4} - 3y = -3$        $5x - 4y = -3$

3. প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাধান করো:

i)  $7x - 3y = 31$       ii)  $(x + 2)(y - 3) = y(x - 1)$       iii)  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$   
 $9x - 5y = 41$        $5x - 11y - 8 = 0$        $ax + by = a^2 + b^2$

iv)  $\frac{x}{14} + \frac{y}{18} = 1$       v)  $p(x + y) = q(x - y) = 2pq$   
 $\frac{x + y}{2} + \frac{3x + 5y}{2} = 2$

4. অপনয়ন পদ্ধতিতে সমাধান করো।

$$\begin{array}{llll} \text{i) } 3x - 5y = -9 & \text{ii) } \frac{x+1}{y+1} = \frac{4}{5} & \text{iii) } 2x + \frac{3}{y} = 5 & \text{iv) } ax + by = 1 \\ 5x - 3y = 1 & \frac{x-5}{y-5} = \frac{1}{2} & 5x - \frac{2}{y} = 3 & bx + ay = \frac{2ab}{a^2 + b^2} \end{array}$$

5. আড়গুণন বা বজ্জগুণন পদ্ধতিতে সমাধান করো।

$$\begin{array}{llll} \text{i) } 3x - 2y = 2 & \text{ii) } \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 8 & \text{iii) } px + qy = p^2 + q^2 & \text{iv) } ax - by = ab \\ 7x + 3y = 43 & \frac{5x}{4} - 3y = -3 & 2qx - py = pq & bx - ay = ab \end{array}$$

6. অপূর একটি আয়তাকার সবজি বাগান আছে। বাগানটির পরিসীমা 120 মিটার। প্রস্থকে দ্বিগুণ করলে এবং দৈর্ঘ্য থেকে 3 মিটার কমালে পরিসীমা হয় 150 মিটার।

- ক) বাগানটি 3 পাশে ঘেরা আছে এবং দৈর্ঘ্য বরাবর এক পাশে ফাঁকা আছে। ফাঁকা পাশ বেড়া দিয়ে ঘিরে দিতে প্রতি মিটার 10 টাকা হিসাবে মোট কত টাকা খরচ হবে?
- খ) যদি প্রতি বর্গমিটারে জৈবিক সারের জন্য 7 টাকা খরচ হয়, তাহলে সার বাবদ অপূর মোট কত টাকা খরচ হবে?

7.  $x^2 - 3$  সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয় করো এবং সমাধান করো।

8.  $3x^2 - 2x - 1 = 0$  সমীকরণটি সূত্রের সাহায্যে সমাধান করো। আবার সমীকরণটি লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করে দেখাও যে, উভয় পদ্ধতিতে একই সমাধান পাওয়া যায়।

9. সেতুর মা বাড়িতে হাঁস ও মুরগী পালন করে। তিনি 5000 টাকা দিয়ে 25টি হাঁসের বাচ্চা এবং 30টি মুরগীর বাচ্চা কিনলেন। যদি তিনি একই দরে 20 টি হাঁসের বাচ্চা এবং 40টি মুরগীর বাচ্চা কিনতেন তবে তাঁর 500 টাকা কম খরচ হত।



ক) একটি হাঁসের বাচ্চা ও একটি মুরগীর বাচ্চার দাম কত?

খ) কিছুদিন লালনপালনের পরে প্রতিটি হাঁস 250 টাকা এবং প্রতিটি মুরগী 160 টাকা দরে বিক্রি করলে তাঁর মোট কত টাকা লাভ হবে?

10. নিচের সহসমীকরণের সমাধান করো:

$$\begin{array}{l} y = x^2 - 2x - 3 \\ x - 3y + 1 = 0 \end{array}$$

11. নিজের মতো করে দুই চলকবিশিষ্ট 3 সেট (একটি সরল ও একটি দ্বিঘাত) সহসমীকরণ গঠন করো এবং সমাধান করো।