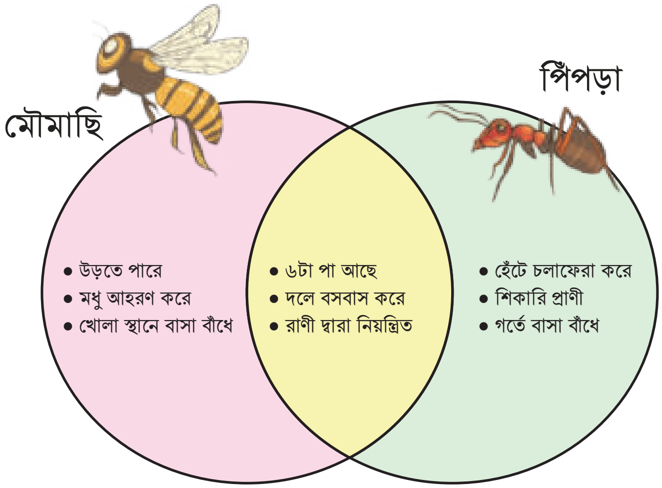
প্রাত্যহিক জীবনে সেট

এই অভিজ্ঞতায় শিখতে পারবে-

- সেটের ধারণা
- সেটের প্রকারভেদ
- সেটের অপারেশন
- ভেন চিত্র
- কার্তেসীয় গুণজ
- সেটের প্রয়োগ



শিক্ষাবর্ষ ২০২৪

প্রাত্যহিক জীবনে সেট

প্রতিটি শ্রেণিতে উত্তীর্ণ হবার সময় তোমাদের এক সেট বই দেওয়া হয়। অষ্টম শ্রেণিতে যখন উত্তীর্ণ হয়েছিলে তোমাকে যে বইয়ের সেট দেওয়া হয়েছিল তাতে কী কী বিষয়ের বই ছিল, নিচের ফাঁকা ঘরে লেখো :

অষ্টম শ্রেণির বইয়ের সেট :

একটু মনে করে দেখো শেষ যখন রং পেনসিল ব্যবহার করেছিলে, তোমার রং পেনসিলের সেটে কী কী রং ছিল?

রং পেনসিলের রঙের সেট :

তোমরা অনেকেই নিশ্চয়ই ক্রিকেট খেলতে বা দেখতে পছন্দ করো। নিচে একটি ক্রিকেট খেলার সরঞ্জামের সেট এর ছবি দেওয়া আছে। সেটটিতে কী কী রয়েছে সেগুলো দেখে পাশের ফাঁকা ঘরে লেখো :

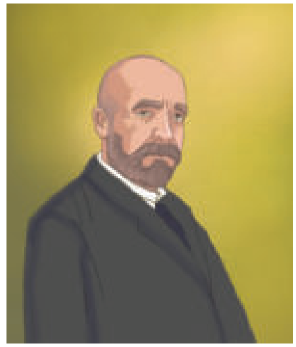
ক্রিকেট খেলার সরঞ্জামের সেট :

তোমরা এতক্ষণে বুঝে গিয়েছ আমরা বিভিন্ন জিনিসের সেট নিয়ে আলোচনা করছি। তোমরা দেখলে পাঠ্যবই, রং পেনসিল, ক্রিকেট খেলার সরঞ্জাম ইত্যাদির সব কিছুরই সেট হয়। তোমাদের শ্রেণিতে যতজন শিক্ষার্থী রয়েছে তাদের নিয়ে একটি সেট হতে পারে। বাংলাদেশের জাতীয় পতাকার রঙের একটি সেট হতে পারে। তোমার পড়ার টেবিলে যা যা রয়েছে সেগুলো নিয়েও একটি সেট হতে পারে। এ-তো গেল বাস্তব বস্তু। বিমূর্ত বস্তুর ও সেট হয়। যেমন, তোমাদের বিদ্যালয়ের ফুটবল দলের খেলোয়াড়দের নামের সেট। আবার বিভিন্ন সংখ্যার সেটও হতে পারে। যেমন, পূর্ণ সংখ্যার সেট।

শিক্ষাবর্ষ ২০২৪

জেনে রাখো

সেট তত্ত্বের জনক হলেন জার্মান গণিতবিদ জর্জ ক্যান্টর (Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor), তার জন্ম জার্মানিতে। ক্যান্টর এবং তাঁর আজীবনের বন্ধু রিচার্ড ডেডেকিন্ড (Richard Dedekind) চিঠি আদান-প্রদান করে একমত হন যে সেট হলো সসীম বা অসীম বস্তুর (object) একটি সংগ্রহ যা একটি নির্দিষ্ট বৈশিষ্ট্য ধারণ করে এবং প্রতিটি বস্তুর স্বতন্ত্রতা বজায় থাকে।



জর্জ ক্যান্টর

তাহলে আমরা বলতে পারি,

বাস্তব বা বিমূর্ত বিভিন্ন বস্তুর সুনির্দিষ্ট সংগ্রহকে সেট (set) বলে।

১.১ গণিতে সেটের প্রয়োজনীয়তা

তোমরা এতক্ষণে নিশ্চয়ই ভাবতে শুরু করেছ যে গণিতে সেটের কী প্রয়োজন? নিচের উদাহরণটি মনোযোগ সহকারে লক্ষ করলে তোমাদের কাছে সেটের প্রয়োজনীয়তা স্পষ্ট হয়ে যাবে।

উদাহরণ ১

মিতুদের বিদ্যালয়ের ষোল জন শিক্ষার্থী একটি স্থানীয় গণিত অলিম্পিয়াডে অংশগ্রহণ করেছিল, যেখানে শিক্ষার্থীদের বুদ্ধিমত্তা যাচাইয়ের জন্য বিভিন্ন কুইজ দেয়া হয়েছিল যার পূর্ণমান ছিল ১০০। প্রাপ্ত ফলাফলের ভিত্তিতে সিদ্ধান্ত নেওয়া হবে যে তাদের মাঝে কে কে জাতীয় গণিত অলিম্পিয়াডে যাবে। যে সকল শিক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বর ৬০%-এর বেশি তারা জাতীয় পর্যায়ে বিদ্যালয়ের প্রতিনিধিত্ব করবে।

নাম	প্রাপ্ত নম্বর	নাম	প্রাপ্ত নম্বর	নাম	প্রাপ্ত নম্বর	নাম	প্রাপ্ত নম্বর
সাগর	58	দীপ্তি	45	কলি	77	মারুফ	50
কামাল	72	অভিজিৎ	63	ত্রিবিজয়	74	এন্ড্রু	76
মিতু	79	জেবা	90	চৈতি	81	আকাশ	59
সেলিম	33	রওশন	35	নাহার	78	তাসনিম	80

এখন, উক্ত অলিম্পিয়াডে প্রাপ্ত নম্বরসমূহের মধ্যে 60%-এর অধিক নম্বরসমূহকে A এবং 60%- বা এর কম নম্বরসমূহকে B দ্বারা প্রকাশ করা হলে দেখা যায়,

শিক্ষাবর্ষ ২০২৪

A = {72, 79, 63, 90, 77, 74, 81, 78, 76, 80}

এবং

B = {58, 33, 45, 35, 50, 59}

এ থেকে আমরা কী বুঝতে পারলাম? দেখো আমরা নিচের বিষয়গুলো স্পষ্টই বুঝতে পারছি।

- 60%-এর অধিক নম্বরপ্রাপ্ত শিক্ষার্থীদের সংখ্যা অর্ধেকেরও বেশি।
- অংশগ্রহণকারী শিক্ষার্থীদের মধ্যে প্রায় এক তৃতীয়াংশ শিক্ষার্থী 60%-এর কম নম্বর পেয়েছে।
- 60%-এর নিচে প্রাপ্ত নম্বরসমূহ 33 থেকে 59 এর মধ্যে অবস্থিত।

এ ছাড়াও আর কী কী বুঝতে পারলে তা নিচের ফাঁকা ঘরে লেখো :

লক্ষ করো, উপরের উদাহরণটিতে আমরা কিছু গাণিতিক উপাত্ত একটি শর্তের উপর ভিত্তি করে ভিন্ন দুইটি সেট তৈরি করলাম। এখন বলো তো গণিত অলিম্পিয়াডে অংশগ্রহণকারী শিক্ষার্থীদের দক্ষতাকে আরও বৃদ্ধি করতে হলে কী কী সিদ্ধান্ত নেয়া প্রয়োজন? যেমন আমরা নিচের সিদ্ধান্তটি নিতে পারি।

যে সকল শিক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বর B সেটে রয়েছে তাদের গণিতের বোধগম্যতা বৃদ্ধির জন্য বিদ্যালয় এবং গণিত শিক্ষকের জরুরি ব্যবস্থা গ্রহণ প্রয়োজন।

এরকম একটি সিদ্ধান্ত নিতে পারলাম কারণ আমরা শিক্ষার্থীদের দুইটি সেটে বিভক্ত করতে পেরেছি। এই উদাহরণের মাধ্যমে তোমরা কি সেটের প্রয়োজনীয়তা বুঝতে পারলে?

সেটের মাধ্যমে আমরা একই জাতীয় গাণিতিক বা বিমূর্ত তথ্যের সংগ্রহ বা সংকলন চিহ্নিত করতে পারি। একই জাতীয় তথ্য বা উপাত্ত আলাদা করার মাধ্যমে উপাত্ত প্রক্রিয়াকরণ এবং প্রাসঙ্গিক বিষয় সম্পর্কে স্বচ্ছ ধারণা অর্জন করা সম্ভব। তাহলে এসো, এরকম একটি প্রয়োজনীয় বিষয় সম্বন্ধে আমরা আরও জানার চেষ্টা করি।

১.২ সেট এর প্রকাশ

সংজ্ঞা এবং প্রয়োজনীয়তা তো জানলে। সেটকে প্রকাশ করারও কিন্তু চমৎকার পদ্ধতি রয়েছে। যে বস্তু বা বস্তুসমূহের সেট প্রকাশ করবে, সেগুলোকে দ্বিতীয় বন্ধনী (Second Bracket) এর মধ্যে কমা (comma) দ্বারা পৃথক করে প্রকাশ করা হয়। যেমন,

শিক্ষাবর্ষ ২০২৪

বাংলাদেশের জাতীয় পতাকায় রং-এর সেট = {সবুজ, লাল}

জোড়ায় কাজ

সেট এ প্রকাশ করো :

১. অষ্টম শ্রেণির বিষয়সমূহের বইয়ের সেট =

২. তোমার রং পেনসিলের রঙের সেট =

৩. ছবিতে দেওয়া ক্রিকেট খেলার সরঞ্জামের সেট =

১.৩ সেট লেখার পদ্ধতি

- সেটকে সাধারণত ইংরেজি বর্ণমালার বড়ো হাতের অক্ষর $A, B, C, \ldots$, X, Y, Z দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
- কোনো একটি সেটে সংগৃহীত প্রত্যেক বস্তুকে সেটের সদস্য বা উপাদান (element) বলা হয়। উপাদানকে সাধারণত ইংরেজি বর্ণমালার ছোটো হাতের অক্ষর $a, b, c, \ldots, x, y, z$ ইত্যাদি দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
- $B = \{a, b\}$ হলে, B সেটের উপাদান a এবং b. উপাদান প্রকাশের চিহ্ন $\in$। অর্থাৎ $a \in B$ এর অর্থ হলো a, B সেটের একটি উপাদান (a is an element of B অথবা a belongs to B)।
- যদি c, সেট B এর উপাদান না হয় তাহলে আমরা লিখি $c \notin B$ অর্থাৎ c, B-এর উপাদান নয় (c is not an element of B অথবা c does not belong to B) ।

একক কাজ

১. 210 এর মৌলিক উৎপাদকসমূহের সেট তৈরি করে নিচের খালি ঘরে লেখো।

একক কাজ

২. $X = \{5, 7, 9, 11, 13\}$ হলে নিচের ফাঁকা ঘরে $\in$ অথবা $\notin$ বসাও।

9	☐	X	10	☐	X
3	☐	X	13	☐	X

১.৪ সেট প্রকাশের পদ্ধতি

তোমরা দেখলে সেটের মাধ্যমে আমরা বস্তু বা সংখ্যার সংকলনকে সুনির্দিষ্টভাবে প্রকাশ করতে পারি। অর্থাৎ কোনো একটি বস্তু সেটের উপাদান কিনা তা সুনির্দিষ্টভাবে বলা যায়। যেমন–

- 10 এর চেয়ে ছোটো সকল বিজোড় সংখ্যার সেট, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$। এখানে সুনির্দিষ্টভাবে বলা যাবে যে, A এর উপাদান কোনটি। যেমন, $3 \in A$ কিন্তু $4 \notin A$ ।
- ইংরেজি বর্ণমালার স্বরবর্ণ (vowels) এর সেট, $B = \{a, e, i, o, u\}$. এখানে $i \in B$ কিন্তু $b \notin$ B.

সেটকে দুই পদ্ধতিতে প্রকাশ করা হয়। তালিকা পদ্ধতি ও সেট গঠন পদ্ধতি।

১.৪.১ তালিকা পদ্ধতি (Roaster Method বা Tabular Method)

এ পদ্ধতিতে সেটের সকল উপাদানকে কমা দিয়ে পৃথক করে দ্বিতীয় বন্ধনীর মধ্যে লেখা হয়। যেমন,

- 1, 2, 3 দ্বারা গঠিত সেট : $A = \{1, 2, 3\}$
- মৌলিক সংখ্যার সেট : $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \cdots\}$
- জোড় সংখ্যার সেট : $E = \{\cdots, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \cdots\}$

১.৪.২ সেট গঠন পদ্ধতি (Set Builder Method)

এ পদ্ধতিতে সেটের সকল উপাদানকে সুনির্দিষ্টভাবে তাদের বৈশিষ্ট্য বা শর্তের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়। যেমন,

$$A = \{x : x \text{ স্বাভাবিক বিজোড় সংখ্যা}\}$$

লক্ষ করো, x এর পরে একটি ‘:’ (কোলন) রয়েছে। ‘:’টির দ্বারা ‘এরূপ যেন’ বা সংক্ষেপে ‘যেন’ (such that) বোঝায়। যেহেতু এ পদ্ধতিতে সেটের উপাদান নির্ধারণের জন্য শর্ত বা নিয়ম (rule) দেওয়া থাকে, এ জন্য এ পদ্ধতিকে Rule Method ও বলা হয়।

উদাহরণ ১. সেট $A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15\}$ কে গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ করো।

শিক্ষাবর্ষ ২০২৪

সমাধান : এখানে সেটের প্রত্যেকটি উপাদান পূর্ণসংখ্যা, 0 এর চেয়ে ছোটো নয়, 15 এর চেয়ে বড়ো নয় এবং 3 এর গুণিতক। সুতরাং সেট গঠন পদ্ধতিতে আমরা লিখতে পারি,

$$A = \{x : x \text{ পূর্ণসংখ্যা, 3 এর গুণিতক}, 0 \leq x \leq 15\}$$

উদাহরণ ২ : সেট $A = \{x : x \text{ পূর্ণসংখ্যা}, x^2 \leq 25\}$ কে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করো।

সমাধান : এখানে সেটের প্রত্যেকটি উপাদান পূর্ণসংখ্যা যাদের বর্গ 25 এর চেয়ে ছোটো বা সমান। এই ধরনের সংখ্যাগুলো 0, ±1, ±2, ±3, ±4, ±5. সুতরাং তালিকা পদ্ধতিতে আমরা লিখতে পারি,

$$A = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5\} = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

একক কাজ

১. নিচের সেটগুলোকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ করো।

ক) $A = \{-28, -21, -14, -7, 7, 14, 21, 28\}$

খ) $B = \{0, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots\}$

২. নিচের সেট গঠন পদ্ধতিতে লেখা সেটগুলোকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করো।

ক) $D = \{x : x, \text{ 5 এর গুণিতক এবং 30 এর চেয়ে ছোটো}\}$

খ) $F = \{x : x, \text{ 30 এর গুণনীয়ক}\}$

গ) $G = \{x : x, \text{ ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা এবং } x^2 < 17\}$

ঘ) $H = \{x : x^2 + 3x + 2 = 0\}$

কিছু বিশেষ সেট এর উদাহরণ

N : সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট (Set of all natural numbers)

Z : সকল পূর্ণসংখ্যার সেট (Set of all integers)

Q : সকল মূলদ সংখ্যার সেট (Set of all rational numbers)

R : সকল বাস্তব সংখ্যার সেট (Set of all real numbers)

Z^+ : সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সেট (Set of all positive integers)

Q^+ : সকল ধনাত্মক মূলদ সংখ্যার সেট (Set of all positive rational numbers)

R^+ : সকল ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেট (Set of all positive real numbers)

১.৫ সেট এর প্রকারভেদ

১.৫.১ সার্বিক সেট (Universal Set)

যদি কোনো সেটের উপাদানগুলো অন্য কোনো একটি নির্দিষ্ট সেট থেকে সংগৃহীত হয়, তবে যে নির্দিষ্ট সেট থেকে উপাদানগুলো সংগৃহীত হয় তাকে **সার্বিক সেট** (universal set) বলে। সার্বিক সেটকে সাধারণত U দ্বারা প্রকাশ করা হয়। তবে অন্য প্রতীকের সাহায্যেও সার্বিক সেট প্রকাশ করা যায়। যেমন : সকল জোড় স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $E = \{2, 4, 6,...\}$ এবং সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6,...\}$ হলে N হবে E সেটের সার্বিক সেট।

উদাহরণ : $A = \{x, y\}$ সেটটি ইংরেজি ছোটো অক্ষরের বর্ণের সেট থেকে সংগৃহীত। সুতরাং ইংরেজি ছোটো অক্ষরের বর্ণের সেট হলো $A = \{x, y\}$ সেটের সার্বিক সেট।

১.৫.২ সসীম সেট (Finite Set)

যে সেট এর উপাদান সংখ্যা গণনা করে শেষ করা যায়, তাকে **সসীম সেট** বলে। যেমন–

$$A = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$B = \{a, e, i, o, u\}$$

$$F = \{x : x \text{ মৌলিক সংখ্যা এবং } 30 < x < 70\}$$

এখানে সেট A এবং B এর উপাদান সংখ্যা যথাক্রমে 4 এবং 5 ।

মাথা খাটাও

F সেটের উপাদানসংখ্যা কয়টি? কীভাবে নির্ণয় করলে নিচের খালি জায়গায় লেখো?

১.৫.৩ অসীম সেট (Infinite Set)

যে সেট এর উপাদান সংখ্যা গণনা করে শেষ করা যায় না, তাকে **অসীম সেট** বলে। যেমন,

ক) $A = \{x : x \text{ বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যা}\}$

খ) স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $N = \{1, 2, 3, 4,...\}$

গ) পূর্ণসংখ্যার সেট $Z = \{...,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...\}$

ঘ) মূলদ সংখ্যার সেট $Q = \left\{\frac{a}{b} : a \text{ ও } b \text{ পূর্ণসংখ্যা এবং } b \neq 0\right\}$

ঙ) বাস্তব সংখ্যার সেট R

মাথা খাটাও

উপরের সেটগুলো অসীম কেন?

দলগত কাজ

নিচের ছক ১.১ এর বাম পাশের কলামে কিছু সেটের বিবরণ দেওয়া আছে। তোমাদের কাজ হলো এককেটি সেট সসীম না অসীম তা নির্ধারণ করে ফাঁকা ঘরে টিক (√) দেওয়া। সেই সাথে ডান পাশের ফাঁকা কলামে তোমাদের যুক্তিটি আলোচনা করে লিখবে।

ছক ১.১

ক্রমিক	সেট	সসীম	অসীম	তোমাদের যুক্তি
১	10 এর চেয়ে ছোটো সকল বিজোড় সংখ্যা			
২	বাংলাদেশের নদীসমূহ			
৩	ইংরেজি বর্ণমালার স্বরবর্ণ (vowels)			
৪	210 এর মৌলিক উৎপাদকসমূহ			
৫	$B = \{x : x$, 30 এর গুণনীয়ক$\}$			
৬	$D = \{x : x^2 + 3x + 2 = 0\}$			
৭	$P = \{2, 3, 5, 7, 11, \cdots\}$			
৮	$A = \{x \in N : 0 < x < 1\}$			
৯	$B = \{x \in Q : x^2 = -1\}$			

মাথা খাটাও

ছক ১.১ পূরণের সময় 8 এবং 9 নং সেট দুটি নির্ণয় করতে পেরেছ? সেট দুইটিতে কয়টি উপাদান রয়েছে তা নিচের ফাঁকা ঘরে লেখো।

৮ নং সেটের উপাদান সংখ্যা =

৯ নং সেটের উপাদান সংখ্যা =

১.৫.৪ ফাঁকা সেট (Empty Set)

যে সেট এর কোন উপাদান নেই তাকে **ফাঁকা সেট** বলে। একে $\emptyset$ বা { } চিহ্ন দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। যেমন-

শিক্ষাবর্ষ ২০২৪

$A = \{x : 0 < x < 1$, যেখানে x স্বাভাবিক সংখ্যা$\}$।

আবার,

$B = \{x : x^2 = -1$,যেখানে x মূলদ সংখ্যা$\}$।

ভেবে দেখো তো, এটা সম্ভব কিনা। তোমার উত্তর নিচের ফাঁকা ঘরে লেখো।

ভেবে দেখো

- একটি বালিকা বিদ্যালয়ে বালকের সংখ্যার সেটটি কিন্তু একটি ফাঁকা সেট!
- মৌলিক বর্গসংখ্যার সেট একটি ফাঁকা সেট
- $\text{A} = \{x : x$ পূর্ণসংখ্যা, $8 < x^3 \leq 25\}$ একটি ফাঁকা সেট

এবার তুমি এবং তোমার একজন সহপাঠি মিলে পাঁচটি ফাঁকা সেট খুঁজে বের করে লেখো।

১.৫.৫ উপসেট (Subset)

কোনো একটি সেট A এর প্রত্যেকটি উপাদান যদি আরেকটি সেট B এর উপাদান হয় তবে সেট A কে সেট B এর **উপসেট** (Subset) বলে এবং লেখা হয় $A \subseteq B$ এবং পড়া হয়, A, B এর উপসেট (A is a subset of B)। এখানে $\subseteq$ উপসেটের চিহ্ন।

ধরি, $A = \{a, b\}$ একটি সেট। এই সেটের উপাদান থেকে $\{a, b\}$, $\{a\}$, $\{b\}$ সেটগুলো গঠন করা যায়। আবার, কোনো উপাদান না নিয়ে ফাঁকা সেট $\emptyset$ গঠন করা যায়। এখানে, গঠিত $\{a, b\}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\emptyset$ প্রত্যেকটি সেটের প্রত্যেক উপাদান A সেটের উপাদান। সুতরাং এদের প্রত্যেকটি সেটকে A সেটের উপসেট। উপরের উপসেটগুলোর মধ্যে $\{a, b\}$ সেট A এর সমান। প্রত্যেকটি সেট নিজের উপসেট। আবার, যে কোনো সেট থেকে $\emptyset$ সেট গঠন করা যায়। সুতরাং $\emptyset$ যে কোনো সেটের উপসেট।

চিন্তা করো : একটি সার্বিক সেট নিজেই তার উপসেট হতে পারে কিনা?

যাচাই করো

১. মনে করো, $P = \{1, 2, 3\}$, $Q = \{2, 3\}$, এবং $R = \{1, 3\}$

ক) Q এবং R, P এর উপসেট কারণ ______________________________।

খ) Q, P এর একটি উপসেট। এটির প্রকাশ হলো: ______________________________।

গ) $P \subseteq P$, এই প্রকাশটি সত্য নাকি মিথ্যা? তোমার উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও। ______________

____

২. $2N \subseteq N$, যেখানে N সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট।

১.৫.৬ সমান সেট (Equal set)

আচ্ছা, তোমাদের কাছে একটি প্রশ্ন করি। মনে করো, A এবং B দুইটি সেট, যেখানে

$A = \{6, 7, 8, 9\}$ এবং $B = \{6, 9, 8, 7\}$

A এবং B এর উপাদানগুলোর দিকে লক্ষ করে দেখো তো। একই মনে হচ্ছে?

তাহলে কি আমরা দাবি করতে পারি যে $A = B$? তোমার যুক্তি নিচে লেখো।

মাথা খাটাও

নিচের দাবি গুলো সত্য কি না চিন্তা করে যুক্তিসহ বল।

১. $A \subseteq B$

২. $B \subseteq A$

দুটি সেটের উপাদান সংখ্যা একই হলে তাদেরকে **সমান সেট** বলে। যদি A এবং B দুইটি সেট হয়, যেখানে, $A \subseteq B$ এবং $B \subseteq A$, তাহলে A এবং B দুইটি সমান সেট (equal set) এবং $A = B$ চিহ্ন দ্বারা লেখা হয়।

উদাহরণ : $A = \{3, 5, 7\}$ এবং $B = \{5, 3, 7\}$ দুইটি সমান সেট। এখানে, $A = B$ দাবি করা যাচ্ছে কারণ $A \subseteq B$ এবং $B \subseteq A$।

শিক্ষাবর্ষ ২০২৪

আবার, $A = \{3, 5, 7\}$, $B = \{5, 3, 3, 7\}$ এবং $C = \{7, 7, 3, 5, 5\}$ হলেও A, B ও C সেট তিনটি সমান। অর্থাৎ, $A = B = C$.

সেটের উপাদানগুলোর ক্রম বদলালে বা কোনো উপাদান পুনরাবৃত্তি করলে সেটের কোনো পরিবর্তন হয় না।

যাচাই করো

নিচে A এবং B সেটের বিভিন্ন উপাদান উল্লেখ করা আছে। যাচাই করে দেখাও কোন কোন জোড়াগুলো সমান সেট।

১। $A = \{6, 7, 8, 9\}$ এবং $B = \{6, 9, 8, 7\}$

২। $A = \{4, 8, 6, 2\}$ এবং B $=\{x : x$ ধনাত্মক জোড় সংখ্যা এবং $x < 10\}$

৩। $A = \{-1, -2\}$ এবং $B = \{x : x^2 + 3x + 2 = 0$ এর সমাধান$\}$

১.৫.৭ প্রকৃত উপসেট (Proper subset)

প্রত্যেকটি সেট নিজেই নিজের উপসেট। ধরি, A একটি সেট। A ব্যতীত A এর অন্য যে কোনো উপসেটকে A এর **প্রকৃত উপসেট** (proper subset) বলে। $\subset$ চিহ্ন দ্বারা প্রকৃত উপসেটকে নির্দেশ করা হয়। সুতরাং যদি B, A এর একটি প্রকৃত উপসেট হয় তবে লেখা হয় $B \subset A$. অর্থাৎ $B \subseteq A$ কিন্তু $B \neq A$. কোনো সসীম সেট থেকে গঠিত প্রকৃত উপসেটের উপাদান সংখ্যা প্রদত্ত সেটের উপাদান সংখ্যা অপেক্ষা কম হবে।

উদাহরণ : ধরি, $A = \{3, 4, 5, 6\}$ এবং $B = \{3, 5\}$ দুইটি সেট। এখানে $B \subseteq A$ কিন্তু $B \neq$ A. সুতরাং সেট B, সেট A এর একটি প্রকৃত উপসেট।

সমস্যা : $P = \{x, y, z\}$ এর সকল উপসেটগুলো লেখো এবং সেগুলো থেকে প্রকৃত উপসেট বাছাই করো।

সমাধান : দেওয়া আছে, $P = \{x, y, z\}$

P এর উপসেটসমূহ : $\{x, y, z\}$, $\{x, y\}$, $\{x, z\}$, $\{y, z\}$, $\{x\}$, $\{y\}$, $\{z\}$, $\emptyset$

P এর প্রকৃত উপসেটসমূহ : $\{x, y\}$, $\{x, z\}$, $\{y, z\}$, $\{x\}$, $\{y\}$, $\{z\}$, $\emptyset$

মাথা খাটাও

১। কোন সেট সকল সেটের উপসেট?

২। কোন সেট এর সর্বোচ্চ একটি উপসেট থাকবে?

৩। মনে করো, $A = \{1, 2, 3\}$. A এর মোট কয়টি উপসেট থাকতে পারে, কী কী?

৪। সত্যতা যাচাই করো: $2Z \subset Z$, যেখানে Z সকল পূর্ণসংখ্যার সেট।

কোনো সেটের উপাদান সংখ্যা n হলে ওই সেটের উপসেটের সংখ্যা 2^n এবং প্রকৃত উপসেটের সংখ্যা $2^n - 1$.

যাচাই করে খাতায় লেখো।

মনে করো, $P = \{1, 2, 3\}$, $Q = \{2, 3\}$, এবং $R = \{1, 3\}$

১। Q এবং R কি P এর প্রকৃত উপসেট? তোমার উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও।

২। Q যদি P এর একটি প্রকৃত উপসেট হয়, তবে এটির প্রকাশ হলো:

৩। P এর মোট কয়টি প্রকৃত উপসেট রয়েছে, নির্ণয় করে দেখাও।

১.৫.৮ সেটের সেট!

মনে করো তোমাদের শ্রেণিতে 18 জন ছেলে আর 22 জন মেয়ে আছে এবং অষ্টম শ্রেণিতে 23 জন ছেলে আর 19 জন মেয়ে আছে।

ধরি, নবম শ্রেণির ছেলেদের সেট A আর মেয়েদের সেট B এবং অষ্টম শ্রেণির ছেলেদের সেট C আর মেয়েদের সেট D। তাহলে আমরা সেট গঠন পদ্ধতিতে লেখতে পারি,

নবম শ্রেণির ছেলেদের সেট $\mathrm{A} = \{x : x$ নবম শ্রেণির ছেলে$\}$

তাহলে, নবম শ্রেণির মেয়েদের সেট এবং অষ্টম শ্রেণির ছেলে ও মেয়েদের সেট, সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ করলে কি দাঁড়াবে, নিচের ঘরে লেখো।

এবার যদি নবম ও অষ্টম শ্রেণির ছেলে মেয়েদের সেট গুলো নিয়ে একটি সেট X গঠন করা হয়, তাহলে আমরা লিখতে পারি,

$X = \{A, B, C, D\}$

এখানে X কে সেটের সেট (set of sets) বলে। এক্ষেত্রে সেট A, সেট X এর একটি উপাদান। অর্থাৎ, $A \in X$.

উদাহরণ : $X = \{\{0, 1\}, \{1, 2, 3\}, \{0, 1, 3\}\}$ একটি সেটের সেট। এক্ষেত্রে $\{0, 1\} \in X$ কিন্তু $0 \notin X$.

১.৫.৯ শক্তি সেট (Power Set)

মনে করো একটি সেট $A = \{x, y\}$. তাহলে A সেটের উপসেটসমূহ হলো $\{x, y\}$, $\{x\}$, $\{y\}$ এবং $\emptyset$। এখানে উপসেটসমূহের সেট $\{\{x, y\}, \{x\}, \{y\}, \emptyset\}$, A সেটের শক্তি সেট। সুতরাং কোনো সেটের সকল উপসেট দ্বারা গঠিত সেটকে ওই সেটের **শক্তি সেট** বলা হয়। A সেটের শক্তি সেটকে $P(A)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ : $A = \{0, 1, 2\}$ হলে $P(A)$ নির্ণয় করো।

সমাধান : এখানে সেট $A = \{0, 1, 2\}$ এর উপসেটসমূহ : $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$, $\{0, 1, 2\}$.

সুতরাং $P(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$

জোড়ায় কাজ:

নিচের সেটগুলোর শক্তি সেট বের করো। একটা করে দেওয়া হলো।

১. $A = \emptyset$. এখানে A এর উপসেট একটি $\emptyset$. সুতরাং $P(A) = \{\emptyset\}$

২. $B = \{a\}$

৩. একটি কলমদানিতে একটি কলম, একটি পেন্সিল এবং একটি রাবার আছে। এদের দ্বারা গঠিত একটি সেট C ।

১.৬ সেটের উপাদান সংখ্যা (Number of elements of a set)

সেটের ব্যবহারে সেটের উপাদান সংখ্যা গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে। কোনো একটি সেট A এর উপাদান সংখ্যাকে $n(A)$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়। যদি A একটি অসীম সেট হয়, তবে $n(A)$ কে ∞ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। অর্থাৎ A একটি অসীম সেট হলে $n(A) = \infty$.

উদাহরণ : $A = \{0, 1, 2, 3\}$ হলে $n(A) = 4$.

একক কাজ

১. $A = \{0\}$ হলে, $n(A) =$ ☐

২. $A = \{a, b, c\}$ হলে, $n(\mathrm{A}) =$ ☐

৩. $A = \emptyset$ হলে, $n(A) =$ ☐

৪. N সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট হলে, $n(N) =$ ☐

এবার তাহলে শক্তি সেটের উপাদান সংখ্যা দেখে নেওয়া যাক।

লক্ষ কর: কোনো সেটের উপাদান সংখ্যা n হলে, ওই সেটের উপসেটের সংখ্যা হবে 2^n. সুতরাং শক্তি সেটের উপাদান সংখ্যা হবে 2^n.

একক কাজ: $A = \{0, 1, 2, 3\}$ হলে $P(A)$ নির্ণয় করো।
দেখাও যে, $P(A)$ এর উপাদান সংখ্যা $2^4 = 16$.

১.৭ সেট প্রক্রিয়াকরণ

সংখ্যারাশির ক্ষেত্রে যেমন যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ আছে। এদেরকে সংখ্যারাশির প্রক্রিয়াকরণ বলে। তেমনি সেটের ক্ষেত্রেও প্রক্রিয়াকরণ আছে। এক বা একাধিক সেট থেকে অন্য সেট তৈরি করা যায়। এখন আমরা সেটের প্রক্রিয়াকরণ নিয়ে আলোচনা করব।

১.৭.১ সংযোগ সেট (Union of Sets)

তোমরা আগে খেয়াল করেছ, দুইটি সেটের উপাদানসমূহের মাঝে মিল এবং অমিল থাকতে পারে। এই মিল এবং অমিলের ভিত্তিতে সিদ্ধান্ত গ্রহণের জন্য সেটসমূহের মাঝে কিছু প্রক্রিয়াকরণ করা যায়। একটি উদাহরণ দিয়ে বোঝালে তোমাদের সুবিধা হবে। নবম শ্রেণিতে 4 জন শিক্ষার্থী ফুটবল খেলতে এবং 3 জন শিক্ষার্থী বাস্কেটবল খেলতে পছন্দ করে। ধরি,

যারা ফুটবল পছন্দ করে তাদের রোল নম্বরের সেট $A = \{3, 4, 5, 6\}$

এবং যারা বাস্কেটবল পছন্দ করে তাদের রোল নম্বরের সেট $B = \{1, 4, 6\}$

এখন, বলো তো যারা ফুটবল অথবা বাস্কেটবল খেলা পছন্দ করে তাদের রোল নম্বরের সেট কী হবে এবং এই সেটকে আমরা কীভাবে প্রকাশ করব?

এই সেটকে প্রকাশ করা হয় $A \cup B$ দ্বারা এবং A ও B এর সকল উপাদানকে নিয়ে $A \cup B$ গঠন করা হয়। অর্থাৎ

$$A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$$

দুই বা ততোধিক সেটের সকল উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে **সংযোগ সেট** বলা হয়। মনে করি, A ও B দুইটি সেট। A ও B সেটের সংযোগ সেটকে $A \cup B$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং পড়া হয় A সংযোগ B অথবা A union B. সেট গঠন পদ্ধতিতে লেখা হয়,

$$A \cup B = \{x : x \in \text{A অথবা } x \in B\}$$

উদাহরণ : $A = \{x : x \in Z, -2 < x < 5\}$ এবং $B = \{1, 4, 6, 8\}$ হলে, $A \cup B$ নির্ণয় করো।

সমাধান : শর্ত অনুযায়ী $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ এবং $B = \{1, 4, 6, 8\}$.

সুতরাং $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 4, 6, 8\} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

১.৭.২ ছেদ সেট (Intersection of Sets)

এখন বলো তো সংযোগ সেটে উল্লেখিত নবম শ্রেণিতে ফুটবল এবং বাস্কেটবল খেলা পছন্দ করা শিক্ষার্থীদের মধ্যে যারা ফুটবল এবং বাস্কেটবল উভয় খেলাই পছন্দ করে তাদের রোল নম্বরের সেট কী হবে এবং এই সেটকে আমরা কীভাবে প্রকাশ করব?

এই সেটকে প্রকাশ করা হয় $A \cap B$ দ্বারা এবং A ও B এর সাধারণ উপাদানকে নিয়ে $A \cap B$ গঠন করা হয়। অর্থাৎ নবম শ্রেণিতের শিক্ষার্থীদের মধ্যে যারা ফুটবল এবং বাস্কেটবল উভয় খেলাই পছন্দ করে তাদের রোল নম্বরের সেট

$$A \cap B = \{4, 6\}$$

দুই বা ততোধিক সেটের সাধারণ উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে **ছেদ সেট** বলা হয়। মনে করি, A ও B দুইটি সেট। A ও B সেটের ছেদ সেটকে $A \cap B$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং পড়া হয় A ছেদ B অথবা A intersection B। সেট গঠন পদ্ধতিতে লেখা হয়,

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ এবং } x \in B\}$$

উদাহরণ : $X = \{x \in Z : -4 < x < 8\}$ এবং $Y = \{x \in N: x$ জোড় সংখ্যা এবং $x \leq 18\}$ হলে, $X \cap Y$ নির্ণয় করো।

সমাধান : শর্ত অনুযায়ী, $X = \{x \in Z : -4 < x < 8\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

এবং $Y = \{x \in N : x$ জোড় সংখ্যা এবং $x \leq 18\} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$

সুতরাং $X \cap Y = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \cap \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$
$= \{2, 4, 6\}$

১.৭.৩ অন্তর সেট (Set Difference)

কোনো মাদ্রাসা থেকে ৯ম শ্রেণির শিক্ষার্থীদের মধ্যে গণিত অলিম্পিয়াডের জন্য গণিত শিক্ষক 5জনকে নির্বাচন করেছেন। তারা হলো- সামির, নাসরিন, তাহসিন, বশির এবং আমিনা। অন্যদিকে আরবি শিক্ষক কোরআন তেলওয়াত প্রতিযোগিতায় অংশগ্রহণের জন্য 3জনকে নির্বাচন করেছেন। তারা হলো- কোহিনুর, বশির এবং রেজওয়ান। যদি গণিত অলিম্পিয়াডের সেট A এবং কোরআন তেলওয়াতের সেট B হয়, তাহলে আমরা লিখতে পারি,

A = {সামির, নাসরিন, তাহসিন, বশির, আমিনা} এবং B = {কোহিনুর, বশির, রেজওয়ান}

দুইটি প্রতিযোগীতা একই দিনে অনুষ্ঠিত হওয়ায় প্রধান শিক্ষক বললেন, সেট A থেকে সেট B এর সদস্যদের বাদ দিতে হবে। তাহলে A থেকে B কে বাদ দেওয়ার পরে সেটটিকে কীভাবে প্রকাশ করব এবং সেটটির সদস্য কারা হবে?

এই সেটকে প্রকাশ করা হয় $A \setminus B$ দ্বারা এবং A থেকে B এর সদস্য বাদ দিয়ে $A \setminus B$ গঠন করা হয়। অর্থাৎ

$A \setminus B$ = {সামির, নাসরিন, তাহসিন, আমিনা}

এখানে সেট A থেকে বশির বাদ যাবে, কারণ বশির B সেটেরও সদস্য।

একটি সেট থেকে অন্য একটি সেটের সদস্য বাদ দিয়ে গঠিত সেটকে **অন্তর সেট** বলা হয়। সেট A থেকে সেট B এর অন্তর সেটকে $A \setminus B$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং পড়া হয় A অন্তর B অথবা A difference B. সেট গঠন পদ্ধতিতে লেখা হয়,

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ এবং } x \notin B\}$$

উদাহরণ : $P = \{x : x$, 12 এর গুণনীয়ক$\}$ এবং $Q = \{x : x$, 3 এর গুণিতক এবং $x \leq 12\}$ হলে, $P \setminus Q$ নির্ণয় করো।

সমাধান : এখানে, $P = \{x : x$, 12 এর গুণনীয়কসমূহ$\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

এবং $Q = \{x : x$,3 এর গুণিতক এবং $\leq 12\} = \{3, 6, 9, 12\}$

সুতরাং $P \setminus Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \setminus \{3, 6, 9, 12\} = \{1, 2, 4\}$

মাথা খাটাও

১. যদি $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ এবং $B = \{1, 2, 2, 3, 1\}$ হয়, তবে $B \setminus A =$ কত হবে? ব্যাখ্যা দাও।

২. যদি $A \subseteq B$ হয়, তবে $A \setminus B =$ কত হবে? ব্যাখ্যা দাও।

১.৭.৪ পূরক সেট (Complement of a Set)

ধরি, সমগ্র পৃথিবীর জনসংখ্যার সেট U এবং যারা বাংলা ভাষায় কথা বলে তাদের সেট A । তাহলে U সার্বিক সেট এবং A সেটটি U এর উপসেট। এবার বলো তো, বাংলা ভাষায় কথা বলে না এমন জনসংখ্যার সেটকে কীভাবে প্রকাশ করা যায়?

এই সেটকে প্রকাশ করা হয় $U \setminus A$ দ্বারা এবং U থেকে A এর সদস্য বাদ দিয়ে $U \setminus A$ গঠন করা হয়। অর্থাৎ $U \setminus A$ হলো বাংলা ভাষায় কথা বলে না এমন জনসংখ্যার সেট।

একটি সেট A এর উপাদানকে এর সার্বিক সেট U এর উপাদান থেকে বাদ দিয়ে গঠিত সেটকে A এর **পূরক সেট** বলা হয়। সেট A এর পূরক সেটকে A^c বা A' দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং পড়া হয় A পূরক অথবা A complement । সেট গঠন পদ্ধতিতে লেখা হয়,

$$A^c = \{x : x \in U \text{ এবং } x \notin A\}$$

উদাহরণ : যদি সার্বিক সেট U সকল অঙ্ক (digits) এর সেট হয়, এবং A সকল জোড় (even) অঙ্ক (digits) এর সেট হয়, তাহলে A^c নির্ণয় করো।

সমাধান : এখানে, $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ এবং $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

তাহলে, $A^c = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

১.৭.৫ নিশ্ছেদ সেট (Disjoint Set)

কোনো একটি বিদ্যালয়ের ৯ম শ্রেণির শিক্ষার্থীদের ছোটো একটি দল আছে, দলের সদস্য সংখ্যা 9 জন। দলের সদস্যদের রোল নম্বর খুব মজার। প্রথম 9টি মৌলিক সংখ্যা। তাদের কেউ গান করে, কেউবা আবার নাচ করে। যারা নাচ অথবা গান কোনটিই করে না, তারা উৎসাহ দেয়। বিদ্যালয়ের সহশিক্ষা কার্যক্রমে তারা একটি দলগত উপস্থাপনা দিতে চাইছে। কে কী করে, তাদের রোল নম্বর অনুসারে নিচে দেখো।

দলের সদস্যদের রোল নম্বরের সেট U হলে, U কে তালিকা পদ্ধতিতে এখানে লেখো :

গান করে যারা তাদের রোল নম্বরের সেট, $E = \{5, 11, 17, 23\}$

$U =$

এবং নাচ করে যারা তাদের রোল নম্বরের সেট, $F = \{2, 7, 13\}$

লক্ষ করো, $E \cap F = \emptyset$, অর্থাৎ, তাদের পক্ষে একটি সাধারণ দলগত উপস্থাপনা দেওয়া সম্ভব নয়। এমন ক্ষেত্রে বলা যায়, E এবং F পরস্পরের **নিশ্ছেদ সেট**।

দুইটি সেট A এবং B কে **নিশ্ছেদ সেট** বলা হয় যদি $A \cap B = \emptyset$ হয়।

যাচাই করো

উপরের সমস্যাটির প্রেক্ষিতে নিচের সেট দুইটি নির্ণয় করো এবং সেট দুইটি সম্পূর্ণ দলের প্রেক্ষিতে কী নির্দেশ করে লেখ।

১। $E^c \cup F^c$

২। $E^c \cap F^c$

১.৮ চিত্র দিয়ে ক্রীড়া সমস্যার সমাধান

নিতুদের বিদ্যালয়ে বার্ষিক ক্রীড়া ও সাংস্কৃতিক প্রতিযোগিতা আয়োজিত হবে। শ্রেণিশিক্ষক আঁখি আপা নিতুদের শ্রেণি থেকে নাম নিবেন কে কীসে অংশগ্রহণ করবে। শর্ত হলো নবম শ্রেণির কেউ তিনটির বেশি কর্মকাণ্ডে অংশগ্রহণ করতে পারবে না। আপা বললেন, “সবাই অবশ্য তিনটির সব কয়টিতে অংশগ্রহণ করবে এমনও নয়। আমাদের একটি সিদ্ধান্তে এসে পৌঁছুতে হবে। ধরো আমাদের হাতে রয়েছে দলগত ক্রীড়া, একক ক্রীড়া এবং সাংস্কৃতিক কর্মকাণ্ড।” এই বলে নিচের ছবির মতো তিনটি বৃত্ত আঁকলেন বোর্ডে।

তারপর বললেন, “শুধু দলগত খেলা, যেমন ক্রিকেট বা ফুটবলে কে কে অংশগ্রহণ করতে চাও?” ক্লাসে যারা বিদ্যালয়ের বিভিন্ন খেলার দলে আছে তেমন আটজন হাত তুললো আর আপা তাদের রোল নম্বর দলগত ক্রীড়ার বৃত্তে লিখে দিলেন। এমন করে একে একে একক খেলা এবং সাংস্কৃতিক প্রতিযোগিতায় অংশগ্রহণ করতে চায় এমন শিক্ষার্থীদের রোল নম্বরও ঠিক ঠিক বৃত্তের ঘরে লিখে দিলেন।

এরপর আপা বললেন, “এমন কেউ কি আছো যারা দলগত এবং একক ক্রীড়ার দু’টোতেই অংশগ্রহণ করতে চাও?” উৎস, শরীফ আর নাজমুল ফুটবল দলে ছিল, ওরা দৌড়ে নাম দিতে চায়। আবার সীমা আর অপর্ণা একক খেলায় নাম দিয়েছিল, ওরা ভলিবলও খেলতে চায়। ওদের রোল দলগত আর একক থেকে মুছে দলগত আর এককের বৃত্ত যেখানে একে অপরকে ছেদ করেছে সেই ঘরে লিখে দিলেন।

এমনি করে দলগত ক্রীড়া আর সাংস্কৃতিক কর্মকান্ড এবং একক ক্রীড়া আর সাংস্কৃতিক কর্মকান্ডে যথাক্রমে পাঁচজন ও ছয় জনের রোল নম্বর উঠলো। সব শেষে আপা জিজ্ঞেস করলেন, এবার বলো এমন কেউ আছো যে তিনটিতে অংশগ্রহণ করতে চাও? উৎস তাড়াতাড়ি হাত তুলে বলল, “আপা আমি একটা কবিতা আবৃত্তি করতে চাচ্ছিলাম।” আপা বললেন, “খুব ভালো কথা উৎস!” এবার আপা উৎসের রোল পূর্বের জায়গা থেকে মুছে দলগত, একক এবং সাংস্কৃতিক বৃত্ত তিনটি যেখানে ছেদ করেছে সেই ঘরে লিখে দিলেন।

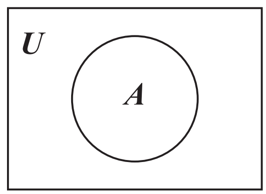
দেখলে তো কী সহজে আপা জটিল একটা সমস্যার সহজ সিদ্ধান্ত নিয়ে ফেললেন! শুধু তাই নয়, বোর্ডে চাক্ষুষ উপস্থাপনাও দেখা গেল। যে চিত্রের মাধ্যমে এই উপায়ে উপস্থাপন করা হয় তাকে ভেন চিত্র (Venn diagram) বলে।

১.৮.১ ভেন চিত্র (Venn Diagram)

ভেন চিত্রের নামকরণ করা হয়েছে এর আবিষ্কারক ইংরেজ দার্শনিক ও যুক্তিবিদ জন ভেন (John Venn) এর নামানুসারে।

(John Venn)

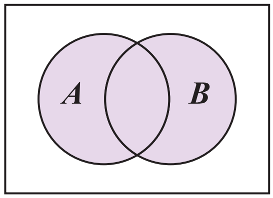
ভেন চিত্রে সার্বিক সেটকে একটি সমতলে আয়তাকার জ্যামিতিক আকার দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং ওই সার্বিক সেটের উপসেটগুলোকে ওই আয়তাকার ক্ষেত্রের ভিতরে বৃত্তের মাধ্যমে উপস্থাপন করা হয়। পাশের ভেন চিত্রে সার্বিক সেট U এবং তার একটি উপসেট A দেখানো হয়েছে।



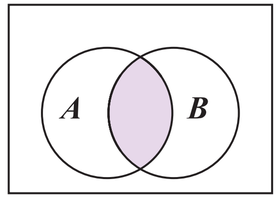
ভেন চিত্রের মাধ্যমে কীভাবে সেটের অপারেশনগুলো উপস্থাপন করা যায় তা নিচে দেখানো হলো। পরবর্তীতে সেট প্রকাশের কাজে আমরা ভেনচিত্র ব্যবহার করব।

১.৮.২ ভেন চিত্রের মাধ্যমে সেট প্রক্রিয়াকরণ

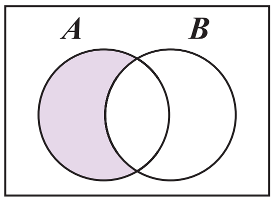
যে কোনো সেট A ও B এর জন্য, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ এবং A^c এর ভেন চিত্র নিচে দেয়া হলো।



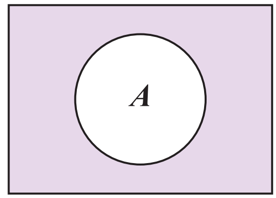
$A \cup B$



$A \cap B$



$A \setminus B$



A^c

১.৮.৩ বাস্তব সমস্যায় ভেন চিত্র

সমস্যা-১. পছন্দের তালিকায় ইলিশ মাছ

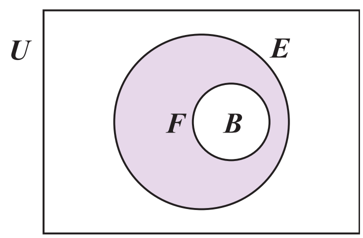
ইলিশ মাছ পছন্দ করেন না এমন বাংলাদেশি খুব কমই আছে। বাংলাদেশি নন কিন্তু ইলিশ মাছ পছন্দ করেন এমন মানুষও আছেন। সমগ্র পৃথিবীতে জনসংখ্যা যত, তাদের মাঝে বাংলাদেশি নন কিন্তু ইলিশ মাছ পছন্দ করেন এমন ব্যক্তিদের সেটটি কেমন হবে চিন্তা করতে পার? একটু বিশ্লেষণ করা যাক।

ধরি, সমগ্র পৃথিবীর জনসংখ্যার সেট U

ইলিশ মাছ পছন্দ করেন এমন মানুষের সেট E

বাংলাদেশি নন কিন্তু ইলিশ মাছ পছন্দ করেন এমন মানুষের সেট F

বাংলাদেশি এবং ইলিশ মাছ পছন্দ করেন এমন মানুষের সেট B



$F = E \setminus B$

বাংলাদেশি নন কিন্তু ইলিশ মাছ পছন্দ করেন এমন মানুষের সেটটি ভেন চিত্রের মাধ্যমে পাশে নির্দেশ করা হলো।

মাথা খাটাও

যে কোনো সেট A, B, C এর জন্য নিচের সেটগুলোকে ভেন চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করো।

১. $A \cup B \cup C$ ২. $(A \cap B)^c$ ৩. $A \cap (B \cup C)$

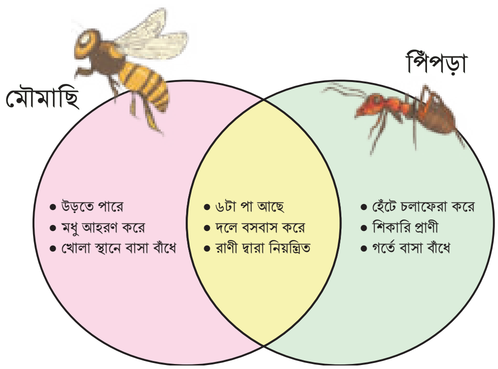
সমস্যা-২. মৌমাছি এবং পিঁপড়ার বৈশিষ্ট্য

নিচে পিঁপড়া এবং মৌমাছির কিছু বৈশিষ্ট্য উল্লেখ করা হলো। ভেন চিত্রের মাধ্যমে তাদের সাধারণ বৈশিষ্টগুলো বের করো।

মৌমাছির কিছু বৈশিষ্ট্য	পিঁপড়ার কিছু বৈশিষ্ট্য
• 6টি পা আছে	• 6টি পা আছে
• দলে বসবাস করে	• হেঁটে চলাফেরা করে
• উড়তে পারে	• দলে বসবাস করে
• মধু আহরণ করে	• শিকারী প্রাণী
• রাণী দ্বারা নিয়ন্ত্রিত	• গর্তে বাসা বাঁধে
• খোলা স্থানে বাসা বাঁধে	• রাণী দ্বারা নিয়ন্ত্রিত

সমাধান : ধরি, মৌমাছির বৈশিষ্ট্যের সেট A এবং পিঁপড়ার বৈশিষ্ট্যের সেট B.

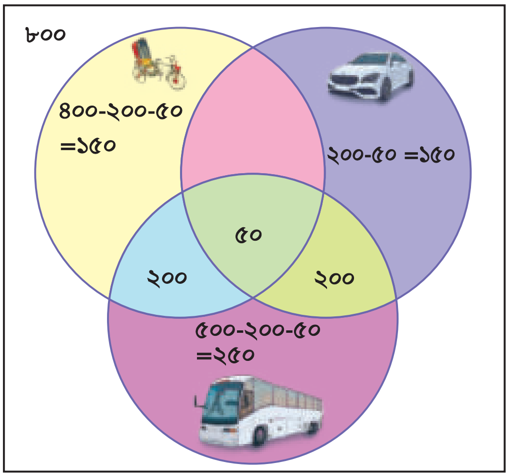
তাদের বৈশিষ্ট্যগুলো ভেন চিত্রের মাধ্যমে এমনভাবে উপস্থাপন করা হয়েছে যেন তাদের সাধারণ বৈশিষ্ট্যগুলো $A \cap B$ তে থাকে। পাশের ভেন চিত্র অনুযায়ী সাধারণ বৈশিষ্ট্যগুলো :



$A \cap B$ ={6 টি পা আছে, দলে বসবাস করে, রাণী দ্বারা নিয়ন্ত্রিত হয়}

সমস্যা-৩. যাতায়াত ব্যবস্থা

একটি শহরের 800 জন মানুষের উপর একটি জরিপ করে দেখা গেল যে, 500 জন মানুষ বাসে যাতায়াত করে, 200 জন মানুষ গাড়িতে যাতায়াত করে, 400 জন মানুষ রিক্সায় যাতায়াত করে, 200 জন মানুষ বাস এবং রিক্সা উভয়েই যাতায়াত করে কিন্তু গাড়িতে যাতায়াত করে না এবং 50 জন মানুষ বাস, রিক্সা এবং গাড়িতে যাতায়াত করে। অন্যরা পায়ে হেঁটে যাতায়াত করে। কত জন মানুষ পায়ে হেঁটে যাতায়াত করে তা ভেন চিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপন করে নির্ণয় করো।



সমাধান : মনে করি, জরিপকৃত মানুষের সেট U, বাসে যাতায়াতকারী মানুষের সেট B, গাড়িতে যাতায়াতকারী মানুষের সেট C, রিক্সায় যাতায়াতকারী মানুষের সেট R এবং পায়ে হেঁটে যাতায়াতকারী মানুষের সেট W.

তাহলে, $n(U) = 800$ জন, $n(B) = 500$ জন, $n(C) = 200$ জন, $n(R) = 400$ জন

ভেনচিত্র অনুযায়ী, তিনটি যানবাহনেই যাতায়াত করে এমন মানুষের সেট $B \cap R \cap C$

$$\therefore n(B \cap R \cap C) = 50 \text{ জন}$$

বাস ও রিক্সায় উভয়েই যাতায়াত করে কিন্তু গাড়িতে যাতায়াত করে না এমন মানুষের সংখ্যা

$$n(B \cap R \cap C^c) = 200 \text{ জন}$$

শুধু বাসে যাতায়াত করে $n(B) - n\ (B \cap R \cap C^c\ ) - n(B \cap R \cap C)$

$= (500 - 200 - 50)$ জন

$= (500 - 250)$ জন

$= 250$ জন

শুধু রিক্সায় যাতায়াত করে $n(R) - n(B \cap R \cap C^c) - n(B \cap R \cap C)$

নিচের বক্সে হিসাব করে বের করো

শুধু গাড়িতে যাতায়াত করে $n(C) - n(B \cap R \cap C)$

$= (200 - 50)$ জন

$= 150$ জন

$\therefore$ কমপক্ষে যে কোনো একটি যানবাহনে যাতায়াত করে $n(B \cup R \cup C)$ [প্রদত্ত খালি ঘরে হিসাব করো।]

সুতরাং, পায়ে হেঁটে যাতায়াত করে $n(W) = n(U) - n(B \cup R \cup C)$

$= (800 - 800)$ জন

$= 0$ জন

সুতরাং, কোনো মানুষ পায়ে হেঁটে যাতায়াত করে না।

১.৯ সেটের কার্তেসীয় গুণজ (Cartesian product of sets)

ধরি, A একটি রঙের সেট যেখানে দুই ধরনের রং আছে, যথা– সাদা এবং কালো, অর্থাৎ A = {সাদা, কালো} এবং B একটি পোশাকের সেট যেখানে তিন ধরনের পোশাক আছে, যথা– শার্ট ,প্যান্ট, পাঞ্জাবি, অর্থাৎ B = {শার্ট, প্যান্ট, পাঞ্জাবি}. তাহলে, প্রথমে রং এবং পরে পোশাক এই ক্রমে আমরা নতুন একটি সেট তৈরি করতে পারি। এই সেটকে $A \times B$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এখন প্রশ্ন হচ্ছে, প্রথমে রং এবং পরে পোশাক এই ক্রমে আমরা কতটি উপাদান তৈরি করতে পারি? নিচের সারণীটি লক্ষ করো। এখানে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের মতো একদিকে রং এবং অন্য দিকে পোশাকের সেট ব্যবহার করে ক্রমোজোড় হিসাবে $A \times B$ এর উপাদান তৈরি করা হয়েছে।

	শার্ট	প্যান্ট	পাঞ্জাবি
সাদা	(সাদা, শার্ট)	(সাদা, প্যান্ট)	(সাদা, পাঞ্জাবি)
কালো	(কালো, শার্ট)	(কালো, প্যান্ট)	(কালো, পাঞ্জাবি)

অর্থাৎ

$A \times B$ = {(সাদা, শার্ট), (সাদা, প্যান্ট), (সাদা, পাঞ্জাবি), (কালো, শার্ট), (কালো, প্যান্ট), (কালো, পাঞ্জাবি)}

সুতরাং আমরা লিখতে পারি,

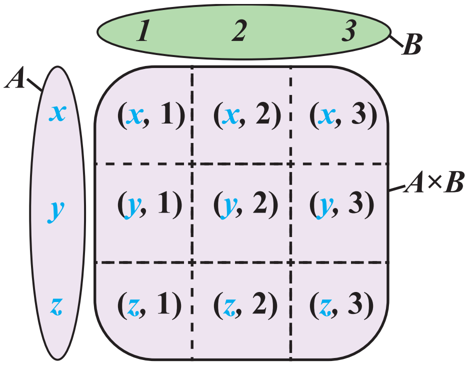
$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

উদাহরণ : যদি $A = \{x, y, z\}$ এবং $B = \{1, 2, 3\}$ হয়, তবে

$A \times B = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3), (z, 1), (z, 2), (z, 3)\}$

নিচে ছক ১.২ দেওয়া হলো।

ছক ১.২



লক্ষ কর: (i) $(x, 1) \in A \times B$ কিন্তু $(1, x) \notin A \times B$.

(ii) $(x, y) = (u, v)$ যদি এবং কেবল যদি $x = u$ এবং $y = v$ হয়।

(iii) যে কোনো সেট A এর জন্য $A \times \emptyset = \emptyset$

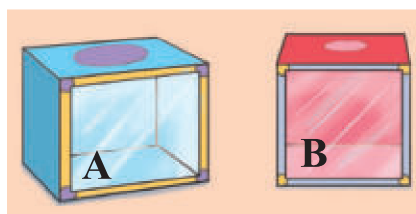
মাথা খাটাও

১। $n(A) = 3$ এবং $n(B) = 2$ হলে, $n(A \times B) = ?$

২। $n(A) = p$ এবং $n(B) = q$ হলে, $n(A \times B) = ?$

১.১০ দলগত কাজ/ প্রজেক্ট

শিক্ষক বিভিন্ন খেলার নাম ছোটো ছোটো কাগজে লিখে ভাজ করে দুইটি বক্সে (A ও B) রাখবেন। প্রতি বক্সে কমপক্ষে 5টি খেলার নাম থাকবে।



এবার শিক্ষকের নির্দেশমতো শিক্ষার্থীরা ৯ জন (বা যে কোনো বিজোড় সংখ্যক) করে দলে বিভক্ত হবে। প্রতি দলের দলনেতা A ও B বক্স থেকে একটি করে মোট দুটি খেলার নাম তুলে নেবে এবং দলের অন্য সদস্যের থেকে প্রশ্ন করে জেনে নেবে যে, লটারিতে পাওয়া খেলা দুইটির মধ্যে কোনটি তারা খেলতে পছন্দ করে।

তাদের সম্ভাব্য উত্তর হতে পারে : (ক) দুটিই পছন্দ করে (A ও B), (খ) যে কোনো একটি পছন্দ করে (A অথবা B), (গ) কোনোটিই পছন্দ করে না। এবার খাতায় একটি নামের তালিকা করো যে, কারা A পছন্দ করে, কারা

B পছন্দ করে, এবং কারা কোনোটিই পছন্দ করে না। যদি কেউ দুটি খেলাই পছন্দ করে, তবে তার নাম A ও B দুটি তালিকাতেই থাকবে। এবার নিচের কাজগুলো সম্পন্ন করে শ্রেণিতে উপস্থাপন করো।

১। তোমাদের সংগৃহীত তথ্য তালিকা পদ্ধতিতে উপস্থাপন করো।

ক) U = {দলের সকল শিক্ষার্থীর নাম যাদের কাছ থেকে তথ্য নেয়া হয়েছে}

খ) A = {যারা A গ্রুপের খেলা পছন্দ করে}

গ) B = {যারা B গ্রুপের খেলা পছন্দ করে}

২। উপরের 'ক', 'খ' ও 'গ' এর তথ্যগুলো একটি ভেন চিত্রে উপস্থাপন করো। যারা A ও B এর কোনোটিই পছন্দ করে না, তাদেরকেও ভেন চিত্রে উল্লেখ করো।

৩। এবার সেটের অপারেশন থেকে প্রাপ্ত সংখ্যা দিয়ে নিচের ছকটি পূরণ করো।

$n(A)$	
$n(B)$	
$n(A \cap B)$	
$n(A \cup B)$	
$n(\cup)$	

$n(A^c)$	
$n(B^c)$	
$n(A \cup B)^c$	
$n(A \cap B)^c$	

৪। নিচের সমীকরণগুলোর সত্যতা যাচাই করো।

ক) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

খ) $n(U) = n(A) + n(A^c)$

গ) $n(A \setminus B) = n(A) - n(A \cup B)$

ঘ) $n(A^c \cap B^c) = n(U) - n(A \cup B)$

শেষ কথা

জর্জ ক্যান্টরের সেট তত্ত্বের উপর ভিত্তি করে গণিতের প্রায়োগিক শাখার অনেক গুরুত্বপূর্ণ আবিষ্কার হয়েছে, যেগুলো তোমরা উচ্চ মাধ্যমিক এবং বিশ্ববিদ্যালয় পর্যায়ে শিখবে। এই শ্রেণিতে সেট পড়ার পদ্ধতি, প্রকাশের পদ্ধতি, বিভিন্ন প্রকারভেদ, উপসেটের নানান প্রকার, ভেন চিত্রে প্রকাশ এবং ক্রমজোড়ের ব্যবহার শিখলে। আশা করা যায় এই ব্যবহারগুলো তোমাদের চিন্তা এবং বিশ্লেষণের জগত প্রসারিত করবে এবং বাস্তব জীবনে এই দক্ষতা প্রয়োগ করে জটিল সমস্যার সমাধান করতে পারবে।

অনুশীলনী

১। তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করো :

ক) $A = \{x \in N : -3 < x \leq 5\}$

খ) $B = \{x \in Z : x$ মৌলিক সংখ্যা এবং $x^2 \leq 50\}$

গ) $C = \{x \in Z : x^4 < 264\}$

২। সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ করো :

ক) $A = \{1, 3, 5, \ldots, 101\}$

খ) $B = \{4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$

৩। যদি $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{0, 1, 3, 5, 6\}$ এবং $C = \{1, 5, 6\}$ হয়, তবে নিচের সেটগুলো নির্ণয় করো।

ক) $A \cup \mathrm{B}$ খ) $A \cap C$ গ) $B \backslash C$ ঘ) $A \cup (B \cap C)$ ঙ) $A \cap (B \cup C)$

৪। যদি $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{0, 2, 4, 6\}$ এবং $C = \{3, 4, 5, 6, 7]$ হয়, তবে নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে সত্যতা যাচাই করো :

ক) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ খ) $(B \cap C)^c = B^c \cup C^c$

গ) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cap (B \cap C)$ ঘ) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

৫। মান নির্ণয় করো :

ক) $N \cap 2N$ খ) $N \cap A$ গ) $2N \cap P$

যেখানে, N সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট, $2N$ সকল ধনাত্মক জোড় সংখ্যার সেট, A সকল বিজোড় সংখ্যার সেট, P সকল মৌলিক সংখ্যার সেট।

৬। ধরি U সকল ত্রিভুজের সেট হয় এবং A সকল সমকোণী ত্রিভুজের সেট। তাহলে সেট A^c বর্ণনা করো।

৭। ভেন চিত্রের মাধ্যমে দেখাও যে, যে কোনো সেট A, B, C এর জন্য-

ক) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ খ) $(B \cap C)^c = B^c \cup C^c$

গ) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ঘ) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

৮। কোনো শ্রেণির 40 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 25 জন পাখি পছন্দ করে এবং 15 জন বিড়াল পছন্দ করে। পাখি ও বিড়াল দুটি প্রাণীই পছন্দ করে এরূপ শিক্ষার্থীর সংখ্যা 10 জন। কতজন শিক্ষার্থী পাখি ও বিড়াল কোনোটিই পছন্দ করে না তা ভেন চিত্রের সাহায্যে নির্ণয় করো।

৯। যদি $P = \{a, b\}$, $Q = \{0, 1, 2\}$ এবং $R = \{0, 1, a\}$ হয়, তবে নিচের রাশিগুলোর মান নির্ণয় করো।

ক) $P \times Q, P \times P, Q \times Q, Q \times P$ এবং $P \times \emptyset$

খ) $(P \times Q) \cap (P \times R)$

গ) $P \times (Q \cap R)$

ঘ) $(P \times Q) \cap R$

ঙ) $n(P \times Q), n(Q \times Q)$

চ) (গ) এবং (ঘ) এর সমতার বিষয়ে তোমার যুক্তি উপস্থাপন করো।

১০। $P = \{0, 1, 2, 3\}$, $Q = \{1, 3, 4\}$ এবং $R = P \cap Q$ হলে,

(i) $P \times R$ এবং $R \times Q$ নির্ণয় করো।

(ii) $n(P \times R)$ এবং $n(R \times Q)$ এর মান বের করো।

১১। যদি $P \times Q = \{(0, a), (1, c), (2, b)\}$ হয়, তবে P এবং Q নির্ণয় করো।